Pubblicazione bimensile. *Roma 6 agosto 1915.* **N. 1.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXIV°. — Fascicolo 1°

2° Semestre.

Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie sino al 4 luglio **1915**.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

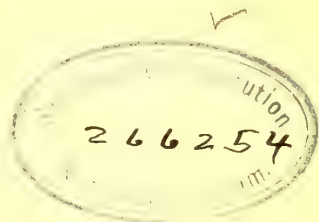
1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI
pervenute all'Accademia durante le ferie del 1915.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Chimica. — *Sopra il nero di pirrolo* [1]. Nota preliminare del Socio A. Angeli [2].

Le mie ricerche sopra i processi di ossidazione determinati dall'acqua ossigenata in presenza di acido acetico, non si sono limitate a quelle che si riferiscono al gruppo degli azocomposti; io ho altresì esteso l'impiego di questo reattivo anche ad alcuni derivati ciclici che nella loro molecola contengono uno ovvero più atomi di azoto, ed in questa Nota preliminare accennerò brevemente ai risultati ottenuti dal pirrolo, allo scopo principalmente di poter proseguire indisturbato lo studio dei prodotti che in tal modo si formano e che io mi riservo di estendere anche ai pirroli sostituiti.

Lo studio dei composti che i derivati del pirrolo forniscono per azione dei mezzi ossidanti, è stato già argomento di importanti lavori. Le prime esperienze in proposito vennero eseguite da Ciamician [3], il quale ha trovato che i pirroli, per trattamento con acido nitrico, forniscono derivati della maleinimmide. In seguito W. Küster ha ossidato con acido cromico gli acidi ematinici [4] e l'emopirrolo [5] e, poco dopo, Plancher e Cattadori [6] hanno fatto

[1] Lavoro eseguito nel R. Istituto di Studî Superiori in Firenze.
[2] Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1915.
[3] Berliner Berichte, *37* (1904), 4212.
[4] Ibid., *33* (1900). 3021.
[5] Ibid., *35* (1902), 2953.
[6] Questi Rendiconti (1903), 1° sem., pag. 10; ibid. (1904), 1° sem., pag. 489.

reagire lo stesso reattivo sotto forma di miscela cromica di Beckmann, sopra il pirrolo ed i metilpirroli; in tal modo pervennero, fra altro, alla maleinimmide che ancora non si conosceva.

Questa trasformazione in derivati dell'acido maleico è importante non solo perchè permette di stabilire se una sostanza è realmente un derivato del pirrolo, ma anche perchè ci fornisce il mezzo per determinare il posto che i sostituenti occupano nell'anello pirrolico di partenza.

Il processo poi di autossidazione, che il pirrolo subisce sotto l'influenza dei raggi luminosi, è stato recentemente studiato pure da Ciamician e Silber [1], i quali hanno trovato che in tal modo il pirrolo viene completamente trasformato in prodotti catramosi e carboniosi che gli autori non hanno esaminato, in sali ammonici, in derivati cristallini complessi $C_{12}H_{14}N_2O_5$ e finalmente in immide succinica. La formazione di quest'ultima sostanza dimostra che anche in questo caso l'anello pirrolico fondamentale si è mantenuto inalterato. Ora, io ho trovato che il pirrolo in soluzione acetica, per azione dell'acqua ossigenata, fino ad un certo punto si comporta in modo analogo a quanto Ciamician e Silber hanno osservato nel processo di autoossidazione; anche in questo caso infatti si ottiene un prodotto che possiede tutti i caratteri dell'immide succinica: ma contemporaneamente se ne forma un altro (e forse più d'uno) colorato in nero, e che per maggiore brevità chiamerò *nero di pirrolo*. È insolubile in quasi tutti i solventi, ma si scioglie facilmente negli alcali. Per le mie esperienze ho adoperato pirrolo sintetico della fabbrica Th. Schuchardt, e per ogni grammo di pirrolo ho impiegato circa 2-3 grammi di peridrol Merck, con la quantità sufficiente di acido acetico in modo che tutto rimanga in soluzione. Dopo breve tempo, a temperatura ordinaria, il liquido diventa bruno-verdastro, colore che nello spazio di un paio di giorni passa al bruno nero. Talvolta il prodotto si separa spontaneamente, sotto forma di polvere nera sottilissima; altre volte è necessario di aggiungere acqua; ma in modo più facile si determina la separazione aggiungendo una soluzione acquosa di solfato sodico. Come si vede, con molta probabilità, si tratta della coagulazione di un colloide. Il composto, raccolto su filtro e lavato con acqua, viene ridisciolto in poco alcali e dal liquido filtrato si riprecipita per aggiunta di acido acetico ovvero di acido solforico diluiti. Si ottiene così sotto forma di una polvere finissima, intensamente colorata in nero tendente al bruno. Venne seccato a 120° e si analizzarono prodotti di differenti preparazioni, in cui vennero anche impiegate quantità differenti di ossidante. Sebbene i numeri ottenuti presentino una certa concordanza, non credo ancora prudente di considerare come definitivi i risultati; la storia del nero di anilina ne offre un bell'esempio.

[1] Questi Rendiconti (1912), 1° sem., pag. 619.

La formazione di un tale prodotto, come ognuno ben comprende, presenterebbe un interesse molto limitato; ma quello che maggiormente ha colpito la mia attenzione è il fatto della grande rassomiglianza che questo composto presenta con le *melanine*, le quali, come è noto ([1]), sono pigmenti amorfi, colorati in nero o bruno, che si riscontrano nei peli, nella pelle dei negri, nelle cellule epiteliali della retina, nella sepia, in alcune neoformazioni patologiche, nel sangue e nell'urina di taluni malati. Sono insolubili nell'acqua, alcool, etere, cloroformio ed acidi diluiti; alcune sono poco solubili negli alcali, altre vi si sciolgono invece con grande facilità; talune sono prive di zolfo, mentre altre ne sono abbastanza ricche. Sembra che ancora non sia stato possibile di superare le difficoltà che presentano il loro isolamento e la loro purificazione, tanto che è dubbio se il prodotto finale, in seguito ai trattamenti coi varî reattivi, non possieda una composizione diversa da quello di partenza ([2]); però, secondo Hofmeister ([3]), la loro composizione presenta una certa concordanza nel fatto che nelle diverse melanine il rapporto atomico non si scosta molto dal valore $N : H : C = 1 : 5 : 5$. Lo stesso ho potuto constatare io per il prodotto da me ottenuto.

Le melanine non presentano le reazioni degli albuminoidi, e nemmeno forniscono i loro prodotti di scissione ([4]); così non si ebbero leucina, tirosina, cistina, fenoli ecc.; invece dànno facilmente pirrolo, indolo, scatolo, nitrili e piridina ([5]). Ed anche il prodotto da me ottenuto per fusione con potassa, ovvero per semplice riscaldamento, sviluppa insieme con basi piridiche, vapori che colorano intensamente in rosso una scheggia di abete bagnata con acido cloridrico [reazione dei pirroli e degli indoli ([6])].

Per ulteriore azione dell'acqua ossigenata in soluzione acetica, la polvere nera passa lentamente in soluzione; ed il liquido diventa prima aranciato, colore che poi passa al giallo, con una lieve fluorescenza verde. A questo riguardo ricorderò che anche la melanina dei capelli si scolora per azione dell'acqua ossigenata, tanto che questa viene anche adoperata per far diventare biondi i capelli neri o castanei.

Naturalmente, le esperienze finora eseguite, non mi permettono ancora di asserire che il prodotto da me ottenuto appartenga realmente a quella

([1]) O. Hammarsten, Lehrbuch der physiologischen Chemie, V ed. (1904), pag. 600.

([2]) E. Abderhalden, Handbuch d. biochem. Arbeitsmethoden (1909), II vol., parte 1ª, pag. 763.

([3]) C. Oppenheimer, Handbuch der Biochemie (1909), vol. I, pag. 744.

([4]) O. Cohnheim, Chemie der Eiweisskörper, III ed. (1911), pag. 275.

([5]) A. Oswald, Lehrbuch d. chem. Pathologie (1907), pag. 489.

([6]) È noto che i pirroli possono facilmente trasformarsi in derivati dell'indolo. M. Dennstedt, Chem. Zentralblatt (1901) II, 1135; G. Plancher, Berl. Berichte *35* (1902), 2606; confronta anche Meyer-Jacobson, Lehrbuch, vol. II, parte 3ª, fasc. 1°, pag. 153.

classe di composti che si chiamano melanine (¹); ma, come si è visto, le analogie che ho riferito sono notevoli, e d'altra parte tutti sono d'accordo nell'ammettere che la formazione di queste sostanze sia dovuta ad un processo di ossidazione. Se una rassomiglianza sussiste, le mie esperienze porterebbero anche una conferma all'ipotesi che Samuely (²) ha formulato alcuni anni or sono, sulla origine di tali composti. Egli ammette infatti che il processo sia diviso in due fasi: 1) La *scissione di composti ciclici dalla molecola albuminoide*, probabilmente in seguito all'azione di fermenti autolitici; 2) La *trasformazione di questi composti ciclici in melanine per azione ossidante di alcuni fermenti*. In alcuni casi il processo può complicarsi per il fatto che anche gruppi accessorî, contenenti zolfo e ferro, possono prendere parte al processo di condensazione. I composti ciclici che si staccano dalle albumine potrebbero quindi essere pirrolo o suoi derivati, i quali successivamente subiscono il processo di ossidazione.

Pubblico con tutto riserbo i risultati delle mie esperienze ancora preliminari, che per diverse ragioni ho dovuto interrompere.

Ringrazio il dott. Luigi Alessandri per il valido aiuto che mi ha prestato nell'esecuzione delle presenti ricerche.

Fisica-matematica. — *Resistenza effettiva e resistenza ohmica.* Nota di TOMMASO BOGGIO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA (³).

In una Nota recentissima (⁴), avente lo stesso titolo della presente, e pubblicata nel fascicolo 6° (1° sem. 1915) di questi Rendiconti, il prof. Signorini stabilisce l'importante proprietà che « tutte le volte che un filo « conduttore è sede di una propagazione di onde elettromagnetiche, smor- « zate o no (compreso il caso limite che si tratti di un campo stazionario), « in ogni sua sezione normale la resistenza effettiva non è mai inferiore « alla resistenza ohmica, e risulta ad essa sempre eguale allora, e allora « soltanto, che il filo sia cilindrico, il campo stazionario, e la forza elet-

(¹) Non sono mancate esperienze dirette a produrre artificialmente le melanine; così p. es. la glucosammina, il triptofano, la sieroalbumina e l'albume d'uovo, per prolungata ebollizione con acidi minerali diluiti forniscono prodotti scuri, neri o bruni (le cosiddette sostanze umiche o melanoidine); inoltre Ducceschi, ossidando la tirosina con clorato, ebbe del pari composti colorati in scuro; ma evidentemente si tratta di reazioni che sono ben diverse da quelle che si compiono negli organismi e che conducono a derivati di tutt'altra natura.

(²) C. Oppenheimer, Handbuch der Biochemie, vol. I, pag. 749.

(³) Pervenuta all'Accademia il 5 luglio 1915.

(⁴) Dovendo citare, nel seguito, questa Nota, la indicherò con (*S*).

« trica costante in intensità e sempre parallela all'asse del filo (almeno se « si esclude l'esistenza, dentro il conduttore, di correnti di spostamento) ».

La prima parte del teorema si stabilisce assai facilmente (*S*, § 3); per stabilire la seconda parte, il Signorini ricorre a calcoli assai complicati: trasforma le equazioni vettoriali elettrodinamiche (*S*, § 2) introducendo un apposito sistema di coordinate, e poi, operando opportunamente sulle equazioni trovate (*S*, § 4), arriva al risultato.

Ora, si può giungere rapidamente al risultato con calcoli molto brevi, senza introdurre coordinate di sorta, ma operando esclusivamente sulle equazioni vettoriali elettrodinamiche; in tal modo si ottiene, per dir così, automaticamente, senza la più lontana ombra di artificiosità, il risultato voluto; inoltre — com'è carattere peculiare del metodo vettoriale — ogni equazione o trasformazione che si fa, ha un preciso ed immediato significato, meccanico od analitico.

Ciò è mostrato nei paragrafi seguenti, ove i calcoli sono sviluppati per disteso.

Per le citazioni di calcolo vettoriale, mi riferisco all'opera di Burali-Forti e Marcolongo, *Éléments de calcul vectoriel* etc. (Hermann, Paris, an. 1910).

1. Sia C una curva qualunque dello spazio, e per un punto arbitrario P dello spazio conduciamo una normale alla curva C, e diciamo M il suo piede.

Se O è un punto arbitrario di C, e chiamiamo z la lunghezza dell'arco OM, è chiaro che z è una determinata funzione del punto P; se poi indichiamo con **T**, **N**, **B** i soliti vettori unitarî, diretti rispettivamente secondo la tangente, normale principale e binormale della curva C nel punto M, questi vettori sono funzioni di z e, perciò, anche del punto P.

Chiameremo f e f_1 la flessione e la torsione della curva C in M; anche f, f_1 sono funzioni di z.

Calcoliamo anzitutto il gradiente, rispetto a P, della z.

Basta partire dalla condizione geometrica $(\mathrm{P}-\mathrm{M})\times \mathbf{T}=0$ e differenziarla; avremo così, ricordando una delle formule di Frenet (cfr. *Éléments*, pag. 87),

$$(d\mathrm{P}-\mathbf{T}\,dz)\times \mathbf{T}+(\mathrm{P}-\mathrm{M})\times f\mathbf{N}\,dz=0\,,$$

da cui

$$dz=\frac{1}{1-f(\mathrm{P}-\mathrm{M})\times \mathbf{N}}\,\mathbf{T}\times d\mathrm{P}\,,$$

perciò

$$\text{grad}\, z=\frac{1}{1-fx}\,\mathbf{T}\,, \tag{1}$$

avendo posto

$$x = (\mathrm{P} - \mathrm{M}) \times \mathbf{N} . \tag{2}$$

Calcoliamo ora $\mathrm{rot}_\mathrm{P}\,\mathbf{T}$, $\mathrm{rot}_\mathrm{P}\,\mathbf{B}$, $\mathrm{div}_\mathrm{P}\,\mathbf{T}$. Il calcolo si fa subito, ricorrendo ad alcune formule utilissime che ho dato in altra occasione (1); poichè, come si è già osservato, i vettori $\mathbf{T}, \mathbf{B}$ sono funzioni di z, dalle accennate formule si ha:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{T} = \mathrm{grad}\, z \wedge \frac{d\mathbf{T}}{dz} \quad , \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \mathrm{grad}\, z \wedge \frac{d\mathbf{B}}{dz} ,$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{T} = \mathrm{grad}\, z \times \frac{d\mathbf{T}}{dz} ,$$

cioè, per le formule di Frenet, e per la (1),

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{T} = \frac{f}{1 - fx}\mathbf{B} \quad , \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \frac{f_1}{1 - fx}\mathbf{B} , \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{T} = 0 . \tag{4}$$

È anche utile calcolare $\mathrm{grad}_\mathrm{P}\, x$, nel caso in cui la curva C sia piana; dalla (2), differenziando e applicando una delle formule di Frenet, si ha:

$$dx = (d\mathrm{P} - \mathbf{T}\,dz) \times \mathbf{N} - (\mathrm{P} - \mathrm{M}) \times f\,\mathbf{T}\,dz ,$$

la quale si riduce a $dx = d\mathrm{P} \times \mathbf{N}$; perciò:

$$\mathrm{grad}\, x = \mathbf{N} . \tag{5}$$

Se la curva C fosse sghemba, si troverebbe, analogamente,

$$\mathrm{grad}\, x = \mathbf{N} - f_1(\mathrm{P} - \mathrm{M}) \times \mathbf{B} \,.\, \mathrm{grad}\, z .$$

2. Consideriamo un'area piana S, che si muove (rigidamente) in guisa che il suo baricentro descriva la curva C, e che il suo piano sia costantemente normale a C. Lo spazio, di forma tubolare, descritto dall'area S, si chiama anche *filo*, e l'area S è una sezione normale di tale filo; la curva C si dice *asse* del filo.

Supponiamo che questo filo, supposto conduttore, sia sede di una propagazione di onde elettromagnetiche; allora, in ogni punto P del filo, i

(1) Cfr. Boggio, *Sul gradiente di una omografia vettoriale* [Rendiconti di questa Accademia, serie 5ª, vol. XIX (2° sem. 1910), pag. 389]. Ovvero anche: Burali-Forti et Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*; vol. I, *Transformations linéaires*, pag. 92 [Mattei, Pavia, an. 1912].

vettori $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ delle forze elettrica e magnetica sono legati dalle equazioni di Heaviside-Herz (cfr. *Éléments*, pp. 163, 164):

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi\sigma}{c}\mathbf{E}=\operatorname{rot}\mathbf{H}, \tag{6}$$

$$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}=\operatorname{rot}\mathbf{E}, \tag{7}$$

ove $c, \varepsilon, \sigma, \mu$ sono costanti.

A queste, occorre ancora aggiungere l'equazione:

$$\operatorname{div}\mathbf{H}=0, \tag{8}$$

che esprime che il campo magnetico è solenoidale.

La condizione d'integrabilità div rot $=0$, applicata alle (6), (7), porge:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+\frac{\mathbf{E}}{\theta}\right)=0, \tag{9}$$

$$\operatorname{div}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}=0, \tag{9'}$$

ove $\theta=\frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}=$ tempo di rilassamento; è chiaro che la (9′) è identicamente verificata, a causa della (8).

Inoltre, eliminando $\mathbf{H}$ fra le (6), (7), risulta:

$$\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+\frac{\mathbf{E}}{\theta}\right)=-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}. \tag{10}$$

Ciò premesso, se si vuole che, in qualunque sezione normale S del filo, la resistenza effettiva sia eguale alla resistenza ohmica, occorre e basta (*S*, § 3) che, in tutti i punti della sezione S, la forza elettrica sia (in ogni istante) normale alla sezione stessa, e vi abbia la medesima intensità.

Queste condizioni si traducono nell'eguaglianza

$$\mathbf{E}=u(z,t)\,\mathbf{T}, \tag{11}$$

ove u è una funzione, da determinarsi, degli argomenti z, t.

Si ha:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+\frac{\mathbf{E}}{\theta}=\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{u}{\theta}\right)\mathbf{T};$$

perciò, sostituendo nella (9), e ricordando la (4), risulta:

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{u}{\theta}\right)\times\mathbf{T}=0;$$

e siccome, in generale, $\operatorname{grad} F(z) = \frac{\partial F}{\partial z} \operatorname{grad} z$, si trae, in virtù della (1),

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{\theta}\right) = 0. \tag{12}$$

Questa relazione è stata stabilita dal Signorini (S, § 4) con esclusivo riguardo al problema da lui trattato: in particolare, tenendo conto, che, in conseguenza delle ipotesi, risulta $f = 0$. Quanto precede mostra invece che essa deriva unicamente dalla condizione d'integrabilità della (6); si ha così anche il significato analitico di tale equazione.

3. Per trovare un'altra condizione, a cui deve soddisfare la u, basta sostituire il valore (11) nella (10); per ciò calcoliamo intanto $\operatorname{rot} \mathbf{E}$. Dalla (11) risulta:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = u \operatorname{rot} \mathbf{T} + \frac{\partial u}{\partial z} \operatorname{grad} z \wedge \mathbf{T},$$

cioè, per le (1), (3),

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{uf}{1 - fx} \mathbf{B}. \tag{13}$$

Ne segue [cfr. *Éléments*, pag. 68, (2)]:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{uf}{1-fx} \operatorname{rot} \mathbf{B} + \\ + \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{uf}{1-fx}\right) \operatorname{grad} z + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{uf}{1-fx}\right) \operatorname{grad} x \right\} \wedge \mathbf{B};$$

ricordando la seconda delle (3), e sostituendo nella (10), risulta:

$$\frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{\theta}\right) \mathbf{T} = -\frac{uff_1}{(1-fx)^2} \mathbf{B} - \\ - \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{uf}{1-fx}\right) \operatorname{grad} z + \frac{uf^2}{(1-fx)^2} \operatorname{grad} x \right\} \wedge \mathbf{B}. \tag{14}$$

Moltiplicando scalarmente ambo i membri per $\mathbf{B}$, si ha:

$$uff_1 = 0;$$

quindi, lasciando da parte il caso banale di $u = 0$ (in cui si ha senz'altro: $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{H} = \operatorname{grad} \psi$), dovrà essere:

$$f = 0, \qquad \text{ovvero} \qquad f_1 = 0.$$

Se $f = 0$, la curva C è una linea retta, perciò il filo è cilindrico; la (14) fornisce allora

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{\theta}\right) = 0, \tag{15}$$

inoltre dalle (13), (7) risulta

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 . \tag{16}$$

la seconda delle quali mostra di nuovo che la (9') è identicamente verificata.

Se invece $f_1 = 0$, la curva C è piana, e la (14), moltiplicata scalarmente per $\mathbf{T}$, porge, ricordando le (1), (5),

$$\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{\theta}\right) = -\frac{uf^2}{(1 - fx)^2}$$

ma u ed f sono indipendenti da x; perciò questa relazione, dovendo essere verificata qualunque sia x, fornisce $f = 0$, e ricadiamo perciò nel caso del filo cilindrico; si conclude quindi che sussistono ancora le (15), (16).

Dalle (12), (15) segue:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{\theta} = h ,$$

ove h è una costante arbitraria; integrando ancora, risulta:

$$u(z\,, t) = h + k_z\, e^{-t/\theta} ,$$

k_z essendo una funzione arbitraria di z. In tal modo abbiamo l'espressione della funzione u, e quindi del vettore $\mathbf{E}$, che avrà direzione fissa.

Dopo ciò, si ha dalla (6):

$$\text{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\, h\,\mathbf{T} ,$$

da cui, $\mathbf{T}$ essendo costante,

$$\mathbf{H} = \text{grad}\,\psi + \frac{2\pi\sigma}{c}\, h\,\mathbf{T} \wedge (\mathrm{P} - \mathrm{M}) ,$$

ove ψ è una funzione numerica (indipendente da t), che deve soddisfare, per la (8), all'equazione

$$\text{div grad}\,\psi = 0 .$$

In tal modo abbiamo l'espressione del vettore $\mathbf{H}$.

Se escludiamo l'esistenza, nel conduttore, di correnti di spostamento, vuol dire che $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ deve ritenersi nulla, e la (15) si riduce a $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, perciò il campo risulta stazionario.

Osservazione. — Limitandosi, fin da principio, alla considerazione di campi elettromagnetici stazionarî, si può arrivare, in modo assai semplice,

a determinare le condizioni sotto cui accade che la resistenza effettiva coincida colla resistenza ohmica. Infatti, se il campo è stazionario, detto φ il suo potenziale scalare, sarà $\mathbf{E} = \mathrm{grad}_P \varphi$. D'altra parte, $\mathbf{E}$ deve avere la forma (11) con u indipendente da t; perciò il potenziale φ dovrà dipendere solo da z, e allora avremo

$$\mathbf{E} = \frac{d\varphi}{dz} \operatorname{grad} z = \frac{1}{1 - fx} \frac{d\varphi}{dz} \mathbf{T};$$

ed è chiaro che il coefficiente di $\mathbf{T}$ riesce indipendente da x, solo se $f = 0$. Ciò porta immediatamente a conclusioni che coincidono con quelle del paragrafo precedente, riferite al caso limite $\theta = 0$.

Fisica. — *Sull'attrito interno del nickel in campo magnetico variabile* [1]. Nota preliminare del prof. ERNESTO DRAGO, presentata dal Corrispondente A. BATTELLI.

1. Lo studio dello smorzamento delle oscillazioni dei corpi elastici costituisce un mezzo di sensibilità sovente grandissima per rivelare le modificazioni [2] fisico-chimiche interne che possono prodursi nella materia allo stato solido, ed è necessario di prendere in considerazione nella spiegazione dell'attrito interno non solo i fenomeni di agitazione molecolare, ma anche quelli d'orientazione molecolare che caratterizzano essenzialmente il magnetismo.

Brown [3] ha trovato che l'attrito interno di un filo di nickel ricotto aumenta in un campo magnetico costante crescente fino a 20 gauss, poi diminuisce, fino a prendere lo stesso valore che ha in campo magnetico nullo, in un campo di 80 gauss; e diventa dopo sempre più piccolo in campi magnetici costanti crescenti fino a 200 gauss.

Riguardo all'influenza del campo magnetico alternato lo stesso autore [4], ricordando le mie precedenti ricerche relative all'azione del campo magnetico alternato sulla rapidità di smorzamento delle oscillazioni torsionali di fili di ferro [5], ha fatto recentemente esperienze, mostrando che un campo magnetico alternato di 13 gauss diminuisce anche l'attrito interno di un filo di nickel ricotto sottoposto ad una carica di $0{,}5 \times 10^5$ gr. per cm.^{2}, e

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Catania diretto dal prof. G. P. Grimaldi.

[2] M. Guye, Journal de physique 1912, pag. 260.

[3] The scientific proceedings of the Royal Dublin Society, vol. XIII, aprile 1911, pag. 35.

[4] Idem. febbraio 1914, pag. 215.

[5] Nuovo Cimento, febbraio 1912, pag. 73.

la diminuzione aumenta con il crescere della frequenza da 20 fino a 100 per secondo, mentre il campo magnetico costante dello stesso valore aumenta l'attrito interno.

Avendo accresciuto la carica nel filo a 10^5 gr. per cm.^{2} ed il campo magnetico efficace a 17 gauss, Brown trovò una maggiore lentezza di smorzamento. Esperienze analoghe, fatte invece con un filo di nickel crudo, mostrarono nel campo magnetico alternato, e con frequenze comprese tra 20 e 140 per secondo, un aumento di attrito interno.

2. Con lo scopo di esaminare le variazioni di attrito interno dei fili di nickel in campi magnetici variabili ho eseguito molte ricerche adoperando la seguente disposizione sperimentale.

Un filo di nickel [1] ricotto avente il modulo di rigidità 815×10^9 [C. G. S.], lungo 20 cm. e del diametro di 0,3 mm. era sospeso, nella maniera già descritta in una mia precedente Memoria [2], in un solenoide costituito da un tubo di vetro del diametro esterno di mm. 14, su cui erano avvolte per la lunghezza di 34 cm., 234 spire di filo di rame isolato di 0,8 mm. di diametro. Il prodotto $4 \pi n$ risultava così eguale ad 86,5; la carica a cui il filo veniva sottoposto era gr. 218,6, ovvero poco più di $3{,}09 \times 10^5$ gr. per cm.^{2}, ed il campo magnetico che si poteva destare nel solenoide doveva considerarsi sensibilmente uniforme.

3. Si fecero quindi le prime esperienze creando nel solenoide predetto un campo magnetico costante di 173 gauss, soltanto al principio ed alla fine di ogni oscillazione semplice del filo di nickel, avendo cura di invertire la corrente magnetizzante in ciascuno di tali istanti. Il circuito della medesima veniva chiuso da un'asticella metallica recante ad uno degli estremi una grossa punta di platino, la quale sfiorava la superficie del mercurio contenuto in un pozzetto ad intervalli di 7 secondi, e cioè al principio ed alla fine di ogni oscillazione semplice del filo. Un motorino elettrico ed un sistema di puleggie convenientemente scelte regolava il movimento di rotazione della suddetta asta, ed un commutatore comandato a mano serviva ad invertire la corrente.

Le ampiezze d'oscillazione venivano lette con il solito metodo di scala e cannocchiale.

I risultati delle esperienze eseguite in tali condizioni sono consegnati nella seguente tabella I e mostrano *il grande smorzamento delle oscillazioni torsionali dei fili di nichel nel campo magnetico invertito ad intermittenza,* fenomeno già trovato da Tomlinson per i fili di ferro.

(1) Campioni di nichel e di ferro nichel mi furono preparati dalla Società francese del « ferro-nichel ».

(2) Nuovo Cimento, l. c.

TABELLA I.

Numero delle oscillazioni semplici	Ampiezza di oscillazioni in divisioni della scala con il	
	campo magnetico terrestre	campo magnetico invertito (173 gauss)
0	389	389
5	379	251
10	370	155
15	361	93
20	352	45

Mentre, infatti, dopo 20 oscillazioni semplici l'ampiezza si riduceva da 389 a 352 divisioni contate sulla scala, quando il filo oscillava nel campo magnetico terrestre, si riduceva invece a 45 divisioni quando agiva il predetto campo invertito di 173 gauss.

Avendo fatto analoghe esperienze con un filo di ferro dolce ricotto dello stesso diametro e della stessa lunghezza, avente lo stesso modulo di rigidità del predetto filo di nickel, e sottoposto con l'identica carica al medesimo campo magnetico, si ebbero i risultati consegnati nella seguente

TABELLA II.

Numero delle oscillazioni semplici	Ampiezza di oscillazione in divisioni della scala con il	
	campo magnetico terrestre	campo magnetico invertito (173 gauss)
0	390	390
5	382	344
10	374	300
15	366	264
20	358	230

Dal confronto fra le cifre delle due tabelle si vede che mentre dopo 20 oscillazioni semplici l'ampiezza si riduceva a circa $^1/_8$ del valore iniziale nel filo di nickel, non si riduceva nemmeno a metà del valore iniziale con il filo di ferro.

Se si rappresentano sull'asse delle ascisse i numeri delle oscillazioni semplici e sull'asse delle ordinate le ampiezze espresse in divisioni della

scala si ottengono con le cifre delle ultime colonne delle tabelle Iª e IIª i diagrammi della fig. 1.

Si vede quindi chiaramente che per causa del campo magnetico variabile, destato soltanto quando il filo presenta la massima deformazione elastica, *l'attrito interno del nickel nelle stesse condizioni diviene molto più grande di quello del ferro.*

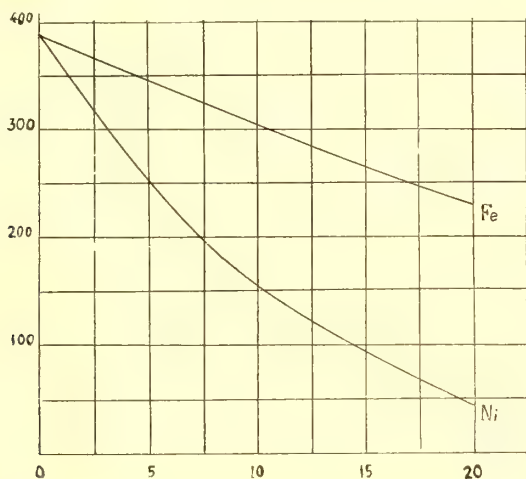



Fig. 1.

Facendo variare fra larghi limiti la durata d'oscillazione del sistema senza mutare la carica non si notò variazione alcuna nell'entità del fenomeno descritto.

4. Per esaminare le variazioni d'attrito interno del filo di nickel nel campo magnetico alternato, dappima si facevano le solite esperienze di prova per aspettare che il filo *nuovo* adoperato si accomodasse nello stato normale, e dopo si contava il numero di oscillazioni semplici comprese fra le divisioni 400 e 320 lette sulla scala e corrispondenti alle ampiezze angolari 13°40′ ed 11° rispettivamente. La corrente alternata a 46 periodi era fornita da una commutatrice, e le intensità di corrente erano misurate con un centiamperometro e con un amperometro di precisione, facendo esperienze con campi magnetici di varia intensità, e tali da non influenzare sensibilmente i risultati di misura con il poco calore che sviluppavano.

Si ebbero così i risultati consegnati nella seguente tabella III, ove nella 1ª colonna è contenuto il numero delle oscillazioni semplici eseguite dal sistema, nella 2ª colonna le ampiezze corrispondenti osservate in divisioni della scala quando il filo oscillava nel campo magnetico terrestre, e nelle successive colonne le ampiezze analoghe osservate quando il filo oscillava nel campo magnetico alternato.

TABELLA III.

Numero delle oscillazioni semplici	Ampiezze in divisioni della scala corrispondenti ai campi magnetici						
	terrestre	4,3 gauss	8,6 gauss	13,0 gauss	17,3 gauss	26,0 gauss	43,2 gauss
0	400	400	400	400	400	400	400
10	380	377	380	383	387	389	390
20	361	356	360	365	374	377	380
30	343	335	341	349	361	366	370
40	326	316	324	332	348	355	360
45	318	—	316	—	—	—	—
50	—	—	—	318	336	344	351
60	—	—	—	—	324	334	342
70	—	—	—	—	—	324	333
80	—	—	—	—	—	—	326
85	—	—	—	—	—	—	321

Se si rappresentano al solito sull'asse delle ascisse i numeri delle oscillazioni semplici e sull'asse delle ordinate le ampiezze espresse in divisioni della scala si ottengono con le cifre della tabella III i diagrammi

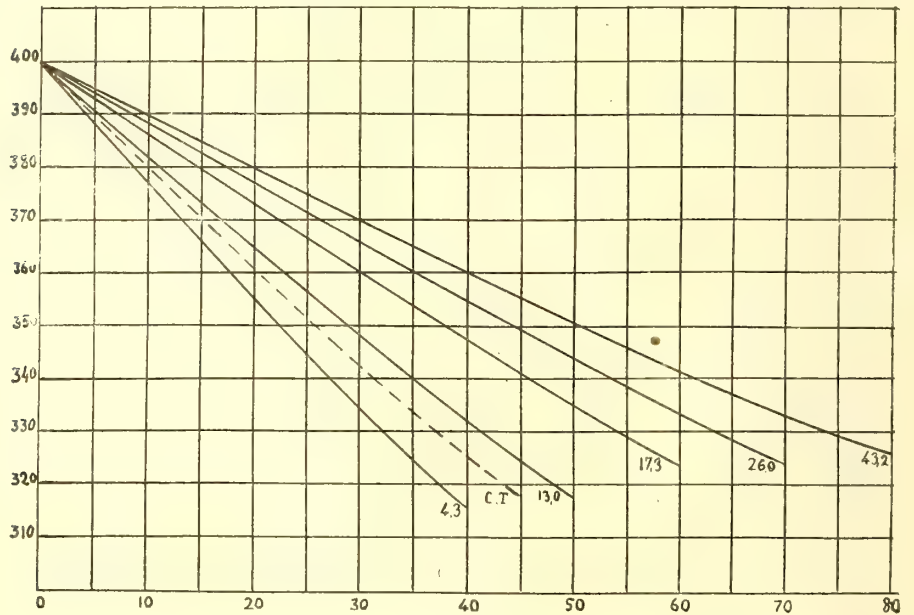



FIG. 2.

della figura 2, ove la curva segnata a tratti mostra l'andamento dello smorzamento delle oscillazioni torsionali del filo di nickel nel campo magnetico terrestre.

Essa risulterebbe molto vicina a quella che si potrebbe costruire con i valori che nella tabella predetta si riferiscono al campo efficace di 8,6 gauss.

Si vede dalla figura che *un campo alternato a 46 periodi e di circa 4 gauss rende massimo l'attrito interno di un filo di nickel ricotto, mentre un campo analogo e di circa 9 gauss ha soltanto lieve influenza sull'attrito interno e campi di valore superiore all'ultimo fanno invece diminuire l'attrito interno del filo predetto.*

5. Per studiare inoltre l'azione delle scariche oscillatorie sull'attrito interno del medesimo filo di nickel fu adoperato quasi identica disposizione sperimentale già descritta nella mia citata Memoria, e cioè si collegarono i poli del secondario di un rocchetto d'induzione con gli estremi dell'anzidetto solenoide magnetizzante e con un micrometro a scintilla le cui sfere d'ottone avevano il diametro di 19 mm.

In derivazione su tale circuito era disposto un condensatore costituito da bottiglie di Leyda e nel circuito della corrente alimentatrice del rocchetto, fornita da 48 accumulatori, si trovava un interruttore Wehnelt ed un elettrodinamometro che segnava 8 ampère.

Si ebbe cura di isolare nel miglior modo possibile il circuito di scarica mediante isolatori di paraffina, con la quale fu coperta la spirale magnetizzante.

La seguente tabella IV mostra i risultati che si ottenevano quando si faceva variare la capacità del circuito di scarica, mentre la distanza esplosiva fra le sfere del micrometro era mantenuta a mm. 0,40.

TABELLA IV.

Numero delle oscillazioni semplici	Ampiezze in divisioni della scala corrispondenti a			
	campo magnetico terrestre	campo oscillante con capacità in circuito		
		$27 \times 10^{-4} \mu.F$	$81 \times 10^{-4} \mu.F$	$162 \times 10^{-4} \mu.F$
0	400	400	400	400
10	381	368	387	389
20	362	336	375	379
30	344	308	362	368
40	327	—	350	358
50	—	—	338	348
60	—	—	327	338
70	—	—	—	329

Con le cifre riportate in questa tabella IV si sono costruiti i diagrammi della figura 3 in maniera analoga come per i diagrammi della figura 2.

Si vede così che *facendo crescere la capacità del circuito delle scariche oscillatorie da* 27×10^{-4} *a* $162 \times 10^{-4} \mu$. F *l'attrito interno del filo di nickel ricotto da un valore più grande di quello posseduto nel campo magnetico terrestre va gradatamente diminuendo fino a conseguire un valore più piccolo di quello posseduto nel campo magnetico terrestre.*

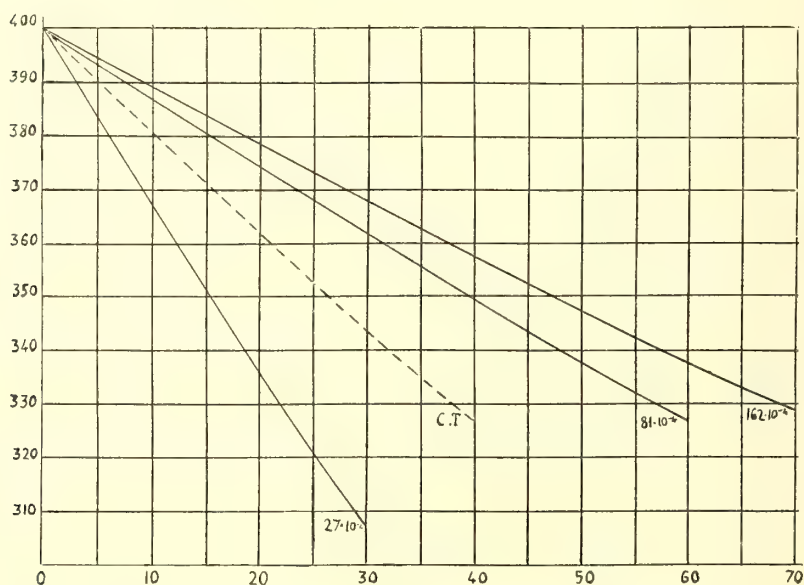



Fig. 3.

6. Altre ricerche furono fatte mantenendo costante la capacità del circuito delle scariche oscillatorie a $27 \times 10^{-4} \mu$. F e facendo variare soltanto la distanza esplosiva tra le sfere del micrometro da mm. 0,20 a mm. 1,20, avendo cura di pulire accuratamente con carta a smeriglio le suddette sfere dopo ogni esperienza.

I risultati ottenuti in tal modo sono consegnati nella seguente tabella V e rappresentati mediante diagrammi forniscono un fascio di curve simili a quelle ottenute con i campi alternati e disegnati nella figura 1.

Il campo magnetico così generato dalle scariche oscillatorie si aggirava intorno a 2 gauss [1] in tutte le serie di ricerche.

[1] Per la determinazione esatta di tale campo saranno fatte nuove misure quando avrò a mia disposizione gli apparecchi necessarii già commissionati.

TABELLA V.

Numero delle oscillazioni semplici	Ampiezze in divisioni della scala corrispondenti a						
	campo magnetico terrestre	campo oscillante, distanza in mm. fra le sfere del micrometro					
		0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20
0	400	400	400	400	400	400	400
10	380	370	374	381	387	388	390
20	360	343	348	363	373	377	379
30	342	320	325	343	360	365	369
40	326	—	—	326	346	353	359
45	318	—	—	316	—	—	—
50	—	—	—	—	333	340	349
60	—	—	—	—	319	328	341
65	—	—	—	—	—	322	—
70	—	—	—	—	—	—	331
80	—	—	—	—	—	—	322
85	—	—	—	—	—	—	319

Dalle cifre riportate in questa tabella V si vede *che per azione delle scariche oscillatorie e per distanze esplosive fra le sfere del micrometro a scintilla inferiori a mm. 0,60, l'attrito interno del filo di nickel ricotto è maggiore che nel campo magnetico terrestre, mentre con distanze esplosive superiori a mm. 0,60 è minore.*

Il lieve aumento di temperatura determinato dalle scariche oscillatorie non influenzava sensibilmente l'andamento dei fenomeni descritti.

7. Le variazioni d'attrito interno da me trovate per il nickel in campi magnetici variabili prodotti da correnti invertite ad intermittenza, da correnti alternate e da scariche oscillatorie sono certamente da mettersi in relazione con quelle già da me osservate nei fili di ferro, e specialmente gli aumenti e le diminuzioni osservate con le scariche oscillatorie possono dipendere dallo smorzamento di queste.

È noto come sul decremento totale delle oscillazioni di un circuito di scarica abbiano influenza cause diverse, fra cui la resistenza di scintilla che per deboli distanze esplosive sembra crescere con il diminuire della sua lunghezza; mentre, d'altra parte, sembra diminuire quando la capacità del circuito di scarica aumenta [1].

Ma per poter tirare conclusioni sicure confortate dai risultati sperimentali senza perdersi nel campo delle ipotesi, bisogna che io esaurisca altre

[1] Phys. Zeitschr. VIII, 1907, pag. 494; e Zenneck, Précis de Télégraphie sans fil, 1911, pag. 20 (Gauthier-Villars, Paris).

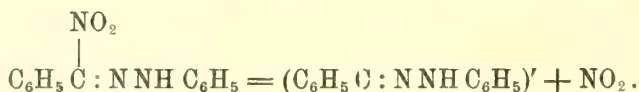
ricerche in corso, le quali potranno forse decidere se esiste una relazione tra lo smorzamento delle scariche oscillatorie e quello delle oscillazioni dovute all'elasticità, e potranno forse dare ragione delle opposte variazioni di attrito interno che si verificano nei campi magnetici alternati.

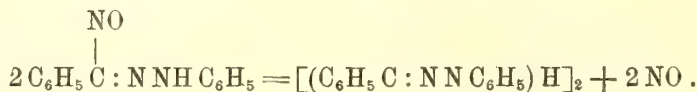
Intanto io ho eseguito esperienze analoghe a tutte quelle descritte nel presente lavoro, adoperando un filo di nickel crudo avente il modulo di rigidità 825×10^9 (C. G. S.) e non ho trovato in alcun caso diminuzioni di attrito interno nel campo magnetico variabile, ma sempre *aumenti*.

In questo genere di ricerche non deve sorprendere tale variazione nell'andamento dei fenomeni in esame per il lieve aumento di rigidità, ed in effetti anche Brown [1] ha trovato che facendo crescere la rigidità di un filo di nickel da 790×10^6 gr. per cm.^{2} ad 800×10^6 gr. per cm.^{2} non aveva più nel filo alcuna traccia di fatica.

Chimica. — *Sulla preparazione e sulla scomposizione del fenilidrazone dell'aldeide fenilnitroformica* [2]. Nota di R. Ciusa e G. Benelli, presentata dal Socio G. Ciamician [3].

In una Nota precedente [4] fu accennato alla proprietà del fenilidrazone dell'aldeide fenilnitroformica I di eliminare ipoazotide per riscaldamento:

$$\overset{\displaystyle NO_2}{\overset{|}{C_6H_5\,C}} : N\,NH\,C_6H_5 = (C_6H_5\,C : N\,NH\,C_6H_5)' + NO_2\,.$$

Tale contegno trova un riscontro immediato nella scomposizione che subiscono i nitroso-derivati corrispondenti: per riscaldamento del nitroso-fenilidrazone dell'aldeide *m*-nitrobenzoica si ha eliminazione di ossido d'azoto [5]

$$2\,\overset{\displaystyle NO}{\overset{|}{C_6H_5\,C}} : N\,NH\,C_6H_5 = [(C_6H_5\,C : N\,N\,C_6H_5)\,H]_2 + 2\,NO\,.$$

E. Bamberger anzi, si serve di questa reazione per spiegare il meccanismo dell'ossidazione degli idrazoni mediante l'acido nitroso.

La scomposizione del nitro- e nitrosoidrazone ricorda assai da vicino

[1] *The scientific Proceedings of the royal Dublin Society*, vol. XIV, n. 26, 1915, pag. 336.

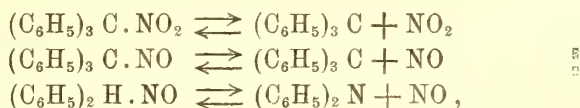
[2] Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Bologna.

[3] Pervenuta all'Accademia il 3 luglio 1915.

[4] R. Ciusa e B. Toschi, questi Rendiconti, XXII, 2°, pag. 489.

[5] E. Bamberger e W. Pemsel, Berichte *36*, 161; 347.

la scomposizione analoga che subiscono il trifenilnitrometano, il trifenilnitrosometano e la nitrosodifenilamina:

$$(C_6H_5)_3\,C.NO_2 \rightleftarrows (C_6H_5)_3\,C + NO_2$$
$$(C_6H_5)_3\,C.NO \rightleftarrows (C_6H_5)_3\,C + NO$$
$$(C_6H_5)_2\,H.NO \rightleftarrows (C_6H_5)_2\,N + NO\,,$$

e i prodotti di ossidazione degli idrazoni mette in relazione coll'esafeniletano, e colla tetrafenilidrazina. Ciò fu messo in evidenza assai bene da uno di noi in una Nota precedente [1].

Lo studio della scomposizione del nitroidrazone è stato perciò ripreso, ed in questa Nota ne comunichiamo i risultati.

Avendo avuto occasione di preparare grandi quantità del fenilidrazone dell'aldeide fenilnitroformica, abbiamo potuto studiare anche i prodotti secondarî della reazione fra benzalfenilidrazone ed ipoazotide: lo studio di tali prodotti forma pure oggetto di questa Nota.

Dopo varî tentativi, ci siamo convinti che il migliore modo per studiare la scomposizione del nitroidrazone consiste nello scaldare a ricadere una soluzione di nitroidrazone, perfettamente secco, in xilolo seccato sul sodio, facilitando l'eliminazione del biossido d'azoto mediante una corrente di azoto secco. Dopo alcuni minuti comincia lo svolgimento del biossido d'azoto. Per misurare la quantità di NO_2 svoltosi, si fa gorgogliare il gas attraverso due bottiglie di lavaggio contenenti la quantità di permanganato sufficiente per ossidare tutta l'ipoazotide teoricamente sviluppabile; e l'acido nitrico formatosi si dosa gravimetricamente col metodo di M. Busch.

La quantità di NO_2 che si svolge non è costante: assai facilmente dipende dalla rapidità del riscaldamento, del passaggio dell'azoto e dalla umidità presente:

NO_2 trovato per 100 1) 45,3 2) 35,9.

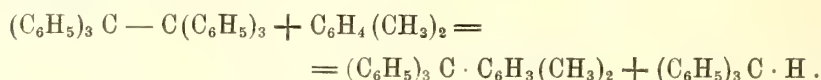
Dalla soluzione xilolica fatta raffreddare in corrente di azoto si separa una sostanza incolora, fondente a 170°, della formula $C_{21}H_{19}O_2N_3$:

$C_{21}H_{19}O_2N_3$	Calcolato	C: 73,03 ;	H: 5,50 ;	N: 12,17
	Trovato	» 72,75	» 5,88	» 12,40.

Sostanza bianca che cristallizza dallo xilolo sotto forma di aghetti assai solubili in alcool.

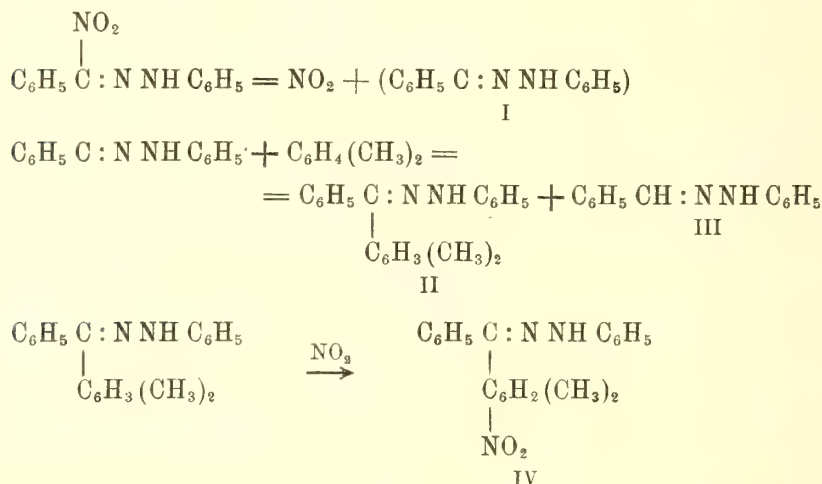
(1) R. Ciusa e B. Toschi (loc. cit.).

La costituzione di tale composto si può intendere assai bene ricordando che per scomposizione dell'esafeniletano in xilolo bollente si ottiene xililtrifenilmetano e trifenilmetano

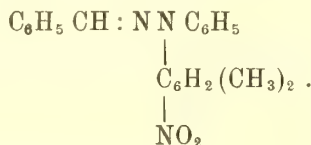
$$(C_6H_5)_3C - C(C_6H_5)_3 + C_6H_4(CH_3)_2 =$$
$$= (C_6H_5)_3C \cdot C_6H_3(CH_3)_2 + (C_6H_5)_3C \cdot H .$$

Nel nostro caso avviene un processo analogo: il resto idrazonico I, che si ha in un primo tempo, reagisce successivamente con lo xilolo, e con una parte dell'NO_2 formatosi, così che alla sostanza $C_{21}H_{19}O_3N_2$ potrebbe essere assegnata la costituzione data dalla formula IV:

$$C_6H_5\underset{}{\overset{NO_2}{\overset{|}{C}}}:N\,NH\,C_6H_5 = NO_2 + \underset{I}{(C_6H_5\,C:N\,NH\,C_6H_5)}$$

$$C_6H_5\,C:N\,NH\,C_6H_5 + C_6H_4(CH_3)_2 =$$
$$= \underset{II}{C_6H_5\,\underset{C_6H_3(CH_3)_2}{\underset{|}{C}}:N\,NH\,C_6H_5} + \underset{III}{C_6H_5\,CH:N\,NH\,C_6H_5}$$

$$C_6H_5\,\underset{C_6H_3(CH_3)_2}{\underset{|}{C}}:N\,NH\,C_6H_5 \xrightarrow{NO_2} \underset{IV}{C_6H_5\,\underset{\underset{NO_2}{\underset{|}{C_6H_2(CH_3)_2}}}{\underset{|}{C}}:N\,NH\,C_6H_5}$$

Per concentrazione delle acque madri, si può isolare una magnifica sostanza rossa, fondente a 195°; assai facilmente in questa sostanza, che non fu potuta analizzare per la piccola quantità avutane, bisognerà ricercare il prodotto della reazione tra l'idrazone III, non isolato, e corrispondente al trifenilmetano nella reazione analoga del trifenilmetile, ed una parte dell'NO_2 ([1]).

Per la sostanza $C_{21}H_{19}O_2N_3$ si potrebbe anche prendere in considerazione la formula

$$C_6H_5\,CH:N\,\underset{\underset{NO_2}{\underset{|}{C_6H_2(CH_3)_2}}}{\underset{|}{N}}\,C_6H_5 .$$

([1]) Il *p*-nitrofenilidrazone del benzaldeide fonde a 194°, e dalla sostanza fondente a 195° differisce per la sua maggiore solubilità in alcool, e per il fatto che esiste in tre modificazioni cromoisomere. Degli altri nitroidrazoni — 7 isomeri, senza tener conto delle isomerie derivanti dal doppio legame azometinico — nessuno ha un punto di fusione che si avvicina a 195° (vedi più avanti).

Dalla sostanza fondente a 170° si ha però, per idrolisi con acido solforico, fenilidrazina, e non aldeide benzoica: ciò sta in accordo colla formula IV.

Nella preparazione del fenilidrazone dell'aldeide fenilnitroformica col metodo trovato da uno di noi (Ciusa) (¹) — azione dell'ipoazotide sulla soluzione eterea del benzalidrazone — è stata già fatta notare la formazione del nitrato di diazobenzolo, e del dibenzaldifenilidrotetrazone. Queste due sostanze si separano assai bene dal miscuglio della reazione per filtrazione: l'idrotetrazone si libera dal nitrato di diazobenzolo per lavaggio con acqua, e si cristallizza poi da un miscuglio di benzolo ed alcool. L'aspetto, il punto di fusione ed i numeri avuti all'analisi corrispondono con quelli richiesti dal dibenzoldifenilidrotetrazone

$C_{26}H_{22}N_4$	Calcolato	C 80,00	H 5,64	N 14,4
	Trovato	» 79,35	» 6,07	» 14,75.

Si scioglie in acido solforico concentrato, con colorazione azzurra. Per distillazione dell'etere, rimane una sostanza rossa che si stempera prima con alcool, e poi si fa cristallizzare da un miscuglio di benzolo e alcool. Si ottiene così una sostanza formata in massima parte dal prodotto principale della reazione — fenilidrazone dell'aldeide fenilnitroformica — fondente a 102-103°. Per separarlo dai prodotti secondarî, si fa digerire il tutto con potassa al 10 %. Rimane indisciolta una sostanza rossa, fondente a 183°; cristallizza dal benzolo ed alcool, sotto forma di aghetti rosso-scuri. Questa sostanza fu ottenuta da E. Bamberger per i prodotti secondarî dell'ossidazione del benzalidrazone con nitrito d'amile (²): Bamberger non dà altro che i numeri ottenuti all'analisi, ed il punto di fusione.

All'analisi si hanno dei numeri che concordano con quelli richiesti dalla formula $C_{28}H_{26}O_3N_6$:

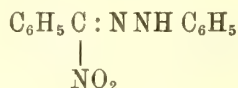
$C_{28}H_{26}O_3N_6$ Calcolato	C 68,01	H 5,26	N 17,00	p. m. 494
(Bamberger) Trovato	» 67,90	» 5,38	» 16,86	
»	» 68,09	» 4,98	» 17,00	» 493 (³).

Aghetti rossi fondenti a 183° (Bamberger dà 182-188°); poco solubile a freddo nei diversi solventi, insolubile negli alcali e negli acidi. In acido solforico concentrato si scioglie con colorazione bleu-scura.

Dalla soluzione alcalina, per aggiunta di un acido, o ,meglio, facendovi gorgogliare una corrente di anidride carbonica, precipita una sostanza rosso-

(¹) Questi Rendiconti, XVII, 844.
(²) Berichte, XXXVI, 84.
(³) Ebullioscopia in benzolo.

mattone, e formata quasi completamente dalla sostanza principale, e fondente a 102°. Se però la sostanza così ottenuta si fa digerire con alcool metilico, si estrae una sostanza fondente a 135°, mentre il nitroidrazone

$$\begin{array}{l} C_6H_5\,C : NNH\,C_6H_5 \\ \quad\ \ | \\ \quad NO_2 \end{array}$$

rimane indisciolto.

All'analisi, la sostanza, fondente a 135°, dà numeri che corrispondono a quelli richiesti dalla formula $C_{13}H_{11}O_2N_3$:

$C_{13}H_{11}O_2N_3$ Calcolato	C 64,73	H 4,57	N 17,43	p. m.	241
Trovato	» 64,42	» 4,74	» 17,68	»	238 (1).

Questa sostanza fonde, come si disse, a 135°, e si presenta sotto forma di aghetti rossi, lunghi, setacei; si scioglie assai bene in alcool metilico caldo, in benzolo, in cloroformio ed in alcool bollente; è insolubile in acqua ed in ligroina. Si scioglie in acido solforico, con colorazione verde. È solubile negli alcali. I numeri avuti portano alla formula $C_{13}H_{11}O_2N_3$; si tratta quindi di un isomero del nitroidrazone, fondente a 102-103°.

Dei 7 nitroidrazoni noti (2), nessuno ha un punto di fusione che si avvicini a 135°. Inoltre la solubilità della sostanza stessa negli alcali diluiti elimina immediatamente la possibilità che si tratti di un isomero nello spazio dei tre fenilidrazoni delle tre nitrobenzaldeidi, e dell' *m*-nitrofenilidrazone dell'aldeide benzoica.

L'*o*-nitrofenilidrazone dell'aldeide benzoica esiste in due modificazioni (3) cromoisomere, ben differenti dalla sostanza fondente a 135°; il *p*-nitrofenilidrazone dell'aldeide benzoica esiste invece in tre modificazioni (4) cromoisomere, nessuna delle quali è identica alla sostanza in questione.

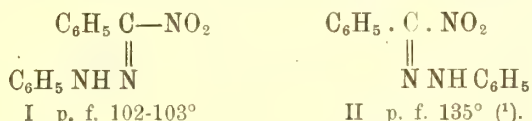
Rimane la possibilità che si tratti di un isomero nello spazio del nitroidrazone, fondente a 102-103°. Qualunque tentativo però per trasformare la sostanza fondente a 135° in quella fondente a 102-103°, non ha condotto ad alcun risultato positivo.

(1) Ebullioscopia in benzolo.

(2) I fenilidrazoni delle aldeidi *o*-, *m*-, e *p*-nitrobenzoica fondono rispettivamente a 157°, 121°, e 160°; l'*o*-nitro-, *m*-nitro- e *p*-nitrofenilidrazone dell'aldeide benzoica fondono rispettivamente a 187°, 118°, 194°. Il fenilidrazone dell'aldeide fenilnitroformica fonde, come si disse ripetutamente, a 102-103°.

(3) Non ancora pubblicate.

(4) Questi Rendiconti, XXII, 2° sem.

Assegnando al nitroidrazone fondente a 102° la formola I, per la sostanza fondente a 135° rimane la costituzione dalla formula II:

Nell'alcool in cui si stempera il prodotto della reazione fra ipoazotide e benzalidrazone, si riesce ad isolare una piccola quantità di una sostanza fondente a 202-204°. Questa sostanza si presenta sotto forma di aghetti giallognoli. Con tutta probabilità si tratta della tetrafeniltetrazolina ottenuta da E. Bamberger per ossidazione del benzalfenilidrazone: data la piccola quantità avutane, non si potè analizzare.

Riassumendo per azione dell'ipoazotide sulla soluzione eterea del benzalidrazone si hanno i seguenti prodotti:

1) fenilidrazone dell'aldeide fenilnitroformica (prodotto principale della reazione): $C_{13}H_{11}O_2N_3$;

2) nitrato di diazobenzolo;

3) dibenzaldifenilidrotetrazone: $C_{26}H_{22}N_4$;

4) isomero della sostanza fondamentale, fondente a 135°: $C_{18}H_{11}O_2N_3$;

5) sostanza fondente a 183°: $C_{28}H_{26}O_3N_6$;

6) sostanza fondente a 202-204° (tetrazolina?).

Chimica. — *Ricerche intorno a sostanze aromatiche contenenti iodio plurivalente. (Di alcuni composti particolari ottenuti nella reazione di Sandmeyer, applicati a derivata della naftalina)* [2]. Nota X di L. Mascarelli e G. Martinelli, presentata dal Socio G. Ciamician [3].

Durante le ricerche sulla tendenza dei derivati dinaftilici a formare nuclei pentaatomici contenenti un atomo di iodio plurivalente [4], avemmo bisogno di trasformare in iododerivato molta α-nitro-β-naftilamina. L'α-nitro-

[1] Non si capisce però come dalla soluzione alcalina si ottenga sempre, per azione degli acidi, lo pseudoacido di partenza, e non un miscuglio. Questo caso di isomeria merita perciò uno studio ulteriore.

[2] Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica farmaceutica della R. Università di Cagliari.

[3] Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1915.

[4] L. Mascarelli e G. Brusa, Rendic. R. Accad. Lincei, 1913, II, 494; e Gazz. ch. ital., 1914, I, 549. L. Mascarelli e M. Negri, Rend. R. Accad. Lincei, 1913, II, 498; e Gazz. ch. ital., 1914, I, 556.

β-iodionaftalina era già stata preparata da Meldola ([1]) e più tardi da Vesely ([2]): essa fonde a 88°,5.

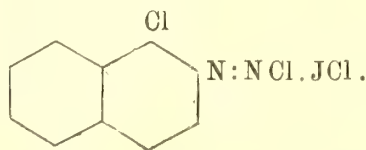
Noi abbiamo voluto compiere la reazione diazoica sulla α-nitro-β-naftilamina operando in soluzione cloridrica, anzichè in presenza di acido solforico, come fece Meldola, per ovviare all' inconveniente derivante dalla insolubilità del solfato corrispondente, e così abbreviare l'operazione ed accrescerne il rendimento. Così facendo non abbiamo trovato, nel prodotto finale di scomposizione con ioduro potassico, la α-nitro-β-iodionaftalina, ma abbiamo invece isolato due sostanze.

L'una è solubile in etere, alcool e negli ordinarî solventi organici: contiene iodio; però, anche dopo ripetute cristallizzazioni, il suo punto di fusione non si elevò sopra 83-84°. L'analisi dimostrò che non contiene azoto, ma che gli corrisponde la $C_{10}H_6ClJ$. Pel suo modo di formazione e per quanto vedremo, noi riteniamo che si tratti, con ogni verosimiglianza, di α-cloro-β-iodionaftalina, sebbene non abbiamo potuto confrontare le sue proprietà, perchè tale composto non è descritto nella letteratura e noi non abbiamo ancora avuto tempo di prepararlo per altra via.

L'altro prodotto invece, pur contenendo iodio, non presenta i caratteri degli iodioderivati organici. Esso è costituito da una polvere gialla, insolubile in etere, alcool, acqua; si decompone facilmente a contatto con acqua, specie a caldo, con sviluppo abbondante di gas; si scioglie a caldo, e senza decomposizione, nelle soluzioni acquose di cloruro di sodio e di acido cloridrico, da cui poi cristallizza in belle scagliette giallo-oro e fondenti, con decomposizione a 146-148°. La sua composizione centesimale corrisponde alla $C_{10}H_6N_2Cl_3J$. Dal suo contegno si può arguire, che esso contiene ancora intatto il gruppo diazoico.

In un brevetto di Froehlich ([3]) trovammo che i derivati diazoici sono in grado di formare composti doppî col monocloruro di iodio, i quali hanno tutte le proprietà del nostro prodotto fondente a 146-148°. La mancanza del gruppo nitrico in tale prodotto ci fa pensare ad una probabile sua sostituzione mediante il cloro, per cui non esitiamo ad assegnar ad esso la formula:

Cl

N:NCl.JCl.

Sarà ancora forse necessario di stabilire la vera posizione dei due gruppi sostituenti.

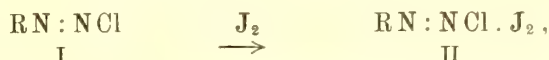
([1]) Journ. chem. Soc. London, *47*, 520 (1885).

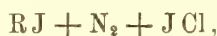
([2]) Ber. d. d. Ch. Ges., *38*, 138 (1905).

([3]) D. R. P. 87970; Chem. Centralbl. 1896, II, 1069.

Gli studî di Hantzsch (1) sui diazoperaloidi ci dànno modo di interpretare come, nelle nostre condizioni, si possa formare l'aggruppamento — N:NCl.JCl.

Il cloruro del diazoderivato I, a contatto con lo iodio, che abbondante si libera nell'aggiunta dello ioduro potassico, tende a formare il prodotto II:

$$\underset{\text{I}}{RN:NCl} \xrightarrow{J_2} \underset{\text{II}}{RN:NCl.J_2},$$

il quale tosto si scompone in

$$RJ + N_2 + JCl,$$

così che quest'ultimo può reagire coll'eccesso di I per dare

$$RN:NCl + JCl = R.N:NCl.JCl.$$

Nel caso nostro è da prendersi inoltre in considerazione la sostituzione del gruppo nitrico col cloro. Essa avviene, con tutta probabilità, per l'azione del monocloruro di iodio, che si genera nel liquido della reazione o da quello che sta legato al gruppo diazoico. Sappiamo che i derivati peralogenati dei composti diazoici hanno tendenza a perdere l'alogeno e ad agire da alogenanti (2); ma non è a nostra conoscenza che l'alogeno vada a sostituire altro gruppo: e già Hantzsch (3) ha osservato che « die Halogene tauschen sich also in Trihalogen-Complex sehr leicht gegenseitig aus, treten aber auch in noch so grossen Ueberschuss angewandt nie in den Benzolkern des Benzoldiazoniums ein ». Infatti egli (4) ottenne dalla *p*-nitroanilina il relativo derivato diazoico, che somma anch'esso JCl senza alterarsi. Nè la vicinanza del gruppo — N:NCl.JCl al gruppo nitrico, nel nostro caso, può avere gran valore, perchè Ulhmann (5) ebbe a preparare l'*o*-iodio-nitrobenzolo dall'*o*-nitroanilina; e Haeussermann e Teichmann, poco prima, ottennero l'*o*-cloronitrobenzolo dall'*o*-nitroanilina (6).

I derivati nitrici del benzolo però resistono all'azione del monocloruro di iodio, come risulta, fra l'altro, dalla preparazione dell'*o*-iodio-*p*-nitroanilina, fatta da Willgerodt (7) per azione del monocloruro di iodio sulla *p*-nitroanilina. Del resto sappiamo, da lungo tempo, che il monocloruro di iodio agisce sulle aniline sostituite (*m*-nitroanilina, *p*-nitroanilina, *p*-tolui

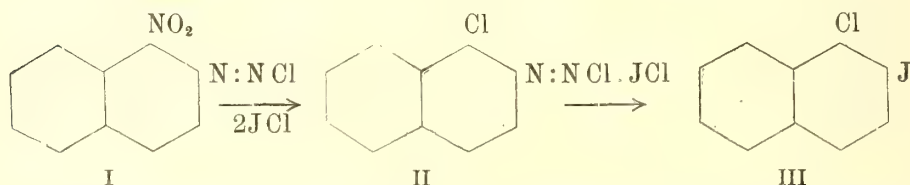
(1) Ber. d. d. chem. Ges., *28*, 2754 (1895).
(2) Bülcw, Schmachtenberg, Ber. d. d. chem. Ges., *41*, 2607 (1908).
(3) loc. cit., 2762.
(4) loc. cit., 2761.
(5) Ber. d. d. chem. Ges., *29*, 1880 (1896).
(6) Ber. d. d. chem. Ges., *29*, 1447 nota (1896).
(7) Ber. d. d. chem. Ges., *34*, 3344 (1901).

dina, ecc.) (1) iodurando nel nucleo, ma in nessun caso sostituendo cloro a radicali presenti. Tuttavia nella serie naftalica i gruppi sostituenti possono avere una certa mobilità rispetto a quelli della serie benzolica; e noi riteniamo che il cloro nascente (dalla scomposizione del monoioduro) possa staccare il nitrogruppo e sostituirvisi, precisamente come avviene quando si scaldano i nitroderivati della naftalina con pentacloruro di fosforo (2). A conferma di tale mobilità citiamo la recente osservazione di Friedlaender e Litner (3) i quali, bollendo con barite il nitrile dell'acido 1-nitro-2-naftoico, ottennero il derivato che contiene l'ossidrile in luogo del nitrogruppo.

Abbiamo confermato la nostra supposizione facendo agire una soluzione di monocloruro di iodio sopra il cloruro di β-diazo-α-nitronaftalina. Ottenemmo così direttamente il prodotto fondente a 146-148°, con tutte le proprietà di quello preparato prima: una miscela dei due conserva lo stesso punto di fusione; l'analisi ha dato i valori richiesti per la $C_{10}H_6N_2Cl_3J$.

Possiamo quindi concludere che nel liquido della reazione si forma cloro nascente, il quale in tale stato, oppure dopo essersi legato allo iodio, agisce sostituendo il gruppo nitrico; contemporaneamente il monocloruro di iodio si somma al gruppo diazoico:

NO_2 ... N:NCl $\xrightarrow[2JCl]{}$ Cl ... N:NCl.JCl $\longrightarrow$ Cl ... J

I — II — III

Naturalmente, la formazione di cloro-iodionaftalina deriva dalla scomposizione del prodotto di somma II: o meglio, perchè questo è stabile a bassa temperatura, dalla mancanza di sufficiente quantità di cloruro di iodio, per modo che l'eccesso di composto diazoico, che non può trasformarsi in sale doppio, si decompone normalmente secondo la reazione di Sandmeyer.

Abbiamo in corso esperienze sul contegno dei varî derivati della naftalina col monocloruro di iodio le quali ci fanno sperare di poter presto ritornare su questo argomento.

Parte sperimentale.

Applicazione della reazione diazoica alla α-nitro-β-naftilamina, e successivo trattamento con ioduro potassico. — Vennero sospesi gr. 50 di sostanza in 250 cc. di acido cloridrico ($d = 1.19$); si aggiunsero 500 cc. d'acqua, la quale fa precipitare, finamente suddivisa, la maggior parte dell'α-nitro-β-

(1) Michael e Norton, Ber. d. d. chem. Ges., *11*, 113 (1878).

(2) De Koninck e Marquardt, 1872 Ved. anche Atterberg, Ber. d. d. chem. Ges., *9*, 1187, 1732 (1876); *10*, 1843 (1877).

(3) Ber. d. d. chem. Ges., *48*, 331 (1915).

naftilamina; e si portò a 0°. Lentamente si aggiunsero gr. 17 di nitrito sodico sciolti in 200 cc. d'acqua: il liquido rosso-bruno fu versato in una soluzione di gr. 41 di ioduro potassico in 200 cc. d'acqua; si decolorò con anidride solforosa; si lasciò in riposo una notte. La polvere cristallina gialla venne raccolta e lavata con etere e con acqua a freddo. Essa si scioglie con acido cloridrico, nelle soluzioni di cloruro di sodio, nell'alcool: con quest'ultimo si scompone alla ebollizione. Pura, è in squamette di un bel color oro splendente (dall'acido cloridrico non troppo diluito); fonde a 146-148°, scomponendosi.

L'analisi diede valori corrispondenti a la $C_{10}H_6N_2Cl_3J$:

	Calcolato per %	Trovato	
C	30.98	31.19	31.29
H	1.56	2.09	1.88
N	7.25	7.25	7.29
Cl	27.46	27.10	—
J	32.75	31.95	—
Cl + J	60.21	58.95	59.21

La sostanza, bollita con acqua o con alcool, si scompone svolgendo gas e liberando iodio, mentre si forma un prodotto oleoso semisolido nerastro, solubile in etere, che però non venne ancora esaminato. La stessa decomposizione si ha mantenendo a lungo sotto acqua la sostanza, oppure lasciandola a contatto con alcali anche diluiti.

L'etere, che servì a lavare il prodotto precedente e quello con cui si estrasse il liquido della reazione, dopo che venne separata la parte solida, fu lavato con alcali, con acqua, seccato con cloruro di calcio, ed evaporato. Il residuo solido, cristallizzato dall'alcool, previa decolorazione con carbone animale, è in prismetti bianchi fondenti a 83-84°. L'analisi dimostrò trattarsi di una cloro-iodio-naftalina:

	Calcolato per % $C_{10}H_6ClJ$	Trovato	
C	41.60	41.13	41.45
H	2.10	2.48	2.24
Cl + J	56.30	57.01	56.89

Azione del monocloruro di iodio sul cloruro di β-diazo-α-nitro-naftalina. — Grammi 5 di α-nitro-β-naftatilamina vennero, nel solito modo e in soluzione cloridrica, trattati con nitrito sodico: nella soluzione rosso-bruna del cloruro di diazonitronaftalina si versò a gocce una soluzione di monocloruro di iodio, preparata secondo le indicazioni di Bigot [1]. Precipitò una

[1] Ann. de chemie et physique (6) *22*, 464 (1891).

polvere cristallina gialla: raccolta e lavata con acido cloridrico, venne da questo solvente ricristallizzata. Squame giallo-oro, fondenti con decomposizione a 148-149°. Ha tutte le proprietà del prodotto ottenuto nell'operazione precedente. Il punto di fusione, più elevato, deve attribuirsi al fatto che per tal modo si ottiene facilmente pura. La miscela a parti eguali dei due prodotti fonde alla stessa temperatura.

All'analisi si ebbero i risultati seguenti:

	Calcolato per % $C_{10}H_6N_2Cl_3J$	Trovato
C	30.98	31.45
H	1.56	1.87
N	7.25	7.71
Cl + J	60.21	59.69

Abbiamo notato, come già altra volta a proposito di derivati alogenati della naftalina, che tutte queste sostanze bruciano stentatamente ed hanno la tendenza a distillare anche nella canna a combustione. Specialmente la ossidazione con acido nitrico, nella esecuzione del metodo Carius, è lenta: occorre scaldare in tubo chiuso per tre giorni per avere dati attendibili.

Chimica. — *Sulla isomeria degli acidi erucico, brassidinico, isoerucico. (Del loro contegno crioscopico reciproco)* [1]. Nota III di L. Mascarelli e G. Sanna, presentata dal Socio G. Ciamician [2].

Nella Nota II [3] pubblicammo i risultati avuti pel contegno crioscopico dei tre acidi *erucico, brassidinico, isoerucico*, quando vengano sciolti nell'acido saturo corrispondente, il *behenico*.

In questa Nota riassumiamo il contegno crioscopico degli stessi tre acidi, quando vengano sciolti reciprocamente l'uno nell'altro, ed inoltre il comportamento dell'acido behenico, quando esso sia sciolto nei tre acidi suddetti.

Tale studio poteva recarci nuovi dati per chiarire questo particolare caso di isomeria. I risultati ottenuti confermano sempre più quanto abbiamo supposto nella Nota II, cioè che, « ammessa la stessa posizione del doppio legame in tutti e tre gli acidi, due possono avere configurazione simile, l'altro deve averla diversa ».

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica farmaceutica della R. Università di Cagliari.

[2] Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1915.

[3] Rend. R. Acc. Lincei *23*, II, 586 (1914); e Gazz. chim. ital. *45*, I, 313 (1915).

Allora già eravamo propensi a credere che all'acido erucico spettasse la configurazione *cis*, perchè esso non si scioglie allo stato solido nel behenico, e che agli acidi brassidinico ed isoerucico convenisse la configurazione *trans*, perchè entrambi dànno soluzioni solide col behenico. Ora siccome si sa (e lo proveremo con nuove ricerche che abbiamo in corso) che le sostanze sature a catena aperta dànno cristalli misti con la forma più stabile (*trans*) del corrispondente composto etilenico, e non con quella meno stabile (*cis*), così si poteva prevedere che:

l'acido behenico non si scioglie, allo stato solido, nell'erucico;

l'acido behenico si scioglie, allo stato solido, nel brassidinico e nell'isoerucico.

Infatti così avviene, come lo dimostra lo specchio seguente, che raccoglie in riassunto i risultati della presente Nota.

	Acido					
	Acido	brassidinico	è crioscopicamente normale		in acido	erucico
	"	isoerucico	"	"	"	"
	"	behenico	"	"	"	"
	"	erucico	"	"	"	brassidinico
	"	isoerucico	"	anormale	"	"
	"	behenico	è anormale (lievemente)		"	"
	"	erucico	è crioscopicamente normale		"	isoerucico
	"	brassidinico	è anormale (spiccatamente)		"	"
	"	behenico	è crioscopicamente anormale		"	"
(1)	"	erucico	è crioscopicamente normale		"	behenico
(1)	"	brassidinico	"	anormale	"	"
(1)	"	isoerucico	"	"	"	"

Dunque l'acido behenico ha peso molecolare normale se sciolto in acido erucico; ha peso molecolare lievemente anomalo (maggiore del teorico) in acido brassidinico; è decisamente anomalo in acido isoerucico. Inoltre gli acidi brassidinico ed isoerucico sono reciprocamente e spiccatamente anomali.

Noi non abbiamo tentato misure dirette a stabilire la concentrazione delle varie soluzioni solide, seguendo il processo di van Bijlert, parendoci assai malagevole l'applicazione del procedimento stesso per la difficoltà di trovare un metodo pratico atto a dosare con esattezza uno di questi acidi in presenza dell'altro. Ma possiamo in linea generale ritenere che i pesi molecolari trovati per i varî acidi ci diano una misura del grado di solubilità allo stato solido, poichè riteniamo che non possa qui verificarsi altra causa di anomalia crioscopica. Non fenomeni di dissociazione, poichè le

(1) Risultati avuti nella Nota II (loc. cit.).

sostanze sciolte non sono acidi forti, nè (come solventi) hanno potere dissociante; non fenomeni di associazione, quantunque gli acidi grassi possano mostrare una certa tendenza a molecole doppie, poichè in tal caso i pesi molecolari dovrebbero essere sempre maggiori del teorico in tutti gli acidi (solventi) adoperati. Del resto, nella determinazione pratica delle costanti crioscopiche dei varî acidi (che dovemmo eseguire per gli acidi erucico, brassidinico, isoerucico e behenico, non ancora impiegati finora in crioscopia) abbiamo avuto cura di scegliere non solo sostanze carbossilate (acido benzoico) ma anche acidi grassi appartenenti alle stesse serie di quelli di cui poi dovevasi determinare il contegno crioscopico (acidi crotonico, elaidinico, oleico): e tali acidi vi si mostrarono perfettamente normali.

Vedremo poi, in una prossima Nota, che le curve di saturazione dei varî acidi confermano le regolarità e le anomalie ora osservate per i pesi molecolari.

Parte sperimentale.

Determinazione della costante crioscopica dell'acido erucico.

L'acido erucico, da noi impiegato, era quello Kahlbaum, che venne purificato dalle piccole quantità di acido arachico, secondo le indicazioni già riportate nella Nota II (loc. cit.). Esso era in squame bianche, madreperlacee, fondenti in tubetto a 33-34°.

La determinazione del punto di solidificazione, fatta nella solita provetta crioscopica di Beckmann, diede per alcuni campioni 32°,5, per altri 33°,3.

La media generale dei valori di K, determinata coi soliti metodi con sostanza purificata all'uopo, risultò la seguente [1]:

(I)	naftalina	media del valore di K	= 52,4
(II)	dibenzile	» » »	= 51,8
(III)	acido crotonico	» » »	= 50,5
(IV)	» elaidinico	» » »	= 52,1
(V)	*p*-dibromobenzolo	» » »	= 53,6
(VI)	acido benzoico	» » »	= 52,8
(VII)	difenile	» » »	= 53,2
		MEDIA GENERALE K	= 52,3

Secondo la regola empirica di Raoult [2], si dovrebbe avere

$$K = 338 \times 0,62 = 209,5\ ;$$

[1] Pubblicheremo in altro loco i particolari di queste determinazioni.
[2] Compt. rend. *95*, 1030 (1882).

valore che si scosta molto da quello trovato sperimentalmente (ciò che succede assai spesso). Si ricava quindi, applicando la ben nota formula di van t' Hoff, che il calore di fusione dell'acido erucico è, per 1 Kg.,

$$W = 0,02 \frac{(306,3)^2}{52,3} = 35,88 \text{ cal.}$$

e per una grammimolecola

$$W^{\text{I}} = \frac{35,88 \times 338}{1000} = 12,13.$$

Determinazione della costante crioscopica dell'acido brassidinico.

L'acido brassidinico, ottenuto per azione dell'acido nitroso sull'acido erucico, si presentava in scaglie bianche fondenti in tubetto a 59-60°, e solidificava nella provetta crioscopica a 58°,3.

La media dei valori di K da noi trovati è:

1) dibenzile	media del valore di K	= 44,2
2) naftalina	» » »	= 41,6
3) acido benzoico	» » »	= 39,4
4) difenile	» » »	= 38,6
5) acido oleico	» » »	= 44,1
	MEDIA GENERALE »	= 41,6

Con la regola empirica di Raoult, si ricava invece:

$$K = 338 \times 0,62 = 209,5 \,;$$

e per il calore di fusione di un Kg. di sostanza si ha

$$W = 0,002 \frac{(331,3)^2}{41.6} = 52.77 \text{ cal.} \,;$$

e per una grammimolecola:

$$W = \frac{52,77 \times 338}{1000} = 17,83 \text{ cal.}$$

Determinazione della costante crioscopica dell'acido isoerucico.

L'acido isoerucico, purificato per ripetute cristallizzazioni dall'alcool, era costituito da una polvere cristallina fondente in tubetto a 52-53°, e solidificantesi in provetta crioscopica a 51°,2.

Le determinazioni vennero fatte in corrente d'aria; e si impiegarono come sostanze, presumibilmente normali, *p*-dibromobenzolo, dibenzile e naftalina.

L'acido isoerucico fonde in un liquido oleoso, giallognolo; le determinazioni del punto di congelamento richiedono una certa cura ed anche una certa pratica, poichè il fenomeno di sopraraffreddamento quasi non si avverte, e l'arresto della colonna termometrica non è sempre netto.

Inoltre la difficoltà di avere molto acido isoerucico puro non ci permise di fare un maggior numero di misure. I valori ottenuti sono i seguenti:

1) *p*-dibromobenzolo	media del valore di K	= 52,6
2) dibenzile	" " "	= 56,9
3) naftalina	" " "	= 48,1
	MEDIA GENERALE "	= 52,54

Con la regola empirica di Raoult, si ricava:

$$K = 338 \times 0,62 = 209,5;$$

il calore di fusione, che si calcola per 1 Kg. di sostanza, è

$$W = 0,02 \frac{(324.2)^2}{52,24} = 40,01 \text{ cal.},$$

e per una grammimolecola

$$W = \frac{40 \times 338}{1000} = 13,52 .$$

Misure crioscopiche.

Dopo aver determinato sperimentalmente le costanti crioscopiche degli acidi erucico, brassidinico ed isoerucico, che finora non vennero ancora impiegati come solventi crioscopici, passammo a determinare il loro contegno crioscopico reciproco; inoltre vi abbiamo anche studiato il contegno dell'acido saturo corrispondente, behenico, che già nella Nota precedente era stato impiegato come solvente crioscopico.

Solvente: *acido erucico* (K = 52,3).

TAVOLA *D*.

Numero d'ordine	Concentrazione in gr. per 100 gr. di solvente	Δ	Peso molecolare (K = 52.3)
	Sostanza sciolta: *acido brassinidico* ($C_{22}H_{42}O_2 = 338$)		
87	1.264	0.20	330.4
88	2.680	0.42	333.7
89	5.719	0.91	328.7
	Sostanza sciolta: *acido isoerucico* ($C_{22}H_{42}O_2 = 338$)		
90	1.739	0.28	324.9
91	4.246	0.65	341.6
92	6.678	1.02	342.4
93	0.804	0.125	336 3
94	2.620	0 43	318 6
95	4.234	0.665	333.0
	Sostanza sciolta: *acido behenico* ($C_{22}H_{44}O_2 = 340$)		
96	0.876	0.135	344 4
97	2.459	0.355	367.8
98	4.326	[1]	—
99	0 995	0.15	347.0
100	1.926	0.295	341.5
101	4.384	[1]	—

Come risulta dai valori su riportati, l'acido brassidinico ha contegno normale, e così pure l'acido isoerucico: i valori invece ottenuti per l'acido behenico sciolto nell'erucico, potrebbero far pensare ad una anomalia crioscopica spiccata, se lo studio della curva di congelamento di questo sistema binario, e l'aspetto della massa cristallina che si separa alle varie concentrazioni, non indicassero chiaramente che alla terza concentrazione già si separano, come prima fase, cristalli di acido behenico, ed anche alla seconda si cominciano ad avere punti di congelamento incerti, dovuti al fatto che si è assai prossimi al punto eutectico (vedi più tardi la curva del sistema binario « acido behenico-acido erucico »). Ad ogni modo, i valori ottenuti alle prime concentrazioni (344, 347) si possono ritenere attendibili e dimostrano un contegno normale.

[1] A questa concentrazione si ha innalzamento del punto di congelamento (v. curva relativa, nella prossima Nota).

Solvente: *acido brassidinico* (K = 41).

TAVOLA *E*.

Numero d'ordine	CONCENTRAZIONE in gr. per 100 gr. di solvente	Δ	PESO molecolare (K = 41)
	Sostanza sciolta: *acido erucico* ($C_{22}H_{42}O_2$ = 338)		
102	1.041	0.12	355.8
103	3.039	0.405	307.6
104	7.133	0.88	332.3
	Sostanza sciolta: *acido isoerucico* ($C_{22}H_{42}O_2$ = 338)		
105	2.506	0.26	395.2
106	4.505	0.38	486.0
107	9.305	0.76	506.3
108	1.040	0.075	568.6
109	3.897	0.265	602.9
110	5.977	0.415	590.5
	Sostanza sciolta: *acido behenico* ($C_{22}H_{44}O_2$ = 340)		
111	2.051	0.22	382.3
112	4.506	0.46	401.6
113	7.378	0.83	364 6
114	2.548	0.30	348.3
115	3.982	0.46	354.9
116	5.914	0.68	356.6
117	3.625	0.39	364
118	5.850	0.67	358
119	8.210	0.97	347

Noi riteniamo, da questi dati, che solamente l'acido erucico abbia contegno normale se sciolto in acido brassidinico. L'acido isoerucico invece ci ha dato valori assai elevati, ciò che dimostra aver luogo qui formazione di soluzione solida. Per l'acido behenico abbiamo ripetuto tre volte le misure, le quali hanno sempre dato valori alquanto superiori al teorico e che parlano in favore di una piccola solubilità allo stato solido.

Solvente: *acido isoerucico* (K = 52,54).

TAVOLA *F*.

Numero d'ordine	CONCENTRAZIONE in gr. per 100 gr. di solvente	Δ	PESO molecolare (K = 52,54)
	Sostanza sciolta: *acido erucico* ($C_{22}H_{42}O_2$ = 338).		
120	2.884	0.47	322.4
121	4.902	0.73	352.8
122	6.944	1.00	364.8

Numero d'ordine	CONCENTRAZIONE in gr. per 100 gr. di solvente	TEMPERATURA di solidificazione
Sostanza sciolta: *acido behenico* ($C_{22}H_{44}O_2 = 340$)		
123	0.000	51.20
124	0.769	51.78
125	4.280	53 88
Sostanza sciolta; *acido brassidinico* ($C_{22}H_{42}O_2 = 338$)		
126	0.000	51.20
127	1.937	51.20
128	4.700	51.22
129	13.740	51.32

L'acido erucico mostra contegno normale, mentre l'acido brassidinico e l'acido behenico innalzano già fin dalle prime concentrazioni il punto di congelamento del solvente, ciò che vedremo meglio in una prossima Nota a proposito delle curve di solidificazione riguardanti questi sistemi binarî.

Fisiologia vegetale. — *Influenza del nucleo pirrolico sulla formazione della clorofilla* [1]. Nota preliminare di GINO POLLACCI e BERNARDO ODDO, presentata dal Socio GIOVANNI BRIOSI.

Dai numerosi lavori che si sono eseguiti, sia sul pigmento del sangue dei vertebrati, sia su quello verde delle piante, emergono soprattutto due fatti: la presenza cioè nelle loro molecole, di un elemento metallico, il ferro nell'uno ed il magnesio nell'altro, legati ad un complesso di natura organica, e le relazioni di costituzione che si sono riscontrate specialmente nei loro prodotti di degradazione [2].

Ambedue conducono, per riduzione, agli emopirroli e per ossidazione all'acido ematinico ed all'imide metiletilmaleica, per cui ne è sôrta la supposizione che fra la composizione chimica della clorofilla e quella dell'emoglobina debba esistere un'analogia; inoltre, che ciascuno dei due metalli agisca rispettivamente come catalizzatore nella trasformazione dell'acido car-

[1] Lavoro eseguito nei laboratorii dell'Istituto botanico e dell'Istituto di chimica generale della R. Università di Pavia. Giugno 1915.

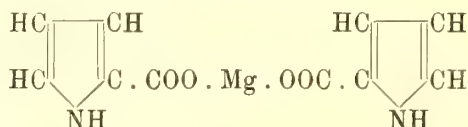
[2] Fra i lavori più recenti vedi: Fischer e Bartholomäus, Berichte *44*, 3313 (1911), *45*, 466 e 1979 (1912); Willstätter e Asahina, Liebig's Annalen *385* 188 (1911); Willstätter e M. Fischer, Zeit. physiol. Chem. *87*, 431 (1913); Willstätter e Forsen, Liebig's Ann. *396*. 180 (1913); Küster, Zeit. physiol. Chem. *82*, 463 (1912); Neucki e Zaleski, Zeit. physiol. Chem. *30*, 384 (1911); Zaleski, Berichte *46*, 1687 (1913).

bonico in sostanze amidacee e nel ciclo di trasformazione del sangue venoso in arterioso.

Se però dall'analogia di composizione chimica vogliamo passare all'indagine sulla funzione dei due pigmenti, sembra ovvio, come ha fatto osservare recentemente uno di noi [1], che si debba tener conto, non solo dei due elementi metallici, ma anche del nucleo pirrolico per la caratteristica mobilità dei suoi idrogeni metinico ed imidico che ora gli conferiscono un carattere nettamente fenolico, ora invece lo rendono tale da poter formare sali come la pirrolidina.

In relazione a questo concetto ci è parso non privo d'interesse lo stabilire quale influenza potesse esercitare un composto pirrolico nella formazione della materia colorante delle foglie, per la quale è nota invece l'azione singola e concomitante di alcuni elementi, non esclusi il magnesio [2] e

Interessandoci a tal uopo di poter disporre di un prodotto pirrolico solubile in acqua, abbiamo preparato il sale magnesiaco dell'acido α-pirrolcarbonico. Questo sale non era ancora conosciuto; cristallizza con due molecole di acqua e corrisponde alla formola normale seguente:

```
HC ══ CH                          HC ══ CH
 ‖     ‖                            ‖     ‖
HC     C . COO . Mg . OOC . C     CH
  \   /                            \   /
   NH                                NH
```

Le esperienze da noi finora eseguite — e che ci ripromettiamo di descrivere più estesamente in seguito, assieme coi dettagli di preparazione del pirrolcarbonato magnesiaco — si limitano alle seguenti:

Da prima si è cercato quale fosse la quantità precisa di pirrolcarbonato magnesiaco sciolta in acqua, che veniva tollerata da piante appartenenti a specie diverse. Fra l'altro si è potuto stabilire che la *Zea Mays* vegeta ancora bene in soluti nei quali il suddetto sale magnesiaco è nella proporzione del 0,50 per mille. Oltrepassando tale dose, si nota un'azione nociva del sale sullo sviluppo delle piantine, i cui tessuti degli apici radicali, osservati al microscopio, mostrano una netta plasmolisi. I tessuti sono invece normali nelle piantine nate da semi messi a germinare in soluto acquoso di pirrolcarbonato magnesiaco in cui tale sale è in dose inferiore al 0,50 per mille.

(1) B. Oddo, Gazz. chim. ital. *44*, II, 268 (1914).

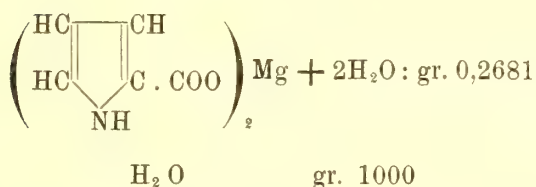
(2) Eva Mameli, *Sulla influenza del magnesio sopra la formazione della clorofilla* (Atti Ist. bot. di Pavia, XV, 151); *Il magnesio nelle piante albicate e clorotiche* (Rend. Accad. dei Lincei, XXIV, 262); *Influenza del fosforo e del magnesio sulla formazione della clorofilla* (ibid., XXIV, 755).

il ferro.

Trovata la dose tollerata, si misero semi di *Zea Mays* a germinare in soluti aventi le seguenti composizioni:

Seme *A*.	$Ca(NO_3)_2$	gr. 1,00
	$(NH_4)_2\ SO_4$	» 0,25
	KNO_3	» 1,00
	$KH_2\ PO_4$	» 0,25
	$H_2\ O$	» 1000
Seme *B*.	$Ca(NO_3)_2$	» 1,00
	$(NH_4)_2\ SO_4$	» 0,25
	KNO_3	» 1,00
	$K\ H_2\ PO_4$	» 0,25

$$\left(\begin{array}{c} HC \text{=====} CH \\ HC \quad\quad C\,.\,COO \\ NH \end{array}\right)_2 Mg + 2H_2O : \text{gr. } 0{,}2681$$

$H_2\ O$ gr. 1000

Si è avuto cura che i sali e l'acqua usati mancassero completamente di ferro.

La quantità di pirrolcarbonato magnesiaco aggiunta al soluto nutritivo pel seme *B* corrisponde a gr. 0,0247 di magnesio per 1000 gr. di acqua, che è la quantità di tale elemento contenuta nei liquidi nutritivi solitamente usati per le colture artificiali.

Il seme *A* ha dato una piantina che, dopo 20 giorni di sviluppo, ha sole le prime due foglie con una debole quantità di clorofilla; tutte le altre sono perfettamente eziolate.

Il seme *B*, al contrario, dopo egual tempo di sviluppo, ha formato una piantina con tutte le foglie colorate normalmente in verde e con uno sviluppo per lo meno tre volte maggiore di quello della piantina del seme *A*, benchè anche la soluzione nutritizia somministrata a questo seme mancasse completamente di ferro.

La formazione di clorofilla in piante vegetanti in terreno privo di ferro, nelle condizioni suddette, è cosa affatto nuova.

Per quanto tali esperienze necessitino di ulteriore conferma, tuttavia, dato il loro interesse, abbiamo creduto per ora opportuno di pigliar data, proponendoci di continuarle dopo la guerra.

Botanica. — *Ricerche intorno alle specie: Coniothyrium pirina* (Sacc.) *Sheldon, Phyllosticta pirina Sacc. e Coniothyrium tirolense Bubàk* (1). Nota di ELISA MUTTO e del dott. GINO POLLACCI, presentata dal Socio GIOVANNI BRIOSI (2).

P. A. Saccardo nel 1878 (3) istituì una nuova specie di *Phyllosticta* : la *P. pirina*, della quale diede la seguente diagnosi:

« *Phyllosticta pirina* Sacc. Maculis arescendo candicantibus, variis, peritheciis plerumque epiphyllis, punctiformibus, lenticularibus, pertusis, 100-130 μ diam., contextu laxe celluloso ferrugineo; *sporulis ovoideis v. ellipsoideis 4-5 × 2-2,5 μ, hyalinis.*

Hab. in foliis *Piri communis* nec non in foliis *Piri mali*, in Italia or. Gallia, Lusitania ».

Nel 1904, Bubàk (4) scoperse un *Coniothyrium* pure sulle foglie di *Pirus communis*, e di esso pubblicò la seguente diagnosi:

« *Coniothyrium tirolense* Bubàk. Maculis subrotondis, albidis vel pallide ochraceis, praecise limitatis, saepe concavis, 2-5 mm. latis; pycnidiis sparsis, nigris, innatis, globosis, leviter depressis, 120-250 μ diam. poro centrali, 10-20 μ diam. pertusis; contextu castaneo-brunneo, parenchymatico, *sporulis ovoideis* v. *ellipsoideis* 4,5-7 × 2-4,5 copiosis, *olivaceo-brunneis* ».

Nel 1907 John L. Sheldon rese pubblica una Nota (5) nella quale egli afferma che, dall'esame di un considerevole numero di esemplari del fungo *Phyllostica pirina* Sacc. su foglie di melo e di cotogno, ha potuto rilevare che le spore nei più maturi picnidii non sono « hyaline » come in origine le descrisse Saccardo, nè « *slightly smoky* » come le dissero Martin (6) e Ellis e Everhart (7), ma considerevolmente brune, l'intensità del colore essendo in ragione diretta della maturità delle spore; e tenendo conto del colore di queste, Sheldon osserva come il *Coniothyrium tirolense* Bubàk, che si trova su foglie di pero, possa essere una matura *Phyllosticta pirina* Sacc. L'autore non ebbe occasione di confrontare esemplari dei due funghi. Ad ogni modo, mutò in *Coniothyrium pirina* (Sacc.) Sheldon (8) la *Phyl-*

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto botanico di Pavia.

(2) Pervenuta all'Accademia il 5 luglio 1915.

(3) Saccardo P. A., *Michelia*, I, pag. 1878; *Sylloge Fung. 3*, pag. 7, 1884.

(4) Bubàk Fr., *Oester. Bot. Zeitschr. 54*, pag. 183, 1904; Saccard, *Sylloge Fung, 18*, pag. 309, 1906.

(5) Sheldon J. L., *Torreya F.*, pag. 142, 1907.

(6) Martin George, Journ. Mycol., *2*, pag. 17, 1886.

(7) Ellis J. B. e Everhart B. M., *The North American Phyllostictas*, pag. 36, 1900.

(8) L'autore doveva in ogni modo scrivere: *Coniothyrium pirinum* (Sacc.) Sheldon.

losticta pirina Sacc., mantenendone gli stessi caratteri diagnostici, all' infuori del colore delle spore.

Nel 1908 Carl P. Hartley [1], continuando gli studî e le colture micologiche di Sheldon, nota come i preparati di *Coniothyrium tirolense* Bubàk da lui esaminati gli facciano sembrare identica tale specie al *Coniothyrium pirina* (Sacc.) Sheldon.

Intorno alle colture di questi funghi poco si sa di preciso. Sheldon scrive che « in colture le spore escono dai picnidii in masse brune ».

Hartley le ottenne con vario successo negli ordinarî mezzi nutritizî, e su rametti freschi e sterilizzati di melo, rosa, pruno ecc.; ma non diede altri particolari.

Avendo noi avuto occasione di osservare numerosissime colture di micromiceti di specie diverse sopra svariati mezzi culturali allo scopo di studiare l' influenza del terreno nutritivo, della temperatura, della luce ecc. sopra la morfologia dei funghi, potemmo confrontare fra loro colture di *Phyllosticta pirina* Sacc., di *Coniothyrium pirinum* (Sacc.) Shedoln e materiale di *Coniothyrium tirolense* Bubàk.

Avendoci l'esame acccurato di tali micromiceti dimostrato che le conclusioni di qualcuno degli autori sopracitati non sono esatte, pubblichiamo subito quanto abbiamo potuto con certezza stabilire, eliminando anche dei dubbî che riguardano il valore di una specie che invece ha ragione di essere mantenuta come tale.

Colture di *Coniothyrium pirina* (Sacc.) Sheldon e di *Phyllosticta pirina* Sacc. in decotto di foglie di melo, inviateci dall'Assoc. intern. des botanistes di Amsterdam, seminate il 10 marzo 1915, e da noi osservate il 31 marzo, presentano i seguenti caratteri:

Le colture di *Coniothyrium* avevano formato dei picnidii con spore brune che misuravano $4\text{-}5 \times 2\text{-}2{,}5\ \mu$.

Le colture di *Phyllosticta pirina* avevan formato picnidii aventi spore *jaline* che misuravano $4{,}5\text{-}6{,}6 \times 2\text{-}2{,}5\ \mu$.

Le spore di questa *Phyllosticta* si sono sempre mantenute jaline anche dopo dei mesi; quelle di *Coniothyrium*, jaline nei primi stadî di sviluppo, diventavano colorate solo dopo due o tre giorni.

Spore di *Phyllosticta pirina* inoculate in terreno colturale costituito da patata, il giorno 31 marzo, il 9 aprile mostravano picnidii a spore jaline aventi le dimensioni $5{,}8\text{-}7 \times 3{,}5\ \mu$. Osservate il 12 aprile, si presentavano ancora jaline; solo erano di dimensioni maggiori. Osservate il 19 aprile, erano identiche e jaline; il 24 aprile esse erano sempre jaline e misuravano $7\text{-}9{,}3 \times 4{,}6\text{-}5{,}8\ \mu$,

Osservate le colture di *Phyllosticta* aventi la data del 10 marzo, esse erano sempre jaline ed avevano le stesse dimensioni osservate il 10 marzo; vale a dire le spore erano giunte a completo sviluppo.

[1] Hartley Carl P., *Science*, nuova serie, vol. XXVIII, pp. 157-159, 1908.

Spore di *P. pirina* inoculammo pure in *agar* glucosato il 6 aprile; e, osservate il 19, mostrarono la presenza di picnidii con spore jaline.

Inoltre spore della stessa *Phyllosticta* seminate il 9 aprile sopra barbabietola ed altre sopra carota, osservate il 26 aprile, avevano picnidii con spore jaline.

Viceversa, spore di *Coniothyrium pirinum* seminate il 31 marzo in *agar* glucosato, osservate il 9 aprile, avevano spore jaline che misuravano $7 \times 3{,}5\text{-}4\ \mu$. Il 12 aprile la stessa coltura aveva le spore che si erano colorate in olivaceo chiaro; il 19 aprile le spore della stessa coltura si presentavano definitivamente olivacee.

Spore di *C. pirinum* seminate il 6 aprile in patata, osservate il 19, avevano dato picnidii con spore che già erano colorate.

Spore di *C. pirinum*, seminate il 9 aprile in barbabietola, erano olivacee dopo 10 giorni, come pure quelle seminate in barbabietola lo stesso giorno ed osservate il 26 aprile. Le misure delle spore erano eguali a quelle della coltura in barbabietola ($7 \times 4{,}5\ \mu$).

Per gentilezza del prof. Bubàk Franz di Tabor, abbiamo potuto studiare pezzi di foglie di *Pirus communis* attaccate dal *Coniothyrium tirolense* Bubàk, e dopo ripetuti esami dobbiamo concludere che esso *Coniothyrium* corrisponde al micete al quale Sheldon ha dato il nome di *C. pirina.*

Conclusioni.

1°) I varii mezzi di coltura usati influiscono semplicemente sopra le dimensioni ma non sul colore delle spore del *Coniothyrium pirinum* (Sacc.) Sheldon, e della *Phyllosticta pirina* Sacc.

2°) Le spore del *Coniothyrium pirinum* (Sacc.) Sheldon nei primissimi stadî di sviluppo si presentano jaline come quelle della *Phyllosticta pirina* Sacc., e quindi l'osservatore può essere tratto in inganno nella distinzione di queste due specie.

3°) Le spore della specie *Phyllosticta pirina* Sacc. si mantennero però, nei diversi mezzi colturali da noi usati, e nei diversi stadî, costantemente jaline anche quando la specie aveva raggiunto il suo definitivo sviluppo; negli stessi terreni nutritizî il *Coniothyrium pirinum* (Sacc.) Sheldon produce invece spore colorate; quindi la *Phyllosticta pirina* del Saccardo non è un sinonimo del *Coniothyrium pirinum* (Sacc.) Sheldon, ma è ben distinta da esso e va mantenuta come specie.

4°) La specie *Coniothyrium pirinum*, istituita da Sheldon, ha caratteri completamente eguali a quelli dati per il *Coniothyrium tirolense* Bubàk, e non può essere accettata come specie distinta, ma va considerata come sinonimo di quest'ultimo, essendo il *C. tirolense* stato scoperto e descritto dal Bubàk nel 1904, mentre il *C. pirinum* dal Sheldon nel 1907.

Chimica generale. — *Equilibrio chimico ed azione dei sali neutri* [1]. Nota di G. Poma e di G. Albonico, presentata dal Socio G. Ciamician.

Abbiamo pubblicato recentemente due Note [2] intorno all'influenza che i sali neutri esercitano sugli equilibrî omogenei di eterificazione; intendiamo ora, occupandoci nella presente comunicazione dello stesso argomento, di riferire i risultati da noi ulteriormente ottenuti proseguendo nella nostra ricerca.

L'indirizzo seguìto e la tecnica sperimentale impiegata sono gli stessi che già dettagliatamente descrivemmo nelle Note precedenti.

Allo scopo di completare lo studio dell'azione dei sali neutri sugli equilibrî omogenei di sistemi contenenti alcool metilico od alcool etilico e quantità assolute diverse d'acqua, abbiamo fatto le seguenti esperienze, nelle quali, come al solito, l'acido da eterificare era l'acido acetico.

Tabella 1ª.

$[H_2O]:[CH_3OH] = 5$

in assenza di sali neutri.

Numero di mole contenute in 100 cm³		Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
all'inizio $t=0$	all'equilibrio $t=\infty$			
$a = 0,1200$	$a_1 = 0,0557$	35′	67,55	0,0019
$b = 0,7383$	$b_1 = 0,6741$	94	63,00	0,0019
$c = 3,6968$	$c_1 = 3,7611$	180	57,65	0,0018
$d = 0$	$d_1 = 0,0643$	259	53,70	0,0018
		371	49,52	0,0018
$\zeta = 1,6548$	$\xi = 0,0643$	valor medio		**0,0018**
$K = \frac{k_2}{k_1} = $ **0,1552**		$k_1 =$ **0,00213**		
		$k_2 =$ **0,00033**		

Tabella 2ª.

$[H_2O]:[CH_3OH] = 5$

sale neutro: Na Cl 2 norm.

Numero di mole contenute in 100 ccm³		Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
all'inizio $t=0$	all'equilibrio $t=\infty$			
$a = 0,1200$	$a_1 = 0,0495$	26′	67,10	0,0033
$b = 0,6991$	$b_1 = 0,6286$	86	59,85	0,0033
$c = 3,5150$	$c_1 = 3,5855$	174	52,42	0,0032
$d = 0$	$d_1 = 0,0705$	250	47,65	0,0032
		362	43,30	0,0032
$\zeta = 1,3572$	$\xi = 0,0705$	480	40,00	0,0032
$K = \frac{k_2}{k_1} = $ **0,1231**		valor medio		**0,0032**
		$k_1 =$ **0,00364**		
		$k_2 =$ **0,00044**		

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Parma.

[2] Rend. Acc. Lincei, anno 1915, 1° sem. pp. 747 e 979.

Tabella 3ª.

$[H_2O]:[CH_3OH] = 5$

sale neutro: $LiCl$ 2 norm.

Numero di mole contenute in 100 ccm³		Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
all'inizio $t = 0$	all'equilibrio $t = \infty$			
$a = 0{,}1200$	$a_1 = 0{,}0487$	21′	67,58	0,0036
$b = 0{,}7072$	$b_1 = 0{,}6359$	82	59,30	0,0036
$c = 3{,}5563$	$c_1 = 3{,}6280$	169	51,11	0,0036
$d = 0$	$d_1 = 0{,}0713$	247	46,30	0,0036
		360	41,80	0,0036
$\zeta = 1{,}3527$;	$\xi = 0{,}0713$	481	39,05	0,0035
$K = \frac{k_2}{k_1} = \mathbf{0{,}1198}$		valor medio		**0,0036**
		$k_1 = \mathbf{0{,}00409}$		
		$k_2 = \mathbf{0{,}00049}$		

Tabella 4ª.

$[H_2O]:[CH_3OH] = 5$

sale neutro: $CaCl_2$ 2 norm. eq.

Numero di mole contenute in 100 ccm³		Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
all'inizio $t = 0$	all'equilibrio $t = \infty$			
$a = 0{,}1200$	$a_1 = 0{,}0512$	20′	67,50	0,0040
$b = 0{,}6465$	$b_1 = 0{,}5767$	60	61,95	0,0040
$c = 3{,}2400$	$c_1 = 3{,}3088$	143	53,50	0,0039
$d = 0$	$d_1 = 0{,}0688$	222	48,20	0,0038
		334	43,50	0,0038
$\zeta = 1{,}2930$;	$\xi = 0{,}0688$	valor medio		**0,0039**
$K = \frac{k_2}{k_1} = \mathbf{0{,}1296}$		$k_1 = \mathbf{0{,}00448}$		
		$k_2 = \mathbf{0{,}00058}$		

Tabella 5ª.

$[H_2O]:[CH_3OH] = 5$

sale neutro: $MgCl_2$ 2 norm eq.

all'inizio	all'equilibrio	Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
$a = 0{,}1200$	$a_1 = 0{,}0526$	21′	67,85	0,0037
$b = 0{,}6282$	$b_1 = 0{,}5608$	55	63,20	0,0037
$c = 3{,}1525$	$c_1 = 3{,}2199$	143	54,72	0,0036
$d = 0$	$d_1 = 0{,}0674$	217	49,80	0,0036
		329	45,00	0,0036
$\zeta = 1{,}2933$;	$\xi = 0{,}0674$	445	41,90	0,0035
$K = \frac{k_2}{k_1} = \mathbf{0{,}1357}$		valor medio		**0,0036**
		$k_1 = \mathbf{0{,}00416}$		
		$k_2 = \mathbf{0{,}00056}$		

Tabella 6ª.

$[H_2O]:[C_2H_5OH] = 10$;

in assenza di sali neutri.

all'inizio	all'equilibrio	Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
$a = 0{,}1200$	$a_1 = 0{,}0908$	60′	69,55	0,00084
$b = 0{,}4012$	$b_1 = 0{,}3720$	120	68,15	0,00083
$c = 4{,}0121$	$c_1 = 4{,}0413$	240	66,20	0,00074
$d = 0$	$d_1 = 0{,}0292$	360	64,45	0,00073
$\zeta = 2{,}3098$;	$\xi = 0{,}0292$	per estrapolaz.		**0,00071**
$K = \frac{k_2}{k_1} = \mathbf{0{,}2862}$		$k_1 = \mathbf{0{,}00099}$		
		$k_2 = \mathbf{0{,}00028}$		

Tabella 7ª.

$[H_2O]:[C_2H_5OH] = 10$

sale neutro: KCl 2 norm.

all'inizio	all'equilibrio	Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
$a = 0{,}1200$	$a_1 = 0{,}0879$	56′	69,35	0,00104
$b = 0{,}3789$	$b_1 = 0{,}3468$	115	67,85	0,00107
$c = 3{,}7886$	$c_1 = 3{,}8206$	237	65,15	0,00104
$d = 0$	$d_1 = 0{,}0321$	354	63,20	0,00102
$\zeta = 1{,}8894$;	$\xi = 0{,}0320$	valor medio		**0,00104**
$K = \frac{k_2}{k_1} = \mathbf{0{,}249}$		$k_1 = \mathbf{0{,}00138}$		
		$k_2 = \mathbf{0{,}00034}$		

Tabella 8ª.

$[H_2O]:[C_2H_5OH] = 10$

sale neutro: $NaCl$ 2 norm.

all'inizio	all'equilibrio	Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
$a = 0{,}1200$	$a_1 = 0{,}0850$	51′	69,25	0,00134
$b = 0{,}3853$	$b_1 = 0{,}3503$	109	67,30	0,00134
$c = 3{,}8531$	$c_1 = 3{.}8881$	229	64,05	0.00133
$d = 0$	$d_1 = 0{,}0350$	347	61,06	0,00132
$\zeta = 1{,}6909$;	$\xi = 0{,}0350$	valor medio		**0,00133**
$K = \frac{k_2}{k_1} = \mathbf{0{,}219}$		$k_1 = \mathbf{0{,}00170}$		
		$k_2 = \mathbf{0{,}00037}$		

Tabella 9ª.

$[H_2O]:[C_2H_5OH] = 10$

sale neutro: Li Cl 2 norm.

Numero di mole contenute in 100 ccm³ all'inizio $t = 0$	Numero di mole contenute in 100 ccm³ all'equilibrio $t = \infty$	Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
$a = 0,1200$	$a_1 = 0,0830$	48′	68,95	0,00136
$b = 0,3879$	$b_1 = 0,3508$	106	67,00	0,00137
$c = 3,8786$	$c_1 = 3.9156$	226	63,68	0,00139
$d = 0$	$d_1 = 0,0370$	344	61,54	0,00135
$\zeta = 1,6313$; $\xi = 0,0370$		valor medio **0,00137**		
$K = \frac{k_2}{k_1} = \mathbf{0,201}$		$k_1 = \mathbf{0,00171}$ $k_2 = \mathbf{0,00034}$		

Tabella 10ª.

$[H_2O]:[C_2H_5OH] = 10$

sale neutro: Ca Cl_2 2 norm. eq.

Numero di mole contenute in 100 ccm³ all'inizio $t = 0$	Numero di mole contenute in 100 ccm³ all'equilibrio $t = \infty$	Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
$a = 0,1200$	$a_1 = 0,0863$	55′	69.05	0.00139
$b = 0,3571$	$b_1 = 0,3234$	102	67,60	0,00140
$c = 3,5708$	$c_1 = 3,6044$	222	64,35	0,00140
$d = 0$	$d_1 = 0,0337$	340	62,28	0,00135
$\zeta = 1,6563$; $\xi = 0,0337$		valor medio **0.00138**		
$K = \frac{k_2}{k_1} = \mathbf{0.230}$		$k_1 = \mathbf{0.00179}$ $k_2 = \mathbf{0.00041}$		

Tabella 11ª.

$[H_2O]:[C_2H_5OH] = 10$;

sale neutro: Mg Cl_2 2 norm. eq.

Numero di mole contenute in 100 ccm³ all'inizio $t = 0$	Numero di mole contenute in 100 ccm³ all'equilibrio $t = \infty$	Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
$a = 0.1200$	$a_1 = 0,0856$	97′	67,47	0.00127
$b = 0,3647$	$b_1 = 0,3303$	217	64.12	0,00133
$c = 3,6481$	$c_1 = 3,6825$	337	61,90	0,00127
$d = 0$	$d_1 = 0,0344$			
$\zeta = 1,6360$; $\xi = 0,0344$		valor medio **0,00129**		
$K = \frac{k_2}{k_1} = \mathbf{0,223}$		$k_1 = \mathbf{0,00166}$ $k_2 = \mathbf{0,00037}$		

Nelle esperienze fin qui compiute abbiamo studiato l'azione di una serie di cloruri, ed abbiamo così posto in luce l' influenza esercitata su di essa dalla natura chimica dei cationi dei sali neutri usati; abbiamo poscia ritenuto opportuno di studiare la stessa azione in rapporto alla natura chimica dei loro anioni. Abbiamo così impiegato il bromuro ed il nitrato di litio, usando corrispondentemente, come catalizzatore, acido bromidrico od acido nitrico, della stessa normalità alla quale prima avevamo adoperato l'acido cloridrico.

TABELLA 12ª.

Catalizzatore: HBr O, **2 norm.**

$[H_2O]:[C_2H_5OH] = 5$

in assenza di sali neutri.

Numero di mole contenute in 100 ccm³		Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
all'inizio $t = 0$	all'equilibrio $t = \infty$			
$a = 0,1200$	$a_1 = 0,0726$	87′	68,00	0,00070
$b = 0,6500$	$b_1 = 0,6026$	164	65,78	0,00069
$c = 3,2494$	$c_1 = 3,2968$	234	63,75	0,00069
$d = 0$	$d_1 = 0,0474$	474	58,70	0,00068
$\zeta = 2,2854$; $\xi = 0,0474$		valor medio **0,00069**		
$K = \frac{k_2}{k_1} = \mathbf{0,280}$		$k_1 = \mathbf{0,00958}$ $k_2 = \mathbf{0,00268}$		

TABELLA 13ª.

Catalizzatore: HBr O, **2 norm.**

$[H_2O]:[C_2H_5OH] = 5$;

sale neutro: $LiBr$ 2 norm.

Numero di mole contenute in 100 ccm³		Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
all'inizio $t = 0$	all'equilibrio $t = \infty$			
$a = 0,1200$	$a_1 = 0,0586$	42′	68,00	0,00179
$b = 0,6126$	$b_1 = 0,5512$	90	64,90	0,00176
$c = 3,0617$	$c_1 = 3,1231$	164	60,38	0,00180
$d = 0$	$d_1 = 0,0614$	238	56,70	0,00180
		478	49,31	0,00178
$\zeta = 1,4384$; $\xi = 0,0614$		valor medio **0,00179**		
$K = \frac{k_2}{k_1} = \mathbf{0,168}$		$k_1 = \mathbf{0,00215}$ $k_2 = \mathbf{0,00036}$		

TABELLA 14ª.

Catalizzatore: HNO_3 O, **2 norm.**

$[H_2O]:[C_2H_5OH] = 5$

in assenza di sali neutri.

$a = 0,1200$	$a_1 = 0,0729$	93′	68,07	0,00065
$b = 0,6476$	$b_1 = 0,6005$	164	66,00	0,00065
$c = 3,2375$	$c_1 = 3,2846$	241	63,95	0,00065
$d = 0$	$d_1 = 0,0471$	482	58,98	0,00065
$\zeta = 2,3003$; $\xi = 0,0471$		valor medio **0,0065**		
$K = \frac{k_2}{k_1} = \mathbf{0,282}$		$k_1 = \mathbf{0,00090}$ $k_2 = \mathbf{0,00025}$		

TABELLA 15ª.

Catalizzatore: HNO_3 O, **2 norm.**

$[H_2O]:[C_2H_5OH] = 5$

sale neutro: $LiNO_3$ 2 norm.

$a = 0,1200$	$a_1 = 0,0598$	96′	65,78	0,00139
$b = 0,6071$	$b_1 = 0,5470$	162	62,60	0,00139
$c = 3,0335$	$c_1 = 3,0937$	244	59,45	0,00136
$d = 0$	$d_1 = 0,0602$	486	52,65	0,00136
$\zeta = 1,4692$; $\xi = 0,0602$		valor medio **0,00138**		
$K = \frac{k_2}{k_1} = \mathbf{0,0176}$		$k_1 = \mathbf{0,00167}$ $k_2 = \mathbf{0,00029}$		

In tutte le determinazioni di equilibrio fin qui riferite l'acido organico da eterificare era costantemente costituito dall'acido acetico; era interessante di eseguire alcune esperienze impiegando acidi diversi. Nelle misure che seguono gli acidi usati successivamente, in presenza di alcool metilico ed etilico, furono il formico ed il propionico; il catalizzatore fu l'acido cloridrico O, 2 norm.

Tabella 16ª.

$[C_2H_5COOH] = 1 . 2$ **norm.**

$[H_2O] : [CH_3OH] = 5$

in assenza di sali neutri.

Numero di mole contenute in 100 ccm³		Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
all'inizio $t = 0$	all'equilibrio $t = \infty$			
$a = 0,1200$	$a_1 = 0,0538$	30′	67,58	0,00189
$b = 0,7186$	$b_1 = 0,6525$	74	64,40	0,00186
$c = 3,5933$	$c_1 = 3,6595$	133	60.09	0,00189
$d = 0$	$d_1 = 0,0662$	277	52,50	0,00188

valor medio **0,00188**

$\zeta = 1,5360$; $\xi = 0,0662$

$K = \frac{k_2}{k_1} = \mathbf{0,145}$

$k_1 = \mathbf{0.00219}$
$k_2 = \mathbf{0.00031}$

Tabella 17ª.

$[C_2H_5COOH] = 1 . 2$ **norm.**

$[H_2O] : [CH_3OH] = 5$

sale neutro: Li Cl 2 norm.

Numero di mole contenute in 100 ccm³		Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
all'inizio $t = 0$	all'equilibrio $t = \infty$			
$a = 0,1200$	$a_1 = 0,0441$	35′	64,54	0,00352
$b = 0,6870$	$b_1 = 0,6111$	65	60,25	0.00350
$c = 3,4350$	$c_1 = 3,5109$	95	56,51	0,00349
$d = 0$	$d_1 = 0,0759$	145	51,70	0.00345
		300	42,05	0,00344

valor medio **0.00348**

$\zeta = 1,2083$; $\xi = 0,0759$

$K = \frac{k_2}{k_1} = \mathbf{0,101}$

$k_1 = \mathbf{0.00387}$
$k_2 = \mathbf{0,00039}$

Tabella 18ª.

$[C_2H_5COOH] = 1 . 2$ **norm.**

$[H_2O] : [C_2H_5OH] = 5$;

in assenza di sali neutri.

all'inizio $t = 0$	all'equilibrio $t = \infty$	Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
$a = 0,1200$	$a_1 = 0,0695$	105′	68,20	0,00060
$b = 0,6373$	$b_1 = 0,5867$	170	66,30	0,00062
$c = 3,1858$	$c_1 = 3,2363$	253	64,10	0.00064
$d = 0$	$d_1 = 0,0505$	495	59,09	0,00064

valor medio **0,00063**

$\zeta = 2,0157$; $\xi = 0,0505$

$K = \frac{k_2}{k_1} = \mathbf{0,249}$

$k_1 = \mathbf{0.00083}$
$k_2 = \mathbf{0,00020}$

Tabella 19ª.

$[C_2H_5COOH] = 1 . 2$ **norm.**

$[H_2O] : [C_2H_5OH] = 5$;

sale neutro: Li Cl 2 norm.

all'inizio $t = 0$	all'equilibrio $t = \infty$	Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
$a = 0,1200$	$a_1 = 0,0455$	60′	67,30	0,0017
$b = 0,6078$	$b_1 = 0,5333$	110	64.20	0,0017
$c = 3,0377$	$c_1 = 3.1122$	172	60.79	0,0017
$d = 0$	$d_1 = 0,0745$	258	56,60	0,0017
		500	49,02	0,0017

valor medio **0,0017**

$\zeta = 1,0931$; $\xi = 0,0745$

$K = \frac{k_2}{k_1} = \mathbf{0,105}$

$k_1 = \mathbf{0.00189}$
$k_2 = \mathbf{0,00019}$

Per l'acido formico abbiamo dovuto limitarci a determinare la costante finale di equilibrio, pel fatto che con questo acido, certamente anche per autocatalisi, la velocità di reazione era molto grande; d'altro lato, nelle nostre condizioni sperimentali, la elevata tensione di vapore dell'etere formico che avrebbe dovuto formarsi sarebbe stata causa di gravi errori sperimentali.

TABELLA 20ª.

$[H_2O]:[R'OH] = 5$

per $t = 0$

$[HCl] = 0.2$ norm.; temperatura 25°; $[RCO_2H] = 1.2$

N.	Acido da eterificare	Alcool eterificante	N. di mole cont. in 100 cm³ allo stato di equilibrio $t = \infty$				Normalità del Li Cl	$K = \frac{k_2}{k_1}$	Δ	$\frac{100\,\Delta}{K}$
			a_1 RCO_2H	b_1 $R'OH$	c_1 H_2O	d_1 RCO_2R'				
1	HCO_2H	CH_3OH	0,0690	0,6997	3,8048	0,0510	0	0,249	—	—
2	id.	id.	0,0631	0,6670	3,6763	0,0569	2	**0,201**	0,048	19,2
3	id.	C_2H_5OH	0,0851	0,6301	3,3591	0,0349	0	0,457	—	—
4	id.	id.	0,0759	0,5950	3,2376	0,0441	2	**0,316**	0,141	30,8
5	CH_3CO_2H	CH_3OH	0,0557	0,6741	3,7611	0,0643	0	0,155	—	—
6	id.	id.	0,0487	0,6359	3,6280	0,0713	2	**0,120**	0,035	22,5
7	id.	C_2H_5OH	0,0724	0,6034	3,3036	0,0476	0	0,279	—	—
8	id.	id.	0,0605	0,5653	3,1837	0,0595	2	**0,181**	0,098	35,1
9	$C_2H_5CO_2H$	CH_3OH	0,0538	0,6525	3,6595	0,0662	0	0,145	—	—
10	id.	id.	0,0441	0,6111	3,5109	0,0759	2	**0,101**	0,044	30,3
11	id.	C_2H_5OH	0,0695	0,5867	3,2363	0,0505	0	0,249	—	—
12	id.	id.	0,0455	0,5333	3,1122	0,0745	2	**0,105**	0,144	57,8

CONCLUSIONE.

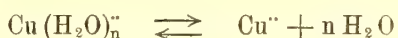
Prendiamo ora rapidamente in esame i risultati esposti nella presente Nota e nelle altre due da noi già pubblicate, sullo stesso argomento, in questi Rendiconti.

La prima conclusione generale che possiamo trarre è che, nelle condizioni sperimentali da noi realizzate, la presenza di un sale neutro sposta l'equilibrio omogeneo di eterificazione e di idrolisi, come se una parte dell'acqua presente nel sistema venisse sottratta al giuoco immediato dell'equilibrio. Tale spostamento dipende innanzi tutto, in modo molto evidente, dalla concentrazione dei sali neutri adoperati e dalla natura dei loro cationi; esso cresce rapidamente al diminuire dell'elettroaffinità di questi ultimi: ordinandoli infatti secondo la crescente attività presentata dai loro sali di un medesimo acido, si ottiene la serie $K^{\cdot}$, $Na^{\cdot}$, $Li^{\cdot}$, $Ca^{\cdot\cdot}$ e $Mg^{\cdot\cdot}$. Meno evidente, ma non trascurabile, è l' influenza esercitata dalla natura dell'anione. Così, mentre la presenza di due mole di Li Cl per litro determina una diminuzione, nella costante K di equilibrio del 35,7 %, quella, *ceteris paribus*, di due mole di Li Br fa diminuire la stessa costante del 40 % e quella di due mole di Li NO_3 del 37,5 %.

Nel loro insieme questi primi risultati potrebbero essere completamente spiegati ammettendo che i sali neutri in soluzione formassero degli idrati le

cui complessità crescessero al decrescere dell'elettroaffinità dei loro ioni. Ma contro tale ipotesi si eleva una grave difficoltà: Nella 25ª tabella della seconda Nota vediamo infatti che la presenza di una quantità costante di Li Cl, in sistemi nei quali il rapporto molecolare iniziale tra l'acqua e l'alcool etilico varia come da due a dieci, determina una diminuzione della costante K di equilibrio che, fatta astrazione da piccole oscillazioni che potrebbero derivare dagli inevitabili errori sperimentali, si mantiene invariata.

Uno di noi [1] ebbe già occasione di porre in luce un fatto analogo a questo. Come abbiamo ricordato precedentemente, l'azione esercitata dai sali neutri sulle concentrazioni apparenti degli ioni rameici può, per le condizioni sotto le quali essa si determina, essere spiegata con la formazione degli idrati in soluzione. La determinazione di tali concentrazioni ioniche veniva fatta mediante la misura delle f. e. m. di pile di concentrazione e in base alla nota teoria osmotica della pila ed alla conseguente formula del Nernst. La spiegazione, ammessa provvisoriamente, per interpretare i fatti ora ricordati, fu che in soluzione esistesse l'equilibrio

$$Cu(H_2O)_n^{\cdot\cdot} \rightleftarrows Cu^{\cdot\cdot} + n\,H_2O$$

e che solo gli ioni anidri fossero elettromotoricamente attivi nello stabilirsi della differenza di potenziale tra l'elettrodo di rame e le soluzioni contenenti gli ioni rameici. L'aggiunta di una sostanza capace di combinarsi, in soluzione, con l'acqua, stabilendo una concorrenza fra lo ione idratato e la sostanza stessa, doveva far crescere, nella soluzione, il numero degli ioni rameici anidri, anche se in realtà la concentrazione complessiva degli ioni rameici idratati e non, veniva a diminuire. Con questa ipotesi tutti i fatti messi in evidenza nel caso dell'azione dei sali neutri sulla concentrazione degli ioni rameici potevano essere spiegati senza difficoltà; nel caso degli ioni idrogenici, invece, mentre i fatti si ripetevano identicamente per quanto si riferiva all'ordine di attività spiegata dai detti sali neutri in rapporto alla loro concentrazione ed alla natura dei loro cationi, si è osservato che l'incremento apparente della concentrazione ionica dell'idrogeno era indipendente, o quasi, dalla sua diluizione.

L'analogia con quanto abbiamo ora dimostrato nel caso degli equilibrî di eterificazione è evidente. Il fatto che la diminuzione della costante di equilibrio e l'incremento della concentrazione apparente dello ione idrogenico, determinati da una stessa quantità di sale neutro, si mantengano indipendenti dalla quantità assoluta d'acqua presente nei rispettivi sistemi, appare difficilmente conciliabile con l'ipotesi che tali variazioni attribuisca soltanto alla formazione degli idrati in soluzione. Per chiarire questo argomento, che presenta un così elevato interesse in sè stesso, ma più ancora per l'intimo

[1] Ztschr, physik. Chemie (1914) *87*, 196; *88*, 678.

rapporto che lo collega col problema fondamentale dello stato dei corpi in soluzione, abbiamo già iniziato nuove ricerche sull'azione dei sali neutri in rapporto al potere solvente, al calorico specifico ed alle tensioni parziali di vapore delle miscele idroalcooliche.

Come appare dalla ventesima tabella di questa Nota, l'azione dei sali neutri sulla costante di equilibrio è influenzata dalla natura chimica degli acidi organici da eterificare e da quella degli alcooli eterificanti; infatti, tale costante cresce rapidamente al crescere dei pesi molecolari degli uni e degli altri. È nostra intenzione compiere una ricerca, seguendo la metodica del Berthelot e del Péan de Saint Gilles, sulla costante dell'equilibrio di eterificazione, in assenza di sali neutri, con alcooli ed acidi diversi.

Vogliamo finalmente far osservare che l'azione acceleratrice esercitata dai sali neutri sulle singole velocità di eterificazione e d'idrolisi, come può dedursi dalle variazioni delle corrispondenti costanti di reazione k_1 e k_2, è, generalmente, tanto maggiore quanto più elevata è l'affinità per l'acqua dei sali neutri impiegati; questo risultato quindi si differenzia nettamente da quanto venne dimostrato studiando l'azione dei sali neutri nelle ordinarie condizioni (1). È opportuno poi di rilevare che, nel caso presente, tale influenza fa crescere la velocità di eterificazione, in modo che, grossolanamente, può ritenersi proporzionale alla concentrazione salina complessiva; mentre invece essa determina sulla velocità d'idrolisi incrementi minori di quanto vorrebbe la legge della semplice proporzionalità. È interessante di osservare che le velocità d'idrolisi e di eterificazione oscillano intorno a valori costanti, benchè il rapporto molecolare tra l'acqua e l'alcool varii fortemente. I risultati contenuti nella tabella 25ª della nostra seconda Nota portavano a concludere che, in queste condizioni, le due velocità dovevano singolarmente assumere valori almeno fra di loro proporzionali; l'insieme di tutti gli altri risultati da noi ottenuti permette di spingere ancor più innanzi le nostre conclusioni e di dire che dette velocità oscillano intorno a valori costanti, non ostante le forti variazioni delle quantità di acqua e di alcool presenti nei sistemi (2).

(1) G. Poma, *Ueber Neutralsalzwirkung Medd. K. Vetéusk. Akad. Nobelinstitut*, Bd. 2, n. 11. Uppsala, 1912.

(2) Nella Nota precedente — questi Rend., anno 1915, 1° sem., pag. 979 — il proto scambiò l'intestazione della tabella 22ª con quella della tabella 23ª, e viceversa; nella tabella 25ª la normalità iniziale dell'acido, acetico invece di 0,12, era 1,2; nella stessa tabella, in terza colonna, al posto di « concentrazioni molecolari di equilibrio » bisogna porre « numero di mole contenute in 100 ccm³ ».

Fisiologia. — *Microtitolazione alla formaldeide, e sue applicazioni in fisiologia. I. Generalità sulla microtitolazione alla formaldeide* (1). Nota del dott. A. Clementi, presentata dal Socio L. Luciani (2).

I.

Generalità sulla microtitolazione alla formaldeide.

Teoria.

La *microchimica* ha per scopo di trasformare in micrometodi, i metodi dell'analisi quantitativa, introducendo nella tecnica dei metodi stessi modificazioni tali, che ne sia resa possibile l'applicazione anche quando la quantità della sostanza da esaminare (solida o liquida) sia estremamente piccola (3).

Se si consideri quale grande difficoltà, anzi quale ostacolo spesso insuperabile, rappresenta nella ricerca biologica la scarsezza del materiale d'indagine, è facile comprendere di quanto ausilio sia questa nuovissima branca della chimica, applicata alla fisiologia e alla biologia. Basterà in proposito ricordare due micrometodi entrati recentemente nella pratica fisiologica: la microanalisi elementare delle sostanze organiche secondo Pregl (4), e la microdeterminazione del glicosio nel sangue secondo Bang (5). Il Pregl ha trasformato gli ordinarii apparecchi, usati nella analisi elementare delle sostanze organiche, in microapparecchi (ricordo ad es.: il microazotometro, la microbilancia, la quale permette di fare delle pesate con l'approssimazione di più o meno un millesimo di milligrammo), mercè l'uso dei quali si può eseguire l'analisi elementare di una sostanza organica adoperando anche solo 10 milligrammi della sostanza stessa; senza l'uso di questo micrometodo, sarebbe stato impossibile di condurre a termine ricerche importantissime come quelle eseguite recentemente da Tamura (6) nel Laboratorio di Kossel, sulla composizione chimica del protoplasma dei batterii, e quelle di Kossel

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 2 luglio 1915.

(3) F. Emich, *Lehrbuch der Mikrochemie.* Wiesbaden, Bergmann, 1911.

(4) Pregl, *Die Mikroelementaranalise.* Handbuch der biochemisch. Arbeitdmethode.

(5) Bang, *Der Blutzucker*, pag. 20. *Eine Mikromethode zur Bestimmung des Blutzuckers* (Wiesbaden; Bergmann, 1913). — *Ein Verfahren zur Mikrobestimmung von Blutbestandteilen.* Biochemische Zeitschrift, 49, 1913.

(6) Tamura, *Zur Chemie der Bakterien* (I, II, III, IV Mittheilung). Zeitschr. f. physiologische Chemie, Bd. 87 e 88 (1913, 1914).

e Edlbacher [1] su alcuni prodotti di scissione di due protamine, la percina e la tinnina.

Bang ha elaborato, apportando modificazioni ingegnose, nella tecnica per raccogliere il sangue e nella concentrazione delle soluzioni un micrometodo per la determinazione del glicosio nel sangue; servendosi di questo micrometodo è stato possibile al Bang stesso di eseguire assai interessanti ricerche ad es. sul contenuto in glicosio del sangue di vertebrati e invertebrati (rettili, anfibii, insetti, cefalopodi ecc.) di piccole dimensioni.

La *trasformazione in micrometodo del metodo di Schiff-Sörensen* [2] della titolazione al formolo degli aminoacidi è l'oggetto delle presenti ricerche. A risolvere tale problema sono stato indotto non solo dalla importanza, che lo studio degli aminoacidi ha acquistato in fisiologia, ma anche dal sempre crescente numero di applicazioni fisiologiche del metodo di Schiff-Sörensen [3]. Ricorderò, ad esempio, che mediante l'applicazione di questo metodo mi è riuscito possibile di elaborare un nuovo procedimento per la determinazione dell'azione dell'arginasi, che mi ha permesso di condurre a termine la ricerca sistematica dell'arginasi nel fegato e in svariati organi di tutte le classi di vertebrati, dalla quale è scaturita la dimostrazione biologica della importanza fisiologica dell'arginasi [4] nell'organismo; e mi è riuscito possibile di elaborare un procedimento per la determinazione dell'azione dei fermenti peptidolitici, che permette di portare la dimostrazione quantitativa assoluta del principio della azione asimmetrica dei fermenti peptidolitici sui polipeptidi racemici [5].

Dalla trasformazione del metodo di Schiff-Sörensen in micrometodo è lecito di sperare quindi le più feconde applicazioni non solo nelle ricerche sul contenuto in aminoacidi del sangue o di altri liquidi dell'organismo, ma anche nelle ricerche sui fermenti che scindono i polipeptidi, e nelle ricerche sull'arginasi. le quali sono state ostacolate e rese ardue dalle difficoltà tecniche, che presentano la preparazione in quantità sufficiente dell'arginina e la sintesi artificiale dei polipeptidi.

[1] Kossel und Edlbacher, *Ueber einige Spaltungsprodukte des Thynnis und Percins.* Zeitschr. f. physiol. Chemie, Bd. 88 (1913).

[2] Schiff, Ann. der Chemie, 310 (1899), 319 (1901), 325 (1902).

[3] Sörensen, *Enzimstudien.* Biochemische Zeitschr., Bd. 7.

[4] Clementi A., *Ueber die Verbreitüng der Arginase in Tierwelt.* Relazione sul IX Congresso internazionale dei fisiologi di Groningen. Arch. di fisiologia, vol. XII; *Ricerche sull'arginasi.* (*Un nuovo metodo titrimetrico per la ricerca dell'arginasi,* Rend. Acc. Lincei); *Sulla diffusione nell'organismo e nel regno dei vertebrati e sulla importanza fisiologica dell'arginasi* (Archivio di fisiologia, vol. XIII, 1915).

[5] Clementi A., *Contributo allo studio dei fermenti peptolitici sui Polipeptidi.* Rendic. Acc. Lincei, vol. XXIV (1915).

Parte sperimentale.

Il punto fondamentale per la soluzione del problema della trasformazione del metodo di Sörensen in *micrometodo* consiste nel dimostrare che i risultati, che si ottengono mediante la microtitolazione nell'analisi delle soluzioni di *aminoacidi allo stato chimicamente puro*, non differiscano molto dai risultati che sono da attendersi in base al calcolo teorico. Il quesito, la cui soluzione apparisce più difficile e a cui mi propongo di rispondere con altre ricerche, è quello riguardante l'applicazione della microtitolazione al formolo, quando nei liquidi da esaminare sono presenti sostanze le quali turbano l'esattezza dei risultati, come ad esempio nel caso in cui si voglia eseguire la determinazione quantitativa assoluta degli aminoacidi nel sangue.

Nelle seguenti analisi dirette a dimostrare sperimentalmente la possibilità di trasformare in micrometodo il metodo della titolazione al formolo, ho introdotto le seguenti modificazioni alle modalità della tecnica indicate da Sörensen:

1° uso di una soluzione 1/50*n* di idrato di sodio;

2° uso di soluzioni 1/1000*n* di aminoacidi o polipeptidi acqua priva di CO^2;

3° uso di burette da 1 cmc. divise in 200 parti;

4° per 10 o 20 cmc. di soluzione di aminoacidi, 1 cmc. di miscela di formolo, in cui l'alcalinità è spinta possibilmente fino al rosso evidente (secondo stadio di Sörensen).

Ho sottoposto all'analisi la glicocolla, la leucina, il dipeptide *dl*-leucilglicina, e il guanidopolipetide glicociamilglicina. Qui sotto sono riportati per esteso anche i dati ottenuti nelle diverse fasi in un caso di microtitolazione al formolo:

Indicatore	Controllo	Soluzione di glicocolla 1/1000*n*
Fenolftaleina	1 ccm. miscela di formolo 9 ccm. di acqua distillata priva di CO^2.	9 ccm. di soluzione 1 ccm. miscela di formolo
	ccm. di Na OH 1/50*n* adoperati nella titolazione	ccm. di Na OH 1/50*n* adoperati nella titolazione
Colore rosa	0,550	0,080
Colore rosso (evidente) . .	0,650	0,160
Colore rosso intenso . . .	0,750	0,260

Tabella I. — **Glicocolla.**

Sostanza adoperata nella analisi	Indicatore adoperato: fenolftaleina	Quantità della soluzione 1/1000 *n*	Quantità adoperata di Na OH 1/50 *n*	
			in ccm.	in % del calcolato
Preparato di glicocolla Kahlbaum	Colore rosso evidente	10 20	0,490 0,965	98 96,5
	Colore rosso intenso	10 20	0,490 0,965	98 99,5

In 10 cmc., rispettivamente in 20 della soluzione di glicocolla adoperata, erano contenuti mgr. 0,751, rispettivamente mgr. 1,502; la microtitolazione ne dà presenti mgr. 0,735, rispettivamente mgr. 1,470.

Tabella II. — **Leucina.**

Sostanza adoperata nella analisi	Indicatore adoperato: Fenolftaleina	Quantità della soluzione 1/1000 *n*	Quantità adoperata di Na OH 1/50 *n*	
			in ccm.	in % del calcolato
Preparato di leucina Kahlbaum	Colore rosso evidente	10 20	0,490 0,950	98 95
	Colore rosso intenso	10 20	0,500 0,975	100 97,5

Tabella III. — **dl-leucilglicina.**

La dl-leucilglicina fu preparata da me secondo il procedimento indicato da Fischer e Brunner (*Synthese von Polypeptiden* XI Liebigs' annalen der Chemie, 340. 1905). . .	Colore rosso evidente	10	0,500	100
	Colore rosso intenso	10	0 500	100

TABELLA IV. — **Glicociamilglicina.**

Sostanza adoperata nella analisi	Indicatore adoperato: fenolftaleina	Quantità della soluzione 1/1000 *n*	Quantità adoperata di Na OH 1/50 *n*	
			in ccm.	in °/₀ del calcolato
La glicociamilglicina adoperata su secondo il procedimento da me indicato (Clementi, *Sintesi della Guanidoglicilglicina*, Gazz. chimica italiana, an. XIV, parte I, fasc. 1). . .	Colore rosso evidente	10 20	0,000 0,000	0 0
	Colore rosso intenso	10 20	0,000 0,000	0 0

La glicociamilglicina si comporta come un corpo neutrale, nella titolazione al formolo.

I risultati ottenuti nell' analisi surriferite portano alle seguenti conclusioni:

1° la *trasformazione della titolazione al formolo* in *microtitolazione* è praticamente possibile e da nel caso di soluzioni pure di *aminoacidi, risultati conformi alla teoria*;

2° *risultati conformi alla teoria* si ottengono non solo nel caso in cui si analizzano soluzioni pure di *aminoacidi come la glicocolla e la leucina*, ma anche nel caso in cui si analizzano *soluzioni pure di polipeptidi*, come la *leucilglicina* e la *glicociamilglicina*;

3° la *quantità di aminoacidi sufficiente* per compiere un'analisi applicando il *metodo della microtitolazione alla formaldeide* può essere anche *inferiore al milligrammo*.

Fisica. — *Altre ricerche sul fenomeno di Stark-Lo Surdo nell'elio.* Nota di RITA BRUNETTI [1], presentata dal Corrispondente A. GARBASSO.

Ho completate le osservazioni sullo spettro dell'elio in campo elettrico col metodo di Lo Surdo, i cui primi risultati sono stati pubblicati nei Rendiconti dei Lincei, seduta dell'11 aprile 1915.

Col semplice metodo spettroscopico non mi era riuscito di osservare una scomposizione sensibile delle righe 6678, 5876 (D_3), 5016, 4713 dell'elio. Ho attribuito questo a difetto di risoluzione, e ho preso a esaminare con uno scaglione le dette righe.

[1] Lavoro eseguito nel R. Istituto di Studi superiori.

Per questo ho proiettato la regione del tubo da esaminare, disposta orizzontalmente, sulla fenditura orizzontale di un piccolo spettroscopio di Hilger munito di reticolo a gradinata.

Lo scaglione che ho adoperato, è composto di 12 lastre di 1 cm. di spessore, col gradino di 1 mm. d'ampiezza. Per cui a $\lambda = 5876$ la distanza di due spettri successivi raggiunge circa 0,6 U. Å., e il potere risolutivo circa $^1/_{100}$ di U. Å.

Il tubo in cui aveva luogo la scarica era di mm. 1,5 circa di diametro. Ho usato potenziali agli estremi del tubo compresi tra un minimo di 4000 volts e un massimo di 8000.

La riga rossa dell'elio (6678) si scinde in tre elementi, come indica la figura 1: vale a dire un elemento centrale immutato, e due dalla parte delle λ brevi a poca distanza reciproca e alla distanza media di 0,6 U. Å. dalla principale (a 5000 volts). L'attacco delle componenti laterali della 6678 è alquanto sfumato e poco luminoso.

Della D_3 si vede risolto il doppietto. Ambedue gli elementi del doppietto sentono l'azione del campo elettrico. L'elemento più intenso è sempre nettamente scisso in due componenti un poco dissimmetriche e a intensità luminosa differente.

L'elemento del doppietto meno intenso si presenta pure scisso in due componenti, modellate, per la forma e la distribuzione della intensità, sopra le componenti del più intenso.

Fig. 1.

Fig. 2.

La riga verde 5016 si scinde, nel campo, in due componenti, ambedue spostate verso le λ lunghe, dalla principale in media discoste di 0,5 U. Å.

La figura 2 indica l'aspetto della 5016.

La 4713 è di difficile osservazione per il colore e la luminosità. Tuttavia in ripetute osservazioni, a osservatori differenti, è parso presentasse due elementi di scomposizione rivolti verso le lunghezze d'onda brevi.

La scomposizione di queste righe è estremamente sensibile alle variazioni del campo nello spazio precatodico. Così che basta il forzare un poco il funzionamento del tubo, cioè bastano le variazioni nel campo elettrico conseguenti a un notevole riscaldamento dell'elettrodo, per produrre variazioni sensibili nell'aspetto della scomposizione.

È certo, in ogni modo, che anche per queste righe l'aumentare del campo fa crescere lo scostamento delle singole componenti dalla posizione di riposo. Tanto che, usando campi di intensità enorme, al primo chiudere del circuito è stato possibile di vedere per un istante la 5876 scissa in due anche senza lo scaglione.

Alle osservazioni pubblicate nella prima Nota e a quelle che qui riferisco, mancano ancora l'esame dello stato di polarizzazione delle componenti la figura di scomposizione di ogni riga, e la visione complessiva del comportamento delle righe di una stessa serie.

L'esame dello stato di polarizzazione eseguito per alcune righe a occhio è stato confermato da prove fotografiche; per altre righe ho dovuto accontentarmi della sola visione diretta: e precisamente questo nel caso delle righe esaminate con lo scaglione.

Nelle osservazioni per visione diretta analizzavo lo stato di polarizzazione inserendo sul cammino del fascio luminoso proveniente dallo spazio precatodico un prisma di Nicol. Per prove fotografiche ottenevo due spettri contemporanei, con un prisma birifrangente collocato avanti alla fenditura, secondo il metodo noto [1].

Riferisco qui riga per riga, così come esse si seguono nelle serie, i risultati dell'analisi di polarizzazione delle singole componenti.

Queste nell'elenco sono indicate con λ_1, λ_2, λ_3, ..., intendendo che sia $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ .... Con n intendo il valore del parametro, che indica il posto della riga nella serie.

I Serie principale.

Nessuna riga di questa serie è stata osservata.

I Serie accessoria.

$n = 3$	*5876*	1° elemento del doppietto	2 componenti	λ_1) non pol. λ_2) pol. ort.
		2° » »	2 »	λ_1) non pol. λ_2) pol. ort.
$n = 4$	*4471* [2]		2 »	λ_1) non pol. λ_2) non pol.
$n = 5$	*4026*		3 »	λ_1) non pol. λ_2) non pol. λ_3) non pol.

[1] A. Lo Surdo, *La scomposizione catodica della quarta riga della serie di Balmer e probabili regolarità*. Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, seduta del 1° marzo 1914.

[2] Non avendo usato lo scaglione per l'osservazione delle righe 4471 e 4026, non ho visto il comportamento delle compagne di queste righe nel doppietto.

II SERIE ACCESSORIA.

$n = 3$	*4713*	2 componenti	λ_1) non pol.
			λ_2) pol. ort. (?)

II SERIE PRINCIPALE.

$n = 3$	*5016*	2 componenti	λ_1) pol. parall.
			λ_2) pol. ort.

III SERIE ACCESSORIA.

$n = 3$	*6778*	3 componenti	λ_1) non pol.
			λ_2) non pol
			λ_3) non pol.
$n = 4$	*4922*	4 "	λ_1) non pol.
			λ_2) pol. ort.
			λ_3) non pol.
			λ_4) non pol. (satellite)
$n = 5$	*4388*	5 "	λ_1) non pol.
			λ_2) pol. ort.
			λ_3) non pol.
			λ_4) pol. ort.
			λ_5) non pol. (satellite)
$n = 6$	*4144*	6 "	λ_1) non pol.
			λ_2) pol. ort.
			λ_3) non pol.
			λ_4) pol. ort.
			λ_5) pol. ort.
			λ_6) non pol. (satellite)

IV SERIE ACCESSORIA.

$n = 3$	*5048*	2 componenti	λ_1) non pol.
			λ_2) non pol. (satellite)

Da queste osservazioni si possono dedurre i seguenti risultati:

1°) *Sia le serie accessorie, che le principali dello spettro dell'elio subiscono l'effetto del campo elettrico.*

2°) *Non tutte le serie dello stesso elemento si comportano allo stesso modo.*

3°) *Nella prima serie accessoria si osserva che solo alla prima riga della serie appartiene un elemento di scomposizione polarizzato: del resto, pei primi tre membri della serie, cresce il numero delle componenti non polarizzate al crescere del parametro che indica il posto della riga nella serie. E questo è eguale al numero delle componenti, più due.*

4°) *In questa stessa serie*, che è una serie di doppietti, per mezzo dello scaglione *si riesce per la prima volta a osservare il comportamento di uno stesso gruppo di righe. E precisamente si vede che le righe dello stesso doppietto si comportano allo stesso modo.*

5°) Se si esclude nella terza serie accessoria l'elemento corrispondente al parametro $n = 3$, vale per gli altri elementi osservati la legge: *gli elementi di scomposizione non polarizzati sono sempre tre, e gli elementi polarizzati ortogonalmente al campo crescono di uno al crescere del parametro.*

6°) In ogni modo, in questa serie, senza escludere nessun elemento, si ha che *il numero delle componenti la figura di scomposizione corrisponde al valore del parametro indicante il posto della riga nella serie,* cioè questa serie si differenzia per il suo comportamento nel campo elettrico da quello della serie di Balmer, solo pel numero delle componenti non polarizzate: e del resto *per essa si può ripetere la legge che Lo Surdo ha enunciato per la serie di Balmer.*

Dal complesso di osservazioni raccolte sopra lo spettro dell'elio in campo elettrico risulta ancora:

Alcune righe esaminate con mezzi di potere risolutivo mediocre pareva non presentassero scissione nel campo elettrico; osservate invece con mezzi di risoluzione di maggior potenza, si sono rivelate nettamente scomposte, fermi restando il valore del campo e le relative condizioni di eccitazione. Con ogni probabilità, variazioni quantitative del campo elettrico non producono una variazione di natura qualitativa nella scomposizione delle righe, ma piuttosto, variazioni sulla ampiezza delle scomposizioni. E la varietà dei risultati dipende, in generale, solo da differente potere risolutivo dei mezzi d'osservazione.

Va infine messo in evidenza un altro dei vantaggi che presenta il metodo di Lo Surdo oltre quello già segnato nella Nota precedente: è quello di mettere a disposizione dello sperimentatore tanta copia di luce da rendere possibile l'uso dello scaglione, e con questo un esame molto intimo della scomposizione elettrica delle righe d'un elemento.

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-XXIV. (1892-1915). Fasc. 1°. Sem. 2°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XXIV. (1892-1915). Fasc. 1-2.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-XI. Fasc. 3.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE
AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie, sino al 4 luglio 1915.

ERRATA-CORRIGE

A pag. 1248 di questi Rend., fasc. 12, 1° sem. 1915, devono essere soppresse le righe 8, 9 e 10.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 9 agosto 1915.* **N. 2.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXIV°. — Fascicolo 2°

2° Semestre.

Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie sino al 18 *luglio* 1915.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI
pervenute all'Accademia durante le ferie del 1915.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Meccanica celeste. — *Sulla regolarizzazione del problema piano dei tre corpi.* Nota del Socio T. Levi-Civita [1].

Le equazioni del problema dei tre corpi (per fissar le idee, sotto forma canonica, in cui sieno assunte come funzioni incognite del tempo t le coordinate e le componenti delle quantità di moto) costituiscono notoriamente un sistema differenziale regolare finchè le posizioni dei tre corpi sono distinte.

Il comportamento del moto in prossimità di un urto fu in questi ultimi tempi oggetto di importanti ricerche, le quali culminano, si può dire, nella scoperta, dovuta al sig. Sundman [2], che (nel caso generale, in cui il momento risultante delle quantità di moto è diverso da zero) il moto è prolungabile analiticamente anche al di là di un urto, non ostante la singolarità delle equazioni differenziali. Questo risultato rivela il carattere inessenziale (dal punto di vista matematico) della detta singolarità, e induce a domandarsi se non sia possibile di farla scomparire con mezzi diretti: intendo rimanendo nell'ambito dei sistemi dinamici, con opportuni cambiamenti di variabile indipendente e di funzioni incognite.

Nel caso particolare del problema ristretto, mostrai, alcuni anni or sono [3], come l'intorno d'uno dei due corpi di massa finita si possa rego-

[1] Pervenuta all'Accademia il 13 luglio 1915.

[2] *Mémoire sur le problème des trois corps*, Acta Mathematica, tomo 36, 1912, pp. 105-179.

[3] *Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps*, Acta Mathematica, tomo 30, 1906, pp. 306-327.

larizzare con una trasformazione affatto elementare (e atta a conservare la forma canonica).

Qualche ulteriore accorgimento — di cui la presente Nota — consente addirittura la regolarizzazione completa per il problema piano dei tre corpi. In modo preciso si constaterà che si possono scegliere i parametri determinativi dello stato di moto e la variabile indipendente, per guisa che le equazioni differenziali del problema offrano comportamento regolare anche per posizioni coincidenti di due dei tre corpi (rimanendo esclusa l'eventualità di una collisione generale, tostochè si supponga che non si annulli la costante delle aree): beninteso, senza perdere la forma canonica, nè la regolarità per ogni altro stato di moto.

La restrizione che si tratti di moto piano sembra concettualmente irrilevante, e si è tratti a presumere che analoga regolarizzazione possa raggiungersi anche per il problema generale. Ho incontrato finora qualche difficoltà nella costruzione delle trasformazioni regolarizzanti; ma non dispero di superarla con studio ulteriore.

1. — Formule di Lagrange e di R. Ball.

Siano P_ν $(\nu = 0, 1, 2)$ i tre corpi, m_ν le loro masse, O il baricentro. Introduciamo i tre vettori

$$\mathbf{R}_\nu = P_\nu - O \qquad (\nu = 0, 1, 2)$$

e le loro differenze (corrispondenti ai tre lati del triangolo $P_0 P_1 P_2$)

$$\text{(1)} \qquad \mathbf{r}_0 = P_2 - P_1 = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 \quad , \quad \mathbf{r}_1 = P_0 - P_2 = \mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_2 \, , \\ \mathbf{r}_2 = P_1 - P_0 = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0 \, ,$$

convenendo di designarne le lunghezze con R_0, R_1, R_2, o rispettivamente r_0, r_1, r_2.

Sia poi P un punto generico, e si ponga

$$\mathbf{d}_\nu = P_\nu - P \quad , \quad \mathbf{d} = O - P \, ,$$

intendendo altresì che d_ν e d rappresentino le lunghezze di questi vettori (distanze di P da P_ν e dal baricentro O).

Si ha ovviamente

$$\mathbf{d}_\nu = P_\nu - P = (P_\nu - O) + (O - P) = \mathbf{R}_\nu + \mathbf{d} \, ,$$

da cui, formando $\sum_0^2{}_\nu \, \mathbf{d}_\nu \times \mathbf{d}_\nu$, e tenendo conto che, per essere O il baricentro,

$$\text{(2)} \qquad \sum_0^2{}_\nu \, m_\nu \mathbf{R}_\nu = 0 \, ,$$

si ricava la formula di Lagrange

$$\sum_0^2{}_\nu m_\nu d_\nu^2 = \sum_0^2{}_\nu m_\nu R_\nu^2 + m d^2$$

(m designa la massa complessiva $m_0 + m_1 + m_2$ dei tre punti P_ν).

Facciamo coincidere P, successivamente, con P_0, P_1, P_2, scrivendo per brevità J in luogo di $\sum_0^2{}_\nu m_\nu R_\nu^2$ (momento d'inerzia polare rispetto al baricentro). Avremo

$$\left\{\begin{array}{l} m_1 r_2^2 + m_2 r_1^2 = J + m R_0^2, \\ m_2 r_0^2 + m_0 r_2^2 = J + m R_1^2, \\ m_0 r_1^2 + m_1 r_0^2 = J + m R_2^2. \end{array}\right.$$

Moltiplichiamo queste equazioni ordinatamente per $\frac{m_0}{m}, \frac{m_1}{m}, \frac{m_2}{m}$, e sommiamo, ponendo

$$m_0^* = \frac{m_1 m_2}{m} \quad , \quad m_1^* = \frac{m_2 m_0}{m} \quad , \quad m_2^* = \frac{m_0 m_1}{m}. \tag{3}$$

Ne scende la relazione notevole

$$J = \sum_0^2{}_\nu m_\nu R_\nu^2 = \sum_0^2{}_\nu m_\nu^* r_\nu^2. \tag{4}$$

In modo sostanzialmente identico si stabilisce una espressione, dovuta a R. Ball [1], della forza viva dei tre corpi.

Si consideri infatti il loro moto riferito al baricentro O, o, più esattamente, ad un sistema di assi di direzione invariabile coll'origine in O. I vettori $\mathbf{R}_\nu$ sono in tal caso funzioni del tempo t; e la velocità di P_ν rimarrà definita da $\dot{\mathbf{R}}_\nu$, il punto sovrapposto designando derivazione rispetto a t.

Dalla derivazione delle (1), (2) segue che i vettori $\dot{\mathbf{R}}_\nu$ (velocità *assolute* dei punti P_ν) e $\dot{\mathbf{r}}_\nu$ (velocità *relative*: specificamente, $\dot{\mathbf{r}}_0$ velocità di P_2 rispetto a P_1, ecc.) sono legati dalle stesse relazioni (lineari) intercedenti fra $\mathbf{R}_\nu$ e $\mathbf{r}_\nu$. Ciò basta ad assicurare che la forza viva del sistema dei tre corpi

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_0^2{}_\nu m_\nu V_\nu^2 \quad (V_\nu \text{ lunghezza del vettore } \dot{\mathbf{R}}_\nu), \tag{5}$$

[1] Cfr. E. J. Routh, *Treatise on the dynamics of a system of rigid bodies* (elementary part), 6ª ediz. [London, Macmillan, 1897], § 424.

alla quale, nelle considerazioni precedenti, fa riscontro $\frac{1}{2}$ J, può anche esprimersi sotto la forma

(6) $$T = \frac{1}{2} \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu^\star\, v_\nu^2 \quad (v_\nu \text{ lunghezza del vettore } \dot{\mathbf{r}}_\nu).$$

2. — Funzione lagrangiana in coordinate assolute — Legame baricentrale — Trasformazione in coordinate relative a legame geometrico.

Ritenuto che i tre corpi si attraggano secondo la legge di Newton, si ha la funzione delle forze

(7) $$U = f\left(\frac{m_1 m_2}{r_0} + \frac{m_2 m_0}{r_1} + \frac{m_0 m_1}{r_2}\right) = fm \sum_0^2{}_\nu \frac{m_\nu^\star}{r_\nu}.$$

f designando la costante d'attrazione universale.

Parametri atti a fissare la posizione dei tre corpi sono per es. le loro coordinate assolute (baricentrali) X_ν, Y_ν, Z_ν (componenti dei vettori $\mathbf{R}_\nu$). A mezzo loro e delle loro derivate $\dot{X}_\nu, \dot{Y}_\nu, \dot{Z}_\nu$, si possono ovviamente esprimere U e T, e quindi

(8) $$L = T + U.$$

In questa accezione L costituisce la funzione lagrangiana del problema, e dà luogo, quando si voglia, alle equazioni esplicite del moto, di secondo ordine nelle nove coordinate assolute X_ν, Y_ν, Z_ν, *trattate a priori come indipendenti*. In realtà esse sono legate dalla (2), ossia dalle tre equazioni che se ne ottengono proiettando sugli assi, ed è anche perfettamente legittimo il tenerne conto preventivamente, riducendo la L mediante la (2), con che essa viene a dipendere da sei (anzichè da nove) parametri e loro derivate prime. Tali sei parimetri possono, ben si intende, essere scelti a piacere, sotto l'unica condizione che le espressioni risultanti per le X_ν, Y_ν, Z_ν (o, se si vuole, per i vettori $\mathbf{R}_\nu$) verifichino la (2).

Per lo scopo che ci proponiamo, è essenziale l'osservazione seguente:

Ai tre vettori $\mathbf{R}_\nu$, legati dalla (2), corrispondono *biunivocamente* i tre vettori $\mathbf{r}_\nu$ definiti dalle (1) e in conformità sottoposti al vincolo

(9) $$\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = 0.$$

Per constatarlo [dacchè già le (1) dànno le $\mathbf{r}$ in funzione lineare delle $\mathbf{R}$], basta mostrare che le (1) e (2) sono risolubili rapporto alle $\mathbf{R}$. All'uopo, fissiamone una, per es. $\mathbf{R}_0$, e mettiamo in evidenza nella (2) il termine $m\mathbf{R}_0$ $(m = m_0 + m_1 + m_2)$. Avremo

$$m\mathbf{R}_0 + m_1(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0) + m_2(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_0) = 0.$$

Questa, in base alle (1), fornisce senz'altro la voluta espressione di $\mathbf{R}_0$. Complessivamente si ha

$$
(10) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\mathbf{R}_0 &= \frac{m_2}{m}\mathbf{r}_1 - \frac{m_1}{m}\mathbf{r}_2 , \\
\mathbf{R}_1 &= \frac{m_0}{m}\mathbf{r}_2 - \frac{m_2}{m}\mathbf{r}_0 , \\
\mathbf{R}_2 &= \frac{m_1}{m}\mathbf{r}_0 - \frac{m_0}{m}\mathbf{r}_1 ,
\end{aligned}
\right.
$$

c. d. d.

Ciò posto, è chiaro che l'espressione di L, ridotta a sei gradi di libertà, si può raggiungere indifferentemente:

sia, nel modo poc'anzi accennato, partendo dalla L stessa in coordinate assolute (le componenti X_ν, Y_ν, Z_ν delle $\mathbf{R}_\nu$) e loro derivate, e introducendo sei parametri indipendenti in modo che rimanga identicamente verificato il legame baricentrale (2);

sia anche, trasformando dapprima L in coordinate relative (le componenti x_ν, y_ν, z_ν dei vettori $\mathbf{r}_\nu$) e loro derivate, e riducendo poi a sei parametri in base alla (9).

Ci atterremo, da ora innanzi, a quest'ultimo criterio.

3. — Cambiamento della variabile indipendente. Trasformazione di Darboux.

Un sistema lagrangiano a vincoli indipendenti dal tempo, proveniente da una funzione del tipo

$$L = T + U ,$$

ammette notoriamente l'integrale delle forze vive

$$(11) \qquad T - U = E \qquad \text{(E costante)},$$

e, in quanto si risguardi attribuito un valore fisso all'energia totale E, può essere compendiato nel principio della minima azione. Esso equivale cioè alla stazionarietà (subordinata ai vincoli) di un integrale A (azione) indipendente dalla variabile t. Si sa che

$$A = \int \sqrt{2(U + E)}\, ds ,$$

dove

$$(12) \qquad ds^2 = 2\,T\,dt^2 ,$$

ossia, in base alla (6),

$$(13) \qquad ds^2 = \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu^*(dx_\nu^2 + dy_\nu^2 + dz_\nu^2) .$$

In luogo del tempo t, si immagini di assumere come variabile indipendente un'ausiliaria τ, legata a t dalla formula

$$d\tau = \mathrm{U}\, dt. \tag{14}$$

Finchè si considerano posizioni dei tre corpi distinte (e a distanza finita), U rimane sempre finita e positiva. La sostituzione è quindi legittima; ed è concettualmente indifferente risguardare t o τ come variabile indipendente. Viceversa, per riconoscere il comportamento del sistema nell'immediata prossimità dei detti stati eccezionali, la variabile τ è più opportuna di t.

Poniamo ancora

$$d\sigma^2 = \mathrm{U}\, ds^2, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{T} = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{U}}, \tag{16}$$

con che, in base alle (14) e (12), $2\boldsymbol{T} d\tau^2$ non è altro che

$$2\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{U}}\mathrm{U}^2 dt^2 = \mathrm{U}\, ds^2.$$

Ne consegue, in base alle (15) e (13),

$$\boldsymbol{T} = \tfrac{1}{2}\frac{d\sigma^2}{d\tau^2} = \frac{\mathrm{U}}{2}\sum_0^2{}_{\nu}\, m_\nu^\star (x_\nu'^2 + y_\nu'^2 + z_\nu'^2), \tag{17}$$

designandosi con apici le derivazioni rispetto a τ.

L'integrale A può in conformità essere scritto

$$\mathrm{A} = \int \sqrt{2\left(1 + \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{U}}\right)}\cdot\sqrt{\mathrm{U}}\, ds = \int \sqrt{2\left(1 + \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{U}}\right)}\quad d\sigma, \tag{18}$$

e la (11)

$$\boldsymbol{T} - \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{U}} = 1. \tag{19}$$

La stazionarietà di A sotto i vincoli (9) e (11) equivale, come s'è detto, alle equazioni differenziali del problema dei tre corpi. Attese le (17), (18), (19), *le cose vanno manifestamente come se, τ fungendo da tempo, si trattasse di un sistema dinamico sottoposto agli stessi vincoli* (9), *avente per forza viva $\boldsymbol{T}$, per potenziale $\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{U}}$ e per costante delle forze vive l'unità.* Si riconosce in questo enunciato una *trasformazione di Darboux* (¹), aggiuntavi la specificazione del tempo.

(¹) Cfr. per es. Appell, *Traité de mécanique rationnelle,* tomo 2, 2ª ediz. [Paris, Gauthier-Villars, 1911], pag. 479.

La funzione lagrangiana del problema così trasformato è

$$\Lambda = T + \frac{E}{U}, \tag{20}$$

con T dato dalla (17), e U, come sempre, dalla (7).

4. — Problema piano — Trasformazione anticritica.

Quanto precede vale naturalmente anche nell'ipotesi che il moto segua sempre in un medesimo piano. Soltanto, ove si assuma tale piano per piano coordinato $z = 0$, si possono in più ritenere nulle le tre z_ν, e il problema si presenta con quattro gradi di libertà, avendosi sei coordinate, le x_ν, y_ν (componenti dei vettori $\mathbf{r}_\nu$), legate dalla solita (9), che equivale alle

$$\sum_0^2{}_\nu x_\nu = 0 \quad , \quad \sum_0^2{}_\nu y_\nu = 0 . \tag{21}$$

Rispetto a queste coordinate, le mutue distanze r_ν (e, di riverbero, U e T) sono affètte da singolarità *critiche* in corrispondenza alle coppie di valori

$$x_0 = y_0 = 0 \quad ; \quad x_1 = y_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = y_2 = 0 .$$

Questo comportamento critico si fa scomparire mediante le trasformazioni quadratiche compendiate nella formula

$$x_\nu + i y_\nu = (\xi_\nu + i\eta_\nu)^2 \qquad \left(\nu = 0, 1, 2\,; i = \sqrt{-1}\right), \tag{22}$$

che equivale alle

$$x_\nu = \xi_\nu^2 - \eta_\nu^2 \quad , \quad y_\nu = 2\xi_\nu \eta_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2) . \tag{22'}$$

Infatti, detto ϱ_ν il modulo di $\xi_\nu + i\eta_\nu$, si ha, dalla (22),

$$r_\nu = \varrho_\nu^2 = \xi_\nu^2 + \eta_\nu^2 .$$

L'espressione (7) di U diviene, in conformità,

$$U = fm \sum_0^2{}_\nu \frac{m_\nu^*}{\varrho_\nu}, \tag{23}$$

che è, come si vede, razionale nelle nuove variabili ξ_ν, η_ν.

Le equazioni (21) dei vincoli assumono l'aspetto

$$\sum_0^2{}_\nu \xi_\nu^2 - \sum_0^2{}_\nu \eta_\nu^2 = 0 \quad , \quad \sum_0^2{}_\nu \xi_\nu \eta_\nu = 0 . \tag{24}$$

Deriviamo la (22) rispetto a τ, e prendiamo i moduli. Avremo

$$x_\nu'^2 + y_\nu'^2 = 4\varrho_\nu^2(\xi_\nu'^2 + \eta_\nu'^2),$$

con che la (17), fattovi $z_\nu = 0$, porge

$$T = 2U \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu^* \,\varrho_\nu^2(\xi_\nu'^2 + \eta_\nu'^2). \tag{25}$$

5. — Introduzione di parametri indipendenti. Complementi qualitativi.

Siano q_h $(h = 0, 1, 2, 3)$ coordinate lagrangiane rispetto ai legami (24) per il sistema dinamico di cui stiamo occupandoci [avente la (25) per forza viva e la (23) per funzione delle forze]. Ciò significa che si può porre

$$\xi_\nu = \xi_\nu(q_0, q_1, q_2, q_3), \quad \eta_\nu = \eta_\nu(q_0, q_1, q_2, q_3) \quad (\nu = 0, 1, 2), \tag{26}$$

rimanendo identicamente soddisfatte le (24).

Specifichiamo il comportamento qualitativo delle risolventi parametriche (26), mostrando che, mediante scelta opportuna delle q, è lecito risguardare le ξ_ν, η_ν quali funzioni regolari delle q stesse, in corrispondenza a tutte le possibili configurazioni del sistema (reali, a distanza finita), fatta solo eccezione per la sestupla $\xi_\nu = \eta_\nu = 0$ $(\nu = 0, 1, 2)$, caratteristica di una coincidenza di tutti e tre i corpi.

All'uopo, basta assicurarsi che le (24) sono effettivamente risolubili rispetto a due delle sei variabili che vi compariscono, nell'intorno di ogni sistema di valori (finiti, e non tutti nulli) che le verifichino. Questo, a sua volta, risulta dalla considerazione della matrice dei loro primi membri

$$\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 - \eta_0^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2 \quad , \quad \xi_0\eta_0 + \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2$$

rispetto ai sei argomenti $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \eta_0, \eta_1, \eta_2$. Tale matrice è

$$\left\| \begin{matrix} 2\xi_0 & 2\xi_1 & 2\xi_2 & -2\eta_0 & -2\eta_1 & -2\eta_2 \\ \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 & \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 \end{matrix} \right\| .$$

Il suo quadrato vale

$$\left| \begin{matrix} 4(\varrho_0^2 + \varrho_1^2 + \varrho_2^2) & 0 \\ 0 & \varrho_0^2 + \varrho_1^2 + \varrho_2^2 \end{matrix} \right| = 4(\varrho_0^2 + \varrho_1^2 + \varrho_2^2)^2,$$

e può quindi annullarsi (nel campo reale) solo a patto che si annullino tutte le ϱ, ossia tutte le ξ e tutte le η,

c. d. d.

Alla stessa conclusione si perviene combinando le due osservazioni seguenti:

1°) In coordinate relative x_ν, y_ν, i vincoli avevano la forma lineare (21)

$$\sum_0^2{}_\nu\, x_\nu = 0 \quad , \quad \sum_0^2{}_\nu\, y_\nu = 0 \,,$$

ed erano quindi risolubili, univocamente e senza eccezione, rispetto a due delle sei variabili: una x_ν ed una y_ν (in funzione delle altre quattro).

2°) Dacchè escludiamo che tutte le sei variabili ξ, η si annullino, una almeno delle tre equazioni (22) è risolubile (senza introduzione di singolarità critiche) rapporto a $\xi_\nu + i\eta_\nu$. Due delle ξ_ν, η_ν sono pertanto esprimibili regolarmente mediante le corrispondenti x_ν, y_ν; quindi, per la osservazione precedente, mediante le rimanenti quattro x, y; ossia infine, attese le (22), mediante le rimanenti quattro ξ, η: e ciò dimostra l'asserto.

Se ne inferisce in particolare che, se una delle ϱ, diciamo ϱ_0, si annulla, possono fungere da parametri q: $\xi_0, \eta_0, \xi_1, \eta_1$ (ovvero $\xi_0, \eta_0, \xi_2, \eta_2$). Infatti le altre due ϱ sono allora diverse da zero [1], e le (24), il cui determinante funzionale rispetto a ξ_ν, η_ν vale $2\varrho_\nu^2$, si possono pensare risolute rispetto a ξ_2, η_2, rimanendo indipendenti $\xi_0, \eta_0, \xi_1, \eta_1$ (come anche rispetto a ξ_1, η_1, rimanendo allora indipendenti le altre quattro).

Giova aggiungere che *la funzione delle forze* $\frac{1}{U}$, *anzi addirittura i tre rapporti* $\frac{1}{\varrho_\nu^2 U}$ $(\nu = 0, 1, 2)$ *si mantengono regolari*, non soltanto quando tutte le mutue distanze sono finite e diverse da zero, ma, *anche nell'intorno di un generico urto binario* (una delle ϱ nulla e le altre due diverse da zero). Sia infatti, come sopra, ϱ_0^2 quella delle distanze che si vuol considerare nell'intorno del valore zero; ϱ_1^2 e ϱ_2^2 hanno allora limite inferiore > 0. Dalla (23) si ha

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{fm\left\{\frac{m_0^\star}{\varrho_0^2} + \frac{m_1^\star}{\varrho_1^2} + \frac{m_2^\star}{\varrho_2^2}\right\}} = \frac{\varrho_0^2}{fm\left\{m_0^\star + m_1^\star\frac{\varrho_0^2}{\varrho_1^2} + m_2^\star\frac{\varrho_0^2}{\varrho_2^2}\right\}},$$

donde apparisce che $\frac{1}{\varrho_0^2 U}$, e *a fortiori* $\frac{1}{U}$, si comporta regolarmente anche per $\xi_0 = \eta_0 = 0$.

[1] In quanto, qualora due ϱ (ossia due lati del triangolo dei tre corpi) si annullassero, dovrebbe di necessità annullarsi anche la terza, il che abbiamo escluso.

6. — Forma canonica — Funzione caratteristica.

Introdotte (colle specificazioni qualitative di cui al precedente §) le coordinate lagrangiane q_h $(h = 0, 1, 2, 3)$, le equazioni del moto si potrebbero senz'altro desumere dalla funzione lagrangiana $\mathcal{A}$, avendo cura di esprimerla mediante le q_h e le $q'_h = \frac{dq_h}{d\tau}$, a norma delle (26).

Per lo scopo che ci proponiamo, non è indicata la forma lagrangiana (che risulterebbe ancora affètta da singolarità, quando le posizioni dei tre corpi non sono tutte distinte). Ma conviene ricorrere alla forma canonica, associando alle q_h le ausiliarie (coniugate)

$$p_h = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial q'_h} = \frac{\partial T}{\partial q'_h}.$$

Detta

$$2\Theta = \sum_{hk}^{3}{}_{0}\, a^{(hk)} p_h p_k \tag{27}$$

la forma quadratica (degli argomenti p) reciproca alla $2T$ (degli argomenti q'), la funzione caratteristica del sistema canonico proveniente dalla $\mathcal{A} = T + \frac{E}{U}$ è, classicamente,

$$H = \Theta - \frac{E}{U}, \tag{28}$$

l'integrale delle forze vive (19) assumendo la forma

$$H = 1. \tag{29}$$

Tutto ciò vale in particolare ove si assumano quali parametri q quattro delle coordinate relative x_ν, y_ν, per es. x_0, y_0, x_1, y_1. Una tale scelta, che si presenta spontanea ed è infatti conforme all'uso comune, ha però l'inconveniente già rilevato, di lasciar sussistere singolarità critiche nella U. Non sarà tuttavia inutile di esplicitare intanto la Θ in coordinate x_0, y_0, x_1, y_1 e relative coniugate $p_{x_0}, p_{y_0}, p_{x_1}, p_{y_1}$: ce ne varremo tra poco per rendere più spedito il passaggio alla forma definitiva.

Dacchè, a norma dei vincoli (21),

$$x_2 = -(x_0 + x_1) \quad , \quad y_2 = -(y_0 + y_1),$$

la T rimane definita da

$$2T = U\{(m_0^* + m_2^*)(x_0'^2 + y_0'^2) + (m_1^* + m_2^*)(x_1'^2 + y_1'^2) + \\ + 2m_2^*(x_0' x_1' + y_0' y_1')\},$$

se ne desume agevolmente, ricordando le (3), la forma reciproca

$$(30)\qquad 2\Theta = \frac{1}{U}\{a(p_{x_0}^2 + p_{y_0}^2) + b(p_{x_1}^2 + p_{y_1}^2) - 2c(p_{x_0}p_{x_1} + p_{y_0}p_{y_1})\}$$

in cui si è posto, per brevità,

$$(31)\qquad a = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\quad , \quad b = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_2}\quad , \quad c = \frac{1}{m_2}\,.$$

7. — Osservazioni intese a facilitare la trasformazione della Θ.

Quando si eseguisce una generica trasformazione sui parametri indipendenti q, passando a nuove variabili χ, le coniugate p si trasformano notoriamente come le derivate di una medesima funzione φ. Di qui una regola per ottenere comprensivamente i coefficienti — diciamo $\alpha^{(jl)}$ — della espressione trasformata di Θ. Si parte dal parametro differenziale

$$\Delta\varphi = \sum_{0}^{3}{}_{hk}\, a^{(hk)} \frac{\partial\varphi}{\partial q_h}\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}$$

relativo alle variabili q, e, in esso, si sostituiscono materialmente, al posto delle $\frac{\partial\varphi}{\partial q_h}$, i loro valori

$$\sum_{0}^{3}{}_{j} \frac{\partial\varphi}{\partial \chi_j}\frac{\partial\chi_j}{\partial q_h}$$

in termini delle nuove derivate; e così per le $\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}$. Nella espressione risultante del parametro si leggono senz'altro i coefficienti ricercati.

Stabiliamo ancora un paio di identità, che ci saranno utili tra un momento.

Una trasformazione binaria del tipo (22) compendiata in

$$x + iy = (\xi + i\eta)^2\,,$$

ove si sostituiscano provvisoriamente alle $x\,,y\,;\,\xi\,,\eta$ le combinazioni complesse

$$(32)\qquad \begin{cases} z = x + iy\quad , \quad \bar{z} = x - iy \\ \zeta = \xi + i\eta\quad , \quad \bar{\zeta} = \xi - i\eta\,, \end{cases}$$

equivale a

$$z = \zeta^2\quad , \quad \bar{z} = \bar{\zeta}^2\,,$$

e si presenta così a variabili separate.

Ne segue

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{1}{2\zeta}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} \quad , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{2\bar{\zeta}}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\zeta}} .$$

D'altra parte, in virtù delle (32),

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} \quad , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\right) ,$$

e quindi

$$(33) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + i\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 2\dfrac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} , \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - i\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 2\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} , \end{cases}$$

colle analoghe relative alle lettere $\xi, \eta, \zeta, \bar{\zeta}$.

Ne ricaviamo, in primo luogo,

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 4\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{1}{\bar{\zeta}\zeta}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\zeta}}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = \frac{1}{4\zeta\bar{\zeta}}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2\right\} ,$$

donde, attribuendo alle varie lettere un indice ν $(\nu = 0 , 1)$ e ponendo mente alla identità $\zeta_\nu \bar{\zeta}_\nu = \varrho_\nu^2$,

$$(34) \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_\nu}\right)^2 = \frac{1}{4\varrho_\nu^2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_\nu}\right)^2\right\} .$$

Prendiamo poi le due formule

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z_0} = \frac{1}{2\zeta_0}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_0} \quad , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_1} = \frac{1}{2\bar{\zeta}_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\zeta}_1} ,$$

e moltiplichiamole membro a membro. Avremo

$$4\frac{\partial\varphi}{\partial z_0}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_1} = \frac{1}{\zeta_0\bar{\zeta}_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_0}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\zeta}_1} ,$$

che, per le (33) ed analoghe, può essere scritta

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right) = \frac{1}{4\zeta_0\bar{\zeta}_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_0} - i\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_0}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1} + i\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_1}\right) .$$

Ove, nel secondo membro, si moltiplichi sopra e sotto per $\bar{\zeta}_0\zeta_1$ e si tenga

conto una volta ancora delle identità $\zeta_\nu \bar{\zeta}_\nu = \varrho_\nu^2$, si ha, eguagliando le parti reali,

$$(35) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} =$$

$$= \frac{1}{4\varrho_0^2\varrho_1^2}\left\{(\xi_0\xi_1 + \eta_0\eta_1)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_0}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta_0}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_1}\right) - \right.$$

$$\left. - (\xi_0\eta_1 - \eta_0\xi_1)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_0}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial\eta_0}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1}\right)\right\}.$$

8. — Espressione esplicita di Θ in coordinate $\xi_0, \eta_0, \xi_1, \eta_1$.

Immaginiamo ormai di assumere quali parametri indipendenti $\xi_0, \eta_0, \xi_1, \eta_1$.

Per formare l'espressione di Θ relativa a tali parametri, la via più spiccia è di prendere le mosse dalla (30), e di trasformarla, secondo i criterii esposti nel precedente §, a norma delle (22) (corrispondenti ai valori 0 ed 1 dell'indice ν). Alla (30) fa riscontro

$$\Delta\varphi = \frac{1}{U}\left\{a\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\right)^2\right] + \right.$$

$$\left. + b\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2\right] - 2c\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right]\right\},$$

la cui trasformazione è immediata in base alle (34) e (35).

Sostituendo addirittura nel $\Delta\varphi$ così trasformato, al posto delle derivate, i simboli $p_{\xi_0}, p_{\eta_0}, p_{\xi_1}, p_{\eta_1}$ delle variabili coniugate, si ha la cercata espressione di Θ:

$$(36) \qquad 2\Theta = \frac{1}{4U}\left\{\frac{a}{\varrho_0^2}\left(p_{\xi_0}^2 + p_{\eta_0}^2\right) + \frac{b}{\varrho_1^2}\left(p_{\xi_1}^2 + p_{\eta_1}^2\right) - \right.$$

$$- \frac{2c}{\varrho_0^2\varrho_1^2}\Big[(\xi_0\xi_1 + \eta_0\eta_1)(p_{\xi_0}p_{\xi_1} + p_{\eta_0}p_{\eta_1}) -$$

$$\left. - (\xi_0\eta_1 - \eta_0\xi_1)(p_{\xi_0}p_{\eta_1} - p_{\eta_0}p_{\xi_1})\Big]\right\}.$$

9. — Regolarità.

Già abbiamo rilevato, alla fine del § 5, che $\frac{1}{U}$ e $\frac{1}{\varrho_\nu^2 U}$ sono olomorfe anche nell'intorno di un generico urto binario.

La (36) mostra che lo stesso avviene di Θ.

Ne consegue che *il sistema canonico di funzione caratteristica*

$$H = \Theta - \frac{E}{U} \quad [\Theta \text{ essendo data dalla (36)}]$$

nelle quattro coppie di argomenti coniugati

$$\begin{matrix} \xi_0 & \eta_0 & \xi_1 & \eta_1 \\ p_{\xi_0} & p_{\eta_0} & p_{\xi_1} & p_{\eta_1} \end{matrix}$$

ha comportamento perfettamente regolare dovunque le $\xi_0, \eta_0, \xi_1, \eta_1$ *possono fungere da coordinate lagrangiane*: in particolare per es. (cfr. § 5) nell'intorno di un urto fra P_2 e P_1 ($\varrho_0 = 0$), ovvero fra P_2 e P_0 ($\varrho_1 = 0$). Più generalmente, del resto, si può dire: fatta solo eccezione per $\varrho_2 = 0$ (urti P_0, P_1).

Ben si intende che un tale comportamento ha carattere invariantivo di fronte alle trasformazioni biunivoche e regolari dei quattro parametri lagrangiani. In modo preciso, qualora alle suddette $\xi_0, \eta_0, \xi_1, \eta_1$ si sostituisca una quaderna qualsiasi q_0, q_1, q_2, q_3, legata ad esse da formule di trasformazione biunivoche e regolari in un certo campo, la funzione H, e con essa il sistema canonico trasformato, rimane regolare in quel campo.

È chiaro, d'altra parte, che, come i parametri $\xi_0, \eta_0, \xi_1, \eta_1$ sono legittimi e regolarizzanti dovunque tranne che per $\varrho_2 = 0$, così lo sarebbero i parametri $\xi_0, \eta_0, \xi_2, \eta_2$, colla sola esclusione di $\varrho_1 = 0$ (urti P_0, P_2).

10. — Considerazioni riassuntive.

Ammesso che il momento risultante delle quantità di moto sia diverso da zero, è esclusa — teorema di Sundman [1], conosciuto già da Weierstrass [2] — l'eventualità di una collisione generale.

Così stando le cose, ricordiamo, dal § precedente, che H è regolarizzabile nell'intorno di ogni urto binario, assumendo quali parametri indipendenti $\xi_0, \eta_0, \xi_1, \eta_1$, ovvero $\xi_0, \eta_0, \xi_2, \eta_2$. Combiniamo tale risultato col carattere invariantivo della regolarità (di fronte a cambiamenti qualsivogliano, purchè anch'essi regolari, dei parametri); e appoggiamoci sulla circostanza, già rilevata al § 5, che, rispetto ai vincoli (24), è possibile l'introduzione di parametri lagrangiani più simmetrici delle quaderne $(\xi_0, \eta_0, \xi_1, \eta_1)$, $(\xi_0, \eta_0, \xi_1, \eta_1)$ [nonchè dell'analoga $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$] ed esenti dalla ecce-

[1] *Recherches sur le problème des trois corps*, Acta Societatis Fennicae, vol. XXXIV, 1907, § 12.

[2] Veggasi in proposito, G. Mittag-Leffler, *Zur Biographie von Weierstrass*, Acta Mathematica, tomo 35, 1911, pag. 30.

zione che ciascuna di queste presenta, atti quindi a conferire alle risolventi (25) carattere regolare proprio condizionato (rimanendo nel caso presente fuor di questione l'annullarsi di tutte le ϱ).

Fatta pertanto una scelta concreta di parametri q_0, q_1, q_2, q_3, *aventi il requisito suddetto, il sistema differenziale da cui dipende il problema piano dei tre corpi rimane regolarizzato completamente* (cioè nell'intorno di qualsiasi stato — *urti binarî compresi* — effettivamente raggiungibile durante il corso del moto), *nella forma canonica di cui a* § 6.

In questo sistema: la variabile indipendente è τ, legata al tempo t dalla posizione (14)

$$d\tau = \mathrm{U}\,dt\,;$$

le funzioni incognite sono le q e le p. Le prime, q_0, q_1, q_2, q_3, rappresentano coordinate lagrangiane rispetto ai vincoli (24)

$$\sum_0^2{}_\nu\, \xi_\nu^2 = \sum_0^2{}_\nu\, \eta_\nu^2 \quad , \quad \sum_0^2{}_\nu\, \xi_\nu \eta_\nu = 0\,,$$

le ξ_ν, η_ν essendo a lor volta coordinate anticritiche del sistema dei tre corpi, definite, in funzione delle componenti x_ν, y_ν delle tre mutue distanze, dalle posizioni (22)

$$x_\nu + iy_\nu = (\xi_\nu + i\eta_\nu)^2\,.$$

Le coniugate p sono funzioni lineari delle $\frac{dq}{d\tau}$, le quali concettualmente non hanno interesse, una volta riconosciuto il comportamento regolare delle q, e quindi delle loro derivate, in termini di τ.

Per la stessa definizione delle q, le ξ, η ne sono funzioni regolari. Attese le (22), siamo senz'altro condotti a concludere che, come le q, così anche le coordinate relative x_ν, y_ν sono funzioni ovunque regolari (anche nell'eventualità di urti) del parametro τ: si ritrova così (per il problema piano, e con inessenziale diversità di variabile indipendente) il risultato di Sundman.

Dalla relazione $d\tau = \mathrm{U}dt$ scende ovviamente, in base alla (23), che τ, nell'intorno di un urto verificantesi all'istante t_1, è sviluppabile per potenze di $(t - t_1)^{1/3}$, ecc.

Riservo ad una prossima comunicazione la introduzione effettiva di convenienti q e la deduzione delle corrispondenti equazioni del moto, sotto una forma simmetrica, in tutto analoga, dal punto di vista analitico, a quella che si presenta nei problemi classici della dinamica dei solidi.

Meccanica celeste. — *Sul problema dei due corpi nel caso di masse variabili.* Nota del Socio P. Pizzetti [1].

L'ing. Armellini ha trattato questo problema in una serie di Note pubblicate in questi Rendiconti, negli anni 1911, 1913, 1914, e riassunte e completate in una bella Memoria venuta alla luce or sono pochi mesi [2]. Egli ha, con abile e fruttuosa analisi, poste in evidenza talune proprietà del movimento in questione, studiata la integrazione per serie delle equazioni differenziali, e dato un metodo, generalmente approssimato, per la determinazione effettiva del movimento stesso. Aggiungo in questa Nota alcuni ulteriori sviluppi per quanto riguarda quest'ultimo lato del problema.

1. Detta $M(t)$ la somma delle due masse al tempo t, dette r e θ le coordinate polari (nel piano dell'orbita relativa) di uno dei due corpi, rispetto all'altro come polo e rispetto ad un asse polare di direzione invariabile, dalle consuete equazioni differenziali si deducono le note formole

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = c \,, \qquad (c = costante) \tag{1}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{c^2}{r^3} - \frac{f\,M(t)}{r^2} \,. \tag{2}$$

Osservando poi che, in virtù della (1), si ha

$$\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} = -\frac{1}{c}\frac{dr}{dt} \,, \qquad \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} = -\frac{r^2}{c^2}\frac{d^2 r}{dt^2} \,,$$

dalla (2) otteniamo

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} - \frac{f\,M(t)}{c^2} = 0 \,. \tag{3}$$

È questa l'equazione differenziale della quale opportunamente si è valso l'Armellini nell'ultima parte della citata Memoria.

2. *Equazione della traiettoria.* — Poniamo

$$\frac{f}{c^2}\left[M(t) - M_0\right] = \varphi \,, \tag{4}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 7 luglio 1915.

[2] *Il problema dei due corpi di masse variabili.* Memorie della Società italiana dei XL, ser. 3ª, tomo XIX.

e scriviamo quindi la (3) sotto la forma

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} - \frac{f M_0}{c^2} - \varphi = 0 \,,$$

ove M_0 è il valore di $M(t)$ per $t = 0$. Coi noti metodi elementari per la integrazione delle equazioni lineari $\left(\text{ove si consideri come funzione incognita la } \frac{1}{r} - \frac{f M_0}{c^2}\right)$ otteniamo, dalla precedente equazione:

$$\frac{1}{r} - \frac{f M_0}{c^2} = A_0 \operatorname{sen} \theta + B_0 \cos \theta + \int_0^\theta \varphi_\tau \operatorname{sen}(\theta - \tau)\, d\tau \,, \tag{5}$$

ove A_0 e B_0 sono costanti arbitrarie, e dove φ_τ esprime ciò che diviene la φ quando, pensandola come funzione della anomalia θ, si immagini, nella espressione di una tal funzione, sostituita la lettera τ alla θ.

Se facciamo passare l'asse polare per un perielio o per un afelio, dovrà essere $\frac{dr}{d\theta} = 0$, per $\theta = 0$; il che esige, com'è facile verificare derivando la (5) rispetto a θ, che sia $A_0 = 0$. Indicando poi con

$$\frac{1}{R_2} = \frac{f M_0}{c^2}(1 + e_0)$$

il valore di $\frac{1}{r}$ per $\theta = 0$, la (5) potrà scriversi

$$\frac{1}{r} = \frac{f M_0}{c^2}(1 + e_0 \cos \theta) + \int_0^\theta \varphi_\tau \operatorname{sen}(\theta - \tau)\, d\tau \,. \tag{6}$$

Il 1° termine del 2° membro esprime l'inverso del raggio vettore nell'ordinario moto kepleriano; il 2° termine esprime quindi la perturbazione che, nel valore di $\frac{1}{r}$, è dovuta all'incremento della massa.

Il moto kepleriano, che si assume come paragone, è quello pel quale la massa ha il valor costante M_0, e che col moto effettivo che si studia ha in comune la costante c delle aree, il valore del raggio vettore, e la direzione del movimento (e quindi anche la grandezza della velocità) per $\theta = 0$.

Possiamo ora dimostrare che, se la $M(t)$ è crescente con t, il *detto 2° termine è positivo* per θ crescente: vale a dire, *per un dato valore positivo dell'anomalia, il raggio vettore è più piccolo nel caso del moto perturbato che non in quello del moto kepleriano.*

Poniamo $\theta - \tau = z$; avremo, indicando con ε l'ultimo termine della (6),

$$(7) \qquad \varepsilon = \int_0^\theta \varphi_\tau \operatorname{sen}(\theta = \tau) . d\tau = \int_0^\theta \varphi_{\theta - z} \operatorname{sen} z . dz .$$

Osserviamo, innanzi tutto, che, essendo $M(t)$ crescente con t, sarà φ positiva per valori positivi di θ (supponiamo la c positiva e quindi θ crescente con t), e di più la φ_τ sarà crescente con τ, epperò la $\varphi_{\theta-z}$ decrescente al crescere di z.

Se $\theta \leq \pi$, la ε è certamente positiva.

Se $\pi < \theta \leq 2\pi$, l'integrale nella (7) si può spezzare in due: il primo, formato di elementi positivi, fra 0 e π; il secondo, formato di elementi negativi, fra π e θ; per la osservazione fatta rispetto alla φ, gli elementi negativi del secondo integrale saranno minori, in valore assoluto, di altrettanti del primo integrale. Anche in questo caso sarà dunque $\varepsilon > 0$.

Se fosse $\theta = 2n\pi + \gamma$ (n intero > 0, $\gamma < 2\pi$), l'integrale si potrà spezzare in $n + 1$ intervalli

$$(0 , 2\pi) (2\pi , 4\pi) \ldots (2n\pi , 2n\pi + \gamma) ,$$

ciascuno dei quali risulterà composto di una parte positiva e di una negativa, della quale ultima il valore assoluto sarà inferiore a quello della prima. In ogni caso, dunque, sarà $\varepsilon > 0$; con che il teorema è dimostrato.

La (6) si presta alla risoluzione di problemi riguardanti il massimo influsso degli accrescimenti della massa, qualunque sia la legge colla quale questi accrescimenti si verificano. Possiamo p. es. chiederci quale massima perturbazione, nel valore di $\frac{1}{r}$, può aver luogo, durante una intera rivoluzione, per effetto di una variazione totale (positiva) ΔM nella massa. Nella espressione di ε porremo $\theta = 2\pi$, e per φ porremo il limite superiore $f . \frac{\Delta M}{c^2}$. Otterremo un limite superiore di ε sopprimendo gli elementi ne-negativi dell'integrale, ossia limitando l'integrazione fra π e 2π; con ciò risulterà

$$(7') \qquad \varepsilon < \pi f \frac{\Delta M}{c^2} = \frac{\pi}{R_2(1 + e_0)} \frac{\Delta M}{M_0} = \varepsilon_1 .$$

Il che è quanto dire (trascurando l'effetto della eccentricità) che la perturbazione *unitaria* nel raggio vettore non può superare (nel tempo di una rivoluzione) 3,15 del rapporto fra l'accrescimento della massa e la massa iniziale.

3. Se supponiamo l'incremento della massa espresso in funzione dell'anomalia θ, la (6) dà senz'altro l'equazione della traiettoria, come l'Armellini

ha osservato. In particolare, se si suppone l'incremento proporzionale alla anomalia θ, si dovrà nella (6) porre $\varphi_\tau = \gamma\tau$ e si otterrà

$$\frac{1}{r} = \frac{fM_0}{c^2}(1 + e_0 \cos\theta) + \gamma(\theta - \operatorname{sen}\theta). \tag{8}$$

Derivando rispetto a θ, si vede subito che la derivata si annulla per valori di θ uguali a multipli interi di 2π: il che esprime che un tal modo di variazione della massa non altera la direzione dei perielii, i quali restano invariati nelle successive rivoluzioni [1].

4. *Determinazione dei perielii e degli afelii.* — Annullando la derivata di r rispetto a θ, otteniamo l'equazione che, teoricamente, determina la direzione dei perielii e degli afelii. Osservando che la derivata dell'integrale rispetto al limite superiore, nel secondo membro della (6), è identicamente nulla, otteniamo l'equazione:

$$\frac{fM_0}{c^2} e_0 \operatorname{sen}\theta - \int_0^\theta \varphi_\tau \cos(\theta - \tau)\, d\tau = 0. \tag{9}$$

La determinazione effettiva dei valori di θ non può, naturalmente, ottenersi, se non quando si supponga nota la φ in funzione di θ. Si può tuttavia osservare che, a meno che l'integrale non sia esattamente nullo per $\theta = n\pi$ (come nel caso contemplato al n. 3), *lo spostamento angolare degli apsidi può essere molto rilevante quando la eccentricità e_0 sia piccola.*

Si può ancora assegnare un limite superiore alle variazioni degli apsidi durante una intera rivoluzione quando si ammetta a priori che tali variazioni non superino un angolo retto. Supponiamo che sia ΔM l'accrescimento totale della massa, mentre l'anomalia varia da zero fino ad un certo valore Θ arbitrariamente scelto (p. es., un po' maggiore di 2π). In questo intervallo

[1] Per ottenere il risultato approssimato del sign. Lehman-Fihles citato dall'Armellini, occorre osservare che, trascurando quantità piccole del 2° ordine rispetto ad e_0 e γ, la (8) può scriversi

$$\frac{1}{r} = \frac{fM_0}{c^2}\left(1 + e_0 \cos\theta - \frac{\gamma c^2}{fM_0}\operatorname{sen}\theta\right)\left(1 + \frac{\gamma c^2}{fM_0}\theta\right).$$

Sostituendo, sempre per approssimazione, all'ultima parentesi l'espressione $\frac{1}{1-\varepsilon t}$, dove ε è una costante, si ha il risultato enunciato del Lehman-Fihles, vale a dire che la traiettoria appare un ellisse il cui parametro diminuisce proporzionalmente al tempo. Ma questa approssimazione ha il difetto di far apparire spostata la direzione del perielio, il che in realtà non è. Del resto mi sembra assai poco chiaro il parlare di *una traiettoria, della quale un parametro varia col tempo.* Ciò non serve nè a definire geometricamente la traiettoria, nè a dare la legge del movimento. Faccio eccezione, ben inteso, per le così dette orbite osculatrici, delle quali il significato meccanico è ben definito, e la applicazione astronomica molto importante.

sarà $f\frac{\Delta M}{c^2}$ il massimo valore della φ_T: e quindi, posto, nella (9), $2\pi + \vartheta$ in luogo di θ, sarà

$$(\pi + \vartheta) f \frac{\Delta M}{c^2}$$

il massimo valore assoluto dell'integrale che vi figura.

Avremo pertanto $\left(\text{nella ipotesi } \vartheta < \frac{\pi}{2}\right)$ un limite superiore dello spostamento angolare ϑ del perielio, risolvendo l'equazione

$$e_0 \operatorname{sen} \vartheta = (\pi + \vartheta) \frac{\Delta M}{M_0} .$$

Affinchè un tal calcolo sia valido, occorrerà, naturalmente, che il valore trovato di $2\pi + \vartheta$ sia non maggiore dell' intervallo Θ scelto *a priori*. Altrimenti bisognerà ricominciare il calcolo con un valore più grande di Θ.

5. *Relazione fra il tempo e l'anomalia.* — Indichiamo con t e T i tempi che, nel moto effettivo e nel kepleriano rispettivamente, occorrono per far variare l'anomalia da 0 a θ, e cerchiamo un limite superiore della differenza $t - T$, sempre nella ipotesi che la massa totale sia crescente. Dalla (1) abbiamo

$$T - t = \frac{1}{c} \int_0^\theta (R^2 - r^2)\, d\theta , \tag{11}$$

ove

$$R = \frac{c^2}{f M_0 (1 + e_0 \cos\theta)}$$

è l'espressione del raggio vettore nel moto kepleriano. Scrivendo la (6) sotto la forma

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \varepsilon ,$$

ed osservando che

$$R^2 - r^2 = r^2 R^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) ,$$

la (11) potrà scriversi

$$T - t = \frac{1}{c} \int_0^\theta \varepsilon\, r^2 R^2 \left(\frac{2}{R} + \varepsilon\right) d\theta .$$

Chiamiamo $R_1\, R_2$ il massimo ed il minimo valore di R nell' intervallo $(0, \theta)$, ε_1 il massimo di ε determinato come al § 2 [formola (7')]. Avremo, ricordando che $r < R$, e che $\varepsilon > 0$,

$$T - t < \frac{R_1^4}{c} \left(\frac{2}{R_2} + \varepsilon_1\right) \int_0^\theta \varepsilon\, d\theta . \tag{12}$$

Introducendo per ε la sua espressione $\int_0^\theta \varphi_\tau \operatorname{sen}(\theta-\tau)\,d\tau$, si verifica facilmente che

$$\int_0^\theta \varepsilon\, d\theta = \int_0^\theta \varphi_\tau \{1-\cos(\theta-\tau)\}\, d\tau .$$

Infatti queste due espressioni si annullano entrambe per $\theta = 0$, e le loro derivate rispetto a θ sono eguali. Avremo dunque

$$\mathrm{T}-t < \frac{2\,\mathrm{R}_1^4}{c}\left(\frac{2}{\mathrm{R}_2}+\varepsilon_1\right)\int_0^\theta \varphi_\tau \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}(\theta-\tau)\,d\tau .$$

Sia $\Delta\mathrm{M}$ la massima variazione della massa totale durante una intera rivoluzione. Posto $\theta = 2\pi$, sarà $2\pi f\dfrac{\Delta\mathrm{M}}{c^2}$ un limite superiore dell' integrale nell' ultima formola, e quindi l'espressione

$$\frac{4\pi\mathrm{R}_1^4}{c^3}\left(\frac{2}{\mathrm{R}_2}+\varepsilon_1\right)f\,.\,\Delta\mathrm{M} \tag{13}$$

darà *un limite superiore della perturbazione che, nella durata di una intera rivoluzione, è dovuta all'accrescimento della massa.*

Se si indica con a il semigrand'asse, e con T il periodo della orbita kepleriana, si ha

$$c^2 = f\mathrm{M}_0\, a(1-e_0^2) \qquad c = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e_0^2}}{\mathrm{T}}$$

$$\mathrm{R}_1 = a(1+e_0) \qquad \mathrm{R}_2 = a(1-e_0) .$$

La (13) può quindi scriversi

$$\frac{2\mathrm{T}(1+e_0)^4}{(1-e_0^2)^{3/2}}\left(\frac{2}{1-e_0}+\varepsilon_1 a\right)\frac{\Delta\mathrm{M}}{\mathrm{M}_0} ,$$

ovvero, se si trascura l'eccentricità e, nella parentesi, il termine $\varepsilon_1 a$, risulta

$$\mathrm{T}-t < 4\mathrm{T}\frac{\Delta\mathrm{M}}{\mathrm{M}_0} .$$

Così per un incremento, poniamo, di un milionesimo della massa, il periodo resta alterato di meno di 4 milionesimi del proprio valore.

Astronomia. — *La nuova zona rossa coronale, fotografata dalla Missione italiana nell'eclisse solare del 1914.* Nota del Socio A. Riccò (¹).

Nell'adunanza del 17 gennaio scorso ebbi l'onore di presentare alla Accademia alcune delle fotografie fatte dalla Missione italiana per l'eclisse totale di sole del 21 agosto 1914, osservato in Teodosia (Crimea); e feci notare che in questa eclisse si era ottenuta per la prima volta una riga, o piuttosto una zona lucida rossa nello spettro della corona solare.

In talune delle dette fotografie — che sono un semplice ingrandimento ottico positivo delle negative originali, ingrandimento eseguito su carta fotografica dal sig. L. Taffara — la detta zona si vede con tutta sicurezza, ma però è, per sua natura, assai delicata.

Invece nella negativa originale — fatta su lastra pancromatica *Wratten* per spettroscopia, sensibile all'infrarosso, presa quasi alla fine della totalità, quando si produceva il *flash*, ossia la ricomparsa delle righe lucide dello *strato invertente* — la zona in discorso, osservata col nostro macromicrometro, che serve alle misure delle fotografie celesti e che ha l'ingrandimento 12, si vede ben distintamente, e nonostante la debole dispersione del prisma obbiettivo (angolo rifrangente 20°) con cui la fotografia fu ottenuta, vi si scorge anche traccia della divisione della zona nelle righe di cui è composta.

Però desiderando di rendere l'immagine della zona ancora più evidente ed atta alla riproduzione in zincografia con artifizii fotografici, senza però toccare la negativa originale, accolsi ben volentieri la cortese offerta di cooperazione del prof. G. Ponte, già assistente nell'Osservatorio, ora docente nell'Università di Catania, molto esperto nelle operazioni fotografiche.

Egli ha fatto una diapositiva ingrandita $3\,^1/_2$ volte; poi di questa ha preso per contatto una negativa, che ha rinforzata col bicloruro di mercurio; poi con questa negativa ha tirato per contatto la positiva che qui presento; la quale è inevitabilmente un po' dura, ma in essa la nuova zona è assai evidente, cosicchè è riuscita ben distinta anche nella zincografia che accompagna questa Nota (fig. 1).

Questa zona si vede più distintamente al lato ovest del sole che sta per riapparire, ma si vede anche al lato opposto, quantunque non chiaramente perchè si proietta su di una parte lucida dello spettro; in conclu-

(¹) Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1915.

sione, la zona fa tutto il giro del sole, e più o meno evidentemente si osserva pure in altre di queste nostre fotografie di fasi diverse dell'eclisse.

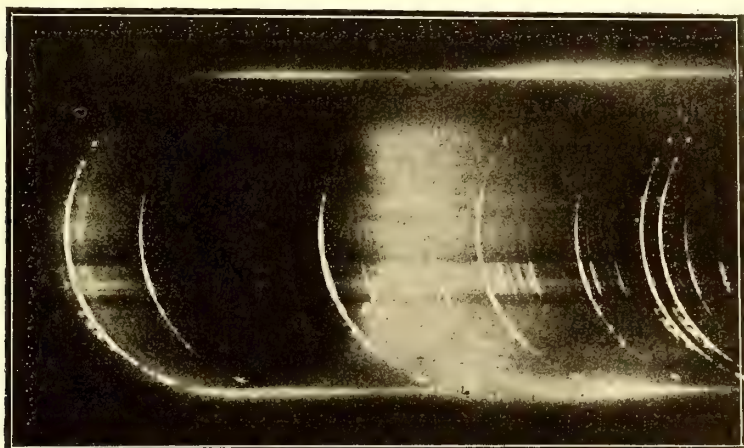
Da ciò si deduce che la sostanza coronale ignota, cui è dovuta questa zona, si estende a notevole altezza sul sole, poichè, quantunque la luna nell'eclisse fosse apparentemente più grande del sole, ed a Teodosia la massima fase sia stata 1.016, ossia di circa mezzo minuto di arco più grande del diametro solare, pure la zona di cui si tratta non fu interrotta in alcuna sua parte.

C R D_3 *b* F G *h* H K

Fig. 1. — Spettro della cromosfera e della corona solare.
R = Nuova zona rossa coronale.

Il carattere della zona evidentemente non è quello dei gruppi di righe lucide del *flash*, le quali inoltre sono tutte corte perchè appartenenti ad uno strato di pochissimo alto sulla fotosfera.

La posizione di questa zona nello spettro, presso la riga C od H_α dell'idrogeno e presso al suo lato più rifrangibile (ove nè noi nelle eclissi totali di sole del 1900 e del 1905, nè altri in molte altre eclissi avevano osservato questa zona lucida), indicava che essa era nuova, e ci rivelava nella corona solare una sostanza non prima riconosciuta.

La piccola dispersione del nostro prisma e la nota compressione della parte rossa dello spettro prismatico rendevano poco sicura la determinazione della lunghezza d'onda della nuova zona. Però con misure fatte colla grande vite orizzontale del macromicrometro, la quale dà direttamente i 300^{mi} di millimetro, e con una costruzione grafica in grande scala fondata sulle righe note H_β, D_3, H_α e 6678 dell'elio, ho ottenuto subito per lunghezza d'onda

del contorno interno della zona, che è il più forte e più netto, $\lambda = 6367$ unità Ångström.

Le Missioni inglese, francese e spagnuola, con spettrografi più dispersivi, hanno potuto determinare più esattamente ed hanno presto pubblicato (¹) la lunghezza d'onda della più lucida componente della zona in discorso, ed hanno dato $\lambda = 6374$ unità Ångström.

La Missione inglese, diretta dal prof. Cortie (²), con fortissima dispersione ha inoltre trovato che la zona si compone di tre gruppi di righe, i quali si estendono da $\lambda = 6363.0$ a $\lambda = 6643.9$, cioè fin oltre la riga C.

Recentemente il prof. E. Paci, dell'Osservatorio di Catania, ha assunto di fare colla formola d'interpolazione di Cornu la laboriosa determinazione della lunghezza d'onda delle righe del *flash*, ed intanto ha calcolato la lunghezza d'onda del limite concavo e più refrangibile della nuova zona rossa, adoperando come righe di riferimento le righe C, D_3, F; ed ha ottenuto $\lambda = 6363$, che coincide con quello trovato da Cortie.

Il limite esterno e meno refrangibile, nella nostra fotografia negativa non è determinabile con sicurezza per la presenza della riga C, grossa ed intensamente nera, che forse fa parere più chiara la nuova zona presso di essa riga. Di là dalla C non si riconosce con sicurezza la nuova zona. Vi si osservano le righe 6678 e 7065 dell'elio.

Nello spettro della fotosfera non esiste una riga a 6374.

Nel magnifico spettro fotografico, dovuto al prof. Hale, della fotosfera e delle macchie solari, intorno a quella lunghezza d'onda non vi è, per la fotosfera che una debolissima traccia di righe fine; per le macchie, proprio a 6374,3 vi è soltanto una riga debole, mentre poi fra i limiti dati da Cortie vi sono, nello spettro della fotosfera ed in quello delle macchie, molte righe e gruppi di righe forti; ed intorno a $\lambda = 6495$ vi è un gruppo fitto e fortissimo che non ha riscontro nello spettro della corona.

Scheiner (³) riporta lo spettro della cromosfera determinato da Young, e vi trova una riga debolissima a $\lambda = 6374$; ma Young stesso, nell'aureo suo libro *The Sun* (pp. 206-207) non mette questa riga nell'elenco delle righe della cromosfera.

Recentemente Walter S. Adam e Cora G. Burwell hanno pubblicato (⁴) le lunghezze d'onda delle righe lucide della bassa cromosfera e del *flash*, ottenute con grande precisione, e senza eclisse, colla *torre-telescopio* ed un potentissimo spettrografo dell'Osservatorio solare di Monte Wilson. A $\lambda = 6374$ non vi è alcuna riga, e neppure nello spettro della fotosfera di

(¹) *Monthly Notices*, febr. 1915, pag. 316.

(²) Ivi, genn. 1915, pag. 116.

(³) *Spectral Analyse der Gestirne*, pag. 198.

(⁴) *Astrophysical Journal*, vol. XLI, pag. 153.

Rowland, riportato per confronto; le righe più vicine sono $\lambda = 6371$ e $\lambda = 6278$, entrambe assai deboli ed attribuite, da Rowland, la prima al ferro, la seconda al nikel. Ma poi il carattere della zona rossa coronale, che anche Cortie dice essere costituita da *bands and flutings* (bande e scanalature), è affatto diverso da quello delle citate righe e gruppi di righe.

E poichè gli spettri delle comete e degli idrocarburi (o del carbonio) hanno zone scanalate nel rosso, dirò che non ve ne è alcuna a $\lambda = 6374$.

Negli spettri a serie di righe, dati dal prof. Kayser (¹) per 15 metalli, non ve ne è alcuno che abbia la riga 6374.

L'Argon, l'Helium, il Kripton, il Neon, il Xenon non hanno nel loro spettro la riga 6374; il Neoholmium ha una riga a 6374,07, ma questo corpo non è ancora ben conosciuto; pare sia un miscuglio o un prodotto di disaggregazione (²).

Nelle nostre fotografie manca la riga verde coronale 5303, che ordinariamente è la più intensa e la più frequentemente osservata; ed anche altre Missioni non l'hanno ottenuta. Però la Missione guidata da Cortie l'ha ottenuta in un gruppo di quattro righe, più deboli di quelle della zona rossa.

In conclusione, la riga verde coronale in questa eclissi è stata tanto debole da non esser visibile, nè fotografabile per la maggior parte delle Missioni. Anche questo è un fatto nuovo o quasi nuovo perchè anche in eclissi precedenti e per qualche osservatore non fu visibile la riga coronale verde.

Dunque in questa eclissi si è avuta, se non assolutamente la comparsa di una nuova zona spettrale rossa e la scomparsa della riga verde, per lo meno la zona rossa più che mai forte e la verde più del solito debole. Però bisogna notare che nei tempi recenti si hanno lastre fotografiche assai più sensibili al rosso, e si adoprano assai più spesso che non in passato: e ciò può aver condotto alla recente scoperta della zona rossa coronale per mezzo della fotografia. Quanto alla osservazione visuale della zona rossa in discorso, non pare che in passato abbia mai avuto luogo. Respighi (³) nell'eclisse del 1871, Gautier e Wolfer (⁴) in quella del 1900, e certamente anche altri, hanno visto col prisma obbiettivo anelli colorati, e fra essi uno rosso, i quali sono immagini monocromatiche della corona, sfumati verso l'esterno; ma quegli osservatori dichiarano che l'anello rosso corrispondeva alla riga C dell'idrogeno, come gli altri anelli corrispondevano ad altre righe dell'idrogeno e dell'elio. Evidentemente si trattava della luce della cromosfera riflessa

(¹) *Handbuch der Spectroscopie*, vol. II, pp. 517 e seguenti.
(²) Vol. V, pag. 67, 519, 647; Vol. V, pag. 163, 813.
(³) Atti della R. Acc. dei Lincei Sess. IV, 3 marzo 1872.
(⁴) *Archives des sciences ph. et nat.*, vol. 10°, pag. 207.

dalla corona: quindi di un fenomeno affatto diverso da quello della nuova zona rossa coronale. Non ostante la brevità del tempo nella osservazione della eclisse che generalmente diminuisce la ponderazione, è difficile di ammettere che in passato abili osservatori non si siano accorti di una riga o zona rossa sensibilmente più refrangibile della riga C.

Matematica. — *Sulle vibrazioni di un filo elastico disteso su di una superficie levigata.* Nota di Bartolomeo Tassara, presentata dal Corrispondente O. Tedone [1].

1. Il dott. F. Sbrana [2] ha dato una soluzione generale del problema delle vibrazioni di una corda elastica tesa, attorno alla sua posizione di equilibrio, in un mezzo resistente. Ed è pervenuto a questa soluzione servendosi della formula che il metodo di Riemann fornisce per l'integrale generale dell'equazione indefinita del problema, che è un caso particolare dell'equazione a derivate parziali lineare del 2° ordine, con due variabili indipendenti e a coefficienti costanti.

In questa Nota vogliamo far vedere che il problema precedente può interpretarsi anche come quello delle vibrazioni trasversali di un filo elastico omogeneo disteso su di una superficie levigata a curvatura costante, o almeno tale lungo la linea che è figura di equilibrio del filo. Basterà perciò far vedere che le equazioni indefinite dei due problemi coincidono.

2. Sia

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

l'equazione di una superficie levigata sulla quale sia disteso un filo flessibile qualunque, e sulla quale questo filo debba rimanere continuamente durante il suo movimento. Supporremo, come al solito, che le forze esterne applicate all'elemento ds del filo possano essere sostituite da un'unica forza dell'ordine di grandezza di ds stesso, applicata ad un suo punto arbitrario e di componenti $X ds$, $Y ds$, $Z ds$ secondo i tre assi coordinati x, y, z. Inoltre, se con λ indichiamo una indeterminata, le componenti secondo gli stessi tre assi dell'azione della superficie sullo stesso elemento della linea si possono scrivere:

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x} \quad , \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \quad , \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial z} .$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 10 luglio 1915.

[2] Vedi Sbrana, *Sulle vibrazioni di una corda elastica in un mezzo resistente.* Rendic. della R. Accad. dei Lincei, ser. 5ª, 1° sem., fasc. 3° e 5°.

Le equazioni del movimento del filo saranno quindi:

$$
(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mu\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{\partial x}{\partial s}\right)+X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x},\\
\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{\partial y}{\partial s}\right)+Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y},\\
\mu\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{\partial z}{\partial s}\right)+Z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z},
\end{aligned}\right.
$$

dove con μ indichiamo la densità del filo.

Alle equazioni precedenti, perchè il problema del movimento sia determinato, bisogna aggiungere le condizioni agli estremi della linea a la condizione $ds=\text{cost}$, se il filo è inestendibile, o una data relazione $T=f(\theta)$ fra T e la dilatazione θ che subisce l'elemento ds filo, se il filo stesso è elastico.

Introducendo la nuova variabile t_1 per mezzo dell'equazione $T=\dfrac{ds}{dt_1}$, potremo dare alle (2) la forma

$$
(2')\qquad \left\{\begin{aligned}
\mu\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{1}{T}\frac{\partial^2 x}{\partial t_1^2}+X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.
$$

Se poi indichiamo con u e v un sistema di coordinate curvilinee qualunque sulla superficie (1), per modo che il quadrato dell'elemento lineare di questa superficie assuma la forma

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

ed indichiamo la forza viva unitaria relativa all'elemento ds con

$$(3)\qquad \mathfrak{T} = \tfrac{1}{2}(x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2) = \tfrac{1}{2}(E\,u_t'^2 + 2F\,u_t'v_t' + G\,v_t'^2)$$

e con τ l'espressione analoga

$$(4)\qquad \tau = \tfrac{1}{2}(x_{t_1}'^2 + y_{t_1}'^2 + z_{t_1}'^2) = \tfrac{1}{2}(E\,u_{t_1}'^2 + 2F\,u_{t_1}'v_{t_1}' + G\,v_{t_1}'^2),$$

dove

$$x_t'=\frac{\partial x}{\partial t},\quad y_t'=\frac{\partial y}{\partial t},\quad z_t'=\frac{\partial z}{\partial t},\quad u_t'=\frac{\partial u}{\partial t},\quad v_t'=\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$x_{t_1}'=\frac{\partial x}{\partial t_1},\quad \ldots\ldots\ldots\quad u_{t_1}'=\frac{\partial u}{\partial t_1},\quad \ldots$$

al posto delle (2) o (2′) si possono ancora sostituire le altre

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \mu\left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u'_t}-\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u}\right] &= \frac{1}{\mathrm{T}}\left[\frac{\partial}{\partial t_1}\frac{\partial \tau}{\partial u'_{t_1}}-\frac{\partial \tau}{\partial u}\right]+\mathrm{Q}u\,, \\ \mu\left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial v'_t}-\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial v}\right] &= \frac{1}{\mathrm{T}}\left[\frac{\partial}{\partial t_1}\frac{\partial \tau}{\partial v'_{t_1}}-\frac{\partial \tau}{\partial v}\right]+\mathrm{Q}v\,, \end{aligned}\right.$$

dove

$$\mathrm{Q}u = \mathrm{X}\frac{\partial x}{\partial u}+\mathrm{Y}\frac{\partial y}{\partial u}+\mathrm{Z}\frac{\partial z}{\partial u}\quad,\quad \mathrm{Q}v = \mathrm{X}\frac{\partial x}{\partial v}+\mathrm{Y}\frac{\partial y}{\partial v}+\mathrm{Z}\frac{\partial z}{\partial v}\,.$$

Nelle equazioni (5) la indeterminata λ risulta eliminata; ed in esse le incognite sono, ora, u e v.

3. Supponiamo che il filo sia teso e fissato agli estremi sulla superficie e non soggetto a forze esterne. Nella posizione di equilibrio, come è noto, il filo si distende secondo una geodetica della superficie. Scegliamo allora per coordinate curvilinee su di essa le geodetiche ortogonali alla geodetica L, posizione di equilibrio del filo, e che chiameremo linee v, e per linee coordinate u le loro traiettorie ortogonali.

Assumiamo a parametro u l'arco delle geodetiche v contato a partire dalla L, che sarà quindi la $u=0$, e a parametro v l'arco della L contato da un suo punto fisso.

È noto, allora, che il quadrato dell'elemento lineare della superficie assumerà la forma

$$ds^2 = du^2 + \mathrm{G}\,dv^2$$

con

$$\left(\sqrt{\mathrm{G}}\right)_{u=0} = 1\quad,\quad \left(\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\right)_{u=0} = 0\ \text{[1]}.$$

Si avrà così

$$(6)\qquad \mathfrak{T} = \tfrac{1}{2}\left(u'^2_t + \mathrm{G}\,v'^2_t\right),$$

$$(7)\qquad \tau = \tfrac{1}{2}\left(u'^2_{t_1} + \mathrm{G}\,v'^2_{t_1}\right).$$

Tenendo poi conto che, per essere le forze esterne nulle, $\mathrm{Q}u=0$, $\mathrm{Q}v=0$, ed introducendo nuovamente il parametro s al posto di t_1, le (5) si riducono a

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right] &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\mathrm{T}\frac{\partial u}{\partial s}\right)-\frac{\mathrm{T}}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2, \\ \mu\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{G}\frac{\partial v}{\partial t}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right] &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\mathrm{TG}\frac{\partial v}{\partial s}\right)-\frac{\mathrm{T}}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2. \end{aligned}\right.$$

[1] Vedi Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, ed. 1894, cap. VI, pp. 154 e 179.

4. Supponiamo, ora, che il filo sia elastico e che compia soltanto delle vibrazioni infinitesime attorno alla sua posizione di equilibrio, in modo che sia soddisfatta la legge di Hooke, che cioè la tensione del filo sia proporzionale alla dilatazione che essa produce nel filo stesso. Indicati allora con δu e δv gli incrementi che le coordinate di un punto qualunque del filo subiscono nel passaggio dalla posizione di equilibrio a quella di movimento, ad un dato istante, e con $\bar{u}$ e $\bar{v}$ le coordinate del medesimo punto allo stesso istante, si avrà:

$$\bar{u} = \delta u \quad , \quad \bar{v} = v + \delta v \, .$$

Se poi indichiamo con T_0 il valore costante di T nella posizione di equilibrio, e con δT l'incremento che subisce la tensione stessa quando il filo passa dalla sua posizione di equilibrio a quella di movimento, si avrà pure:

$$T = T_0 + \delta T = T_0 + k^2 \theta \, ,$$

con k costante, e θ essendo la dilatazione che un elemento ds del filo subisce nel passare dalla posizione di equilibrio a quella di movimento. Si può osservare che

$$\theta = \frac{\sqrt{(d\,\delta u)^2 + (dv + d\,\delta v)^2} - dv}{dv} \, ,$$

e quindi, trascurando infinitesimi di ordine superiore,

$$\theta = \frac{\partial \delta v}{\partial v} \, ;$$

e per T abbiamo

$$T = T_0 + k^2 \frac{\partial \delta v}{\partial v} \, . \tag{9}$$

Osserviamo ancora che, per una nota formola di geometria differenziale, indicata con K la curvatura totale della superficie, si ha, nel nostro caso,

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} \, ,$$

e perciò, lungo la linea $u = 0$,

$$K = -\left(\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} \right)_{u=1} \, .$$

Sviluppando $\sqrt{G}$ nell'intorno del valore $u = 0$, in serie di Maclausin, si ha allora

$$\sqrt{G} = 1 - \tfrac{1}{2} K u^2 + \cdots$$

e quindi

$$
(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} G &= 1 - Ku^2 + \cdots \\ \frac{\partial G}{\partial u} &= -2Ku + \cdots \\ \frac{\partial G}{\partial v} &= -\frac{\partial K}{\partial v} u^2 + \cdots \end{aligned} \right.
$$

dove i membri stanno a rappresentare termini di ordine superiore.

Sostituendo, nelle equazioni (8) del movimento, δu al posto di u e $v + \delta v$ al posto di v, per T il suo valore dato dalla (9), per G e le sue derivate le loro espressioni date dalle (10); tenendo conto che $ds = dv$ a meno di infinitesimi di ordine superiore, e tenendo conto soltanto dei termini di 1° ordine, si avrà

$$
(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} &= T_0 \frac{\partial^2 \delta u}{\partial v^2} + K\,T_0\,\delta u\,, \\ \mu \frac{\partial^2 \delta v}{\partial t^2} &= k^2 \frac{\partial^2 \delta v}{\partial v^2}\,. \end{aligned} \right.
$$

Se perciò supponiamo che la curvatura della superficie data (1) sia costante, o almeno tale sia lungo la linea posizione di equilibrio del filo, la 1ª delle equazioni trovate (11) coinciderà con l'equazione indefinita del problema delle vibrazioni di una corda elastica tesa, attorno alla sua posizione di equilibrio, in un mezzo resistente. Possiamo anzi osservare che il nostro problema presenta una maggiore generalità di quella del problema accennato, potendo la curvatura K essere positiva o negativa per quanto il metodo dato dallo Sbrana per risolvere il suo problema basti a risolvere il nostro in ogni caso. La 2ª delle (11) è l'equazione, molto nota, delle vibrazioni di una corda elastica tesa nel vuoto.

Chimica. — *Sulla isomeria degli acidi erucico, brassidinico, isoerucico. (Curve di saturazione dei sistemi binarî)* [1]. Nota IV di L. Mascarelli e G. Sanna, presentata del Socio G. Ciamician [2].

A complemento delle ricerche esposte nella III Nota [3], e per altre che abbiamo tuttora in corso, ci tornava utile il conoscere l'andamento delle curve di saturazione che si possono avere combinando due a due gli acidi *erucico*, *brassidinico*, *isoerucico*, *behenico*.

L'esistenza di tre acidi aventi la composizione e la costituzione dell'acido erucico, non può dipendere che da fenomeni di isomeria, o di polimeria, o di polimorfismo. Le determinazioni della grandezza molecolare di questi diversi acidi, riportate nelle Note II e III, esclusero che si tratti di polimeria. Rimangono dunque i fenomeni di isomeria e di polimorfismo. Siccome la differenza tra polimorfismo ed isomeria chimica sta sopra tutto nel fatto che il primo è legato allo stato cristallino, mentre la seconda può esistere anche allo stato liquido, e gassoso, così lo studio dell'equilibrio solido-liquido nei varî sistemi binarî possibili tra questi acidi poteva esserci vantaggioso.

Nell'eseguire le curve di solidificazione non abbiamo potuto applicare il metodo di analisi di van Bijlert per accertarci se le due sostanze erano solubili allo stato solido e in quale misura, e ciò per le ragioni già dette nella III Nota; tuttavia dai risultati della stessa Nota abbiamo modo di conoscere e classificare i varî tipi di curve, perchè conosciamo i valori dei pesi molecolari che, a piccole concentrazioni, hanno questi varî acidi sciolti reciprocamente negli altri usati come solventi.

Quindi nei diagrammi qui riportati la curva coniugata, che rappresenta la composizione del solido, è tratteggiata approssimativamente.

Dall'esame di queste curve si ricava che:

I) *l'acido erucico ed il brassidinico* II) *l'acido erucico e l'isoerucico* III) *l'acido erucico ed il behenico*	non dànno cristalli misti; le loro curve sono costituite di due rami (su cui si separa il solvente puro) incontrantisi in un punto eutettico.
IV) *l'acido isoerucico ed il brassidinico* V) *l'acido brassidinico ed il behenico*	dànno cristalli misti limitatamente; le loro curve risultano ancora di due rami (su cui però si separano cristalli misti).
VI) *l'acido isoerucico ed il behenico*	dànno cristalli misti in tutti i rapporti; la curva è rappresentata da un solo ramo, che giace tutto fra le temperature di fusione dei due componenti.

[1] Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica farmaceutica della R. Università di Cagliari.

[2] Pervenuta all'Accademia il 12 luglio 1915.

[3] Rend. R. Accad. Lincei (1915).

Tralasciando l'acido erucico, che entra come componente dei primi tre sistemi, nei quali non vi ha formazione di cristalli misti, per tutti gli altri acidi vi può esser dubbio se tutti siano monomorfi o se piuttosto non si tratti di sostanze, in parte almeno, dimorfe, le quali presentino contemporaneamente il fenomeno dell' isodimorfismo. Si sa che i tipi di curve sono gli stessi, sia che si tratti di due componenti isomonomorfi, o di due componenti isodimorfi, purchè in questo secondo caso i cristalli misti che si ottengono, abbiamo la forma cristallina del componente che è in prevalenza. È ben noto l'esempio del solfato di magnesio ($MgSO_4 . 7H_2O$) e del solfato di ferro ($FeSO_4 . 7H_2O$): il primo allo stato puro cristallizza sempre nel sistema monoclino; però dalle soluzioni miste dei due sali si separano cristalli misti rombici o monoclini, a seconda che prevale l'uno o l'altro sale. La forma rombica può contenere fino al 18.8 % di solfato ferroso; la monoclina fino al 54,0 % di solfato di magnesio. Si spiega questo fatto ammettendo che entrambi i sali siano dimorfi, sebbene una sola forma sia stabile quando i sali si trovano allo stato puro. Dalle soluzioni miste invece ognuno dei due sali può, per così dire, costringere l'altro a cristallizzare nella propria forma.

Anche in questi casi di isodimorfismo si sa che la curva di saturazione mostrerà un punto multiplo là dove cessa la formazione di una specie di cristalli e comincia l'altra specie.

Lo studio poi delle soluzioni solide esteso ai composti organici ha dimostrato che buona parte di questi, sebbene non sieno fra loro isomorfi nello stretto senso della parola, tuttavia possono dare reciprocamente cristalli misti.

È quindi assai verosimile che gli acidi brassidinico, isoerucico, e behenico (componenti dei sistemi IV, V, VI), pur non essendo tutti isomorfi, diano cristalli misti per fenomeni di isopolimorfismo.

Ci piace far notare come le curve ottenute per i varî sistemi (vedi diagrammi nella parte sperimentale) rappresentino i principali tipi stabiliti per via teorica dal Roozebeoom [1] e precisamente i tipi I, IV, V nel caso di formazione di cristalli misti.

Nessuna delle curve accenna alla formazione di composti; lo che elimina la possibilità che il terzo isomero, non prevedibile dalla teoria, possa risultare da un prodotto di addizione degli altri due.

Nel seguente prospetto riassumiamo il contegno reciproco di due qualsiasi degli acidi da noi studiati. La disposizione è quella adottata dal Tammann [2] per esporre in modo sinottico il comportamento reciproco degli

[1] Zeit. f. physik. Ch., *30*, 385 (1899).

[2] Zeit. f. Elecktrochemie, *14* (1908); e Bruni, *Feste Lösungen und Isomorphismus*, Leipzig 1908.

elementi e specie dei metalli nei fenomeni di saturazione che avvengono nelle miscele binarie.

acido erucico	V curva I	V curva II	V curva III
	acido brassidinico	xVx curva IV	xVx curva V
		acido isoerucico	X — X curva VI
			acido behenico

V = Semplice eutettico: i componenti non formano composti nè cristalli misti.
xVx = Cristalli misti limitatamente; curva con eutettico.
X — X = Cristalli misti in tutti i rapporti; curva unica senza eutettico.

Dallo specchio subito si rileva che:

tutte le coppie contenenti acido erucico hanno un contegno normale;

l'acido behenico ha comportamento normale con l'acido erucico; dà cristalli misti limitatamente con il brassidinico; dà cristalli misti in tutti i rapporti con l'isoerucico;

l'acido brassidinico ed isoerucico dànno cristalli misti limitatamente.

Se anche qui, come nella maggior parte dei casi finora studiati per sostanze organiche, la solubilità allo stato solido è indizio di somiglianza di costituzione e (pei derivati etilenici) di configurazione, dobbiamo concludere che l'acido erucico è quello che ha configurazione diversa da tutti gli altri, perchè vi si mantiene in tutti crioscopicamente normale. Gli acidi brassidinico ed isoerucico, che sono allo stato solido solubili, il primo limitatamente, il secondo completamente nell'acido behenico, avranno configurazione simile a quest'acido. Si comprende, poi, che l'acido brassidinico e l'isoerucico diano tra loro cristalli misti.

Ciò, come si vede, conferma pienamente quanto si disse nelle Note II e III: lascia però insoluta la questione della esistenza di due acidi a legame etilenico aventi costituzione *trans*.

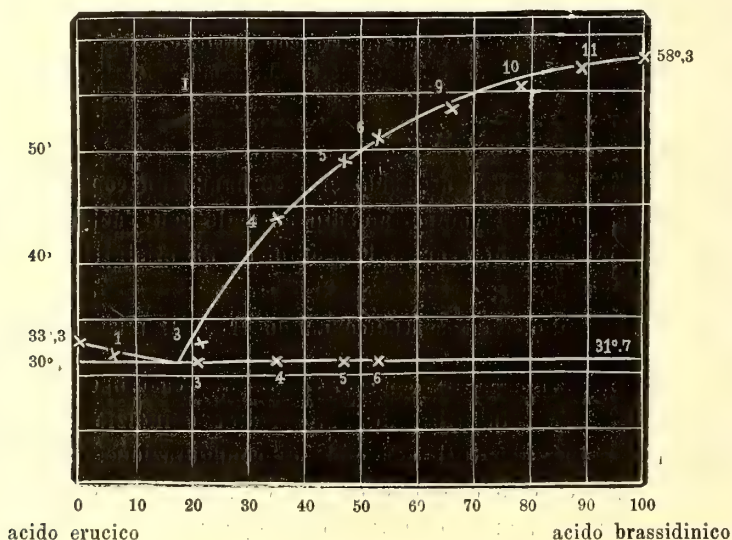
Occorrono perciò altre ricerche, che abbiamo già intraprese, tenendo conto dei lavori di Biilmann [1], e di Stobbe e Schönburg [2]. Alcune però ci sono riuscite negative; altre non sono ancora sufficientemente controllate: ci riserviamo quindi di tornare sull'argomento prossimamente.

PARTE SPERIMENTALE.

Tutti gli acidi vennero purificati secondo le indicazioni date nelle Note precedenti. Nella provetta crioscopica essi solidificavano:

acido behenico.	punto di solidificazione	79°.2
» erucico	» »	33°.3
» brassidinico	» »	58°.3
» isoerucico	» »	51°.2

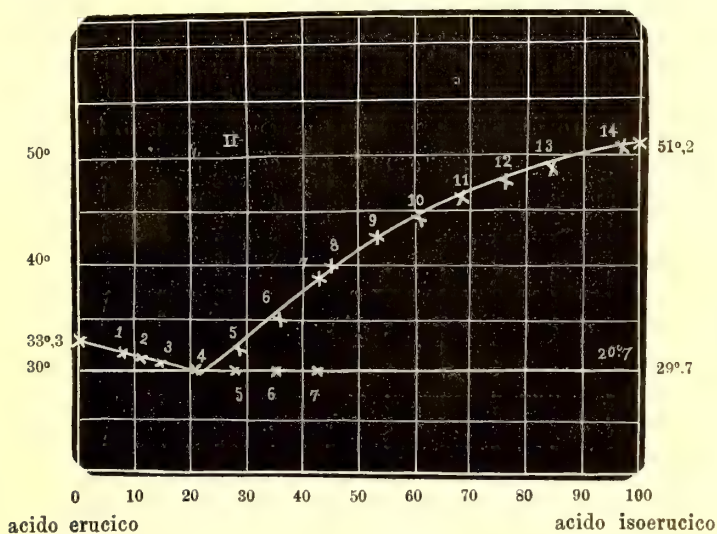
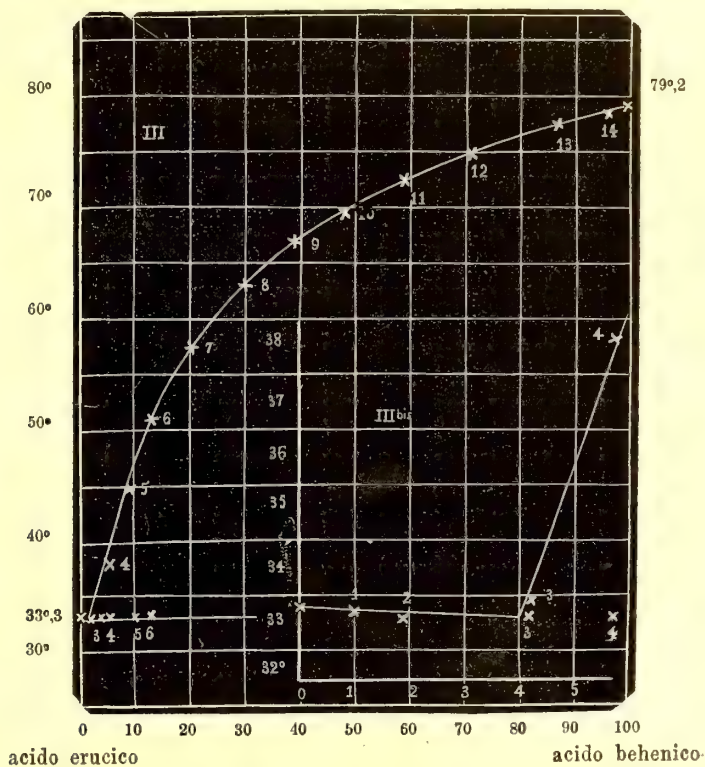
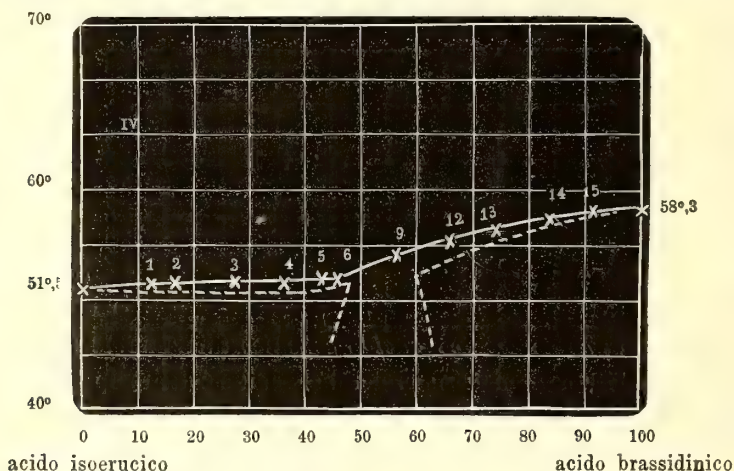
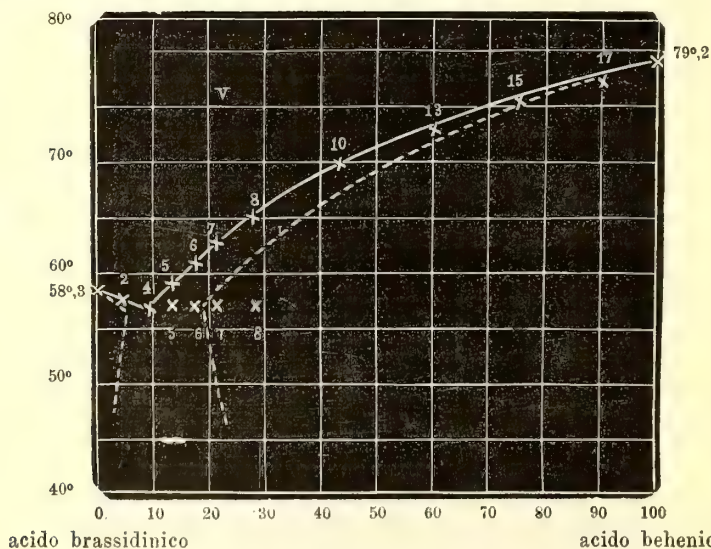
Le determinazioni vennero fatte in corrente di gas inerte [3].

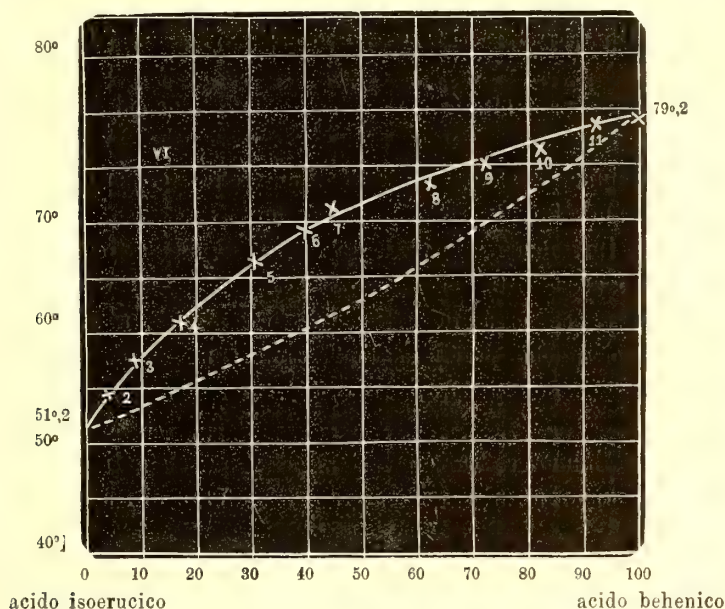
I. *Sistema acido erucico - acido brassidinico* (diagramma I). — Da quanto è detto nella Nota III possiamo escludere che nei due rami della curva si separino cristalli misti. Il punto eutettico è alla temperatura di 31°.7, concentrazione circa 83 % di acido erucico, 17 % di acido brassidinico.

II. *Sistema acido erucico - acido isoerucico* (diagramma II). — Sui due rami si separa il solvente puro, poichè i pesi molecolari reciproci sono nor-

[1] Ber. d. d. chem. Ges., *42*, 182, 1444 (1909).

[2] Liebig's Annalen, *402*, 187 (1914).

[3] Per brevità riportiamo qui solo i diagrammi dei varî sistemi; pubblicheremo per esteso in altro luogo tutti i dati sperimentali.

mali (Nota III). L'eutettico è alla temperatura di 29°.7 e alla concentrazione di circa 78 % acido erucico, 22 % di acido isoerucico.

III. *Sistema acido erucico - acido behenico* (diagramma III). — Anche qui sono normali i pesi molecolari dei due acidi sciolti reciprocamente l'uno nell'altro (Note II e III). L'eutettico è alla temperatura di 33°.1, concentrazione circa 96 di acido erucico e 4 di acido behenico (diagramma III^{bis}).

IV. *Sistema acido isoerucico - acido brassidinico* (diagramma IV). — L'anomalia crioscopica reciproca dei due acidi è assai forte (Nota III). La curva di saturazione mostra che si tratta di due sostanze, le quali formano una serie ininterrotta di cristalli misti, che ammettono un punto di transizione il quale giace a temperatura intermedia tra i punti di fusione dei due componenti. Il punto di transizione è alla temperatura di 52° circa e concentrazione circa 45 % di acido brassidinico e 55 % di acido isoerucico. Questo sistema appartiene al tipo IV di Roozeboom.

V. *Sistema acido brassidinico - acido behenico* (diagramma V). — Su entrambi i rami della curva si separano cristalli misti (Note II e III). La

curva appartiene al ripo V di Roozeboom. L'eutettico è a temperatura di 57°.2 e concentrazione 91 % di acido brassidinico e 9 % di acido behenico.

VI. *Sistema acido isoerucico - acido behenico* (diagramma VI). — I due acidi dànno una serie ininterrotta di cristalli misti. La curva è costituita

di un solo ramo decorrente fra i punti di fusione dei due componenti: appartiene quindi al tipo I di Roozeboom.

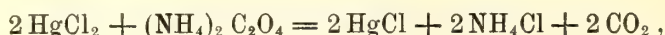
Chimica fisica. — *Sulla variabilità dei coefficienti di temperatura di reazioni fotochimiche con la lunghezza d'onda.* Nota di M. Padoa e Teresa Minganti, presentata dal Socio G. Ciamician [1].

Le esperienze eseguite da uno di noi con A. Zazzaroni [2], per determinare i coefficienti di temperatura di trasformazioni fototropiche con luci variamente colorate, rendevano desiderabile di esaminare dal medesimo punto di vista alcune reazioni fotochimiche, delle quali sia ben nota la vera natura.

Per ora abbiamo pensato di ricorrere alla reazione di Eder, perchè fra le più facili ad esaminarsi, la quale consiste nella precipitazione di calomelano, per azione della luce, da una soluzione acquosa di ossalato ammo-

[1] Pervenuta all'Accademia il 10 luglio 1915.
[2] Questi Rendiconti, I, 828 (1915).

nico e cloruro mercurico (40 gr. di ossalato ammonico in un litro d'acqua, e 25 gr. di cloruro mercurico in un mezzo litro):

$$2\,HgCl_2 + (NH_4)_2\,C_2O_4 = 2\,HgCl + 2\,NH_4Cl + 2\,CO_2\,,$$

reazione da assimilarsi alla grande classe delle reazioni fotochimiche di ossidazione-riduzione.

Questa reazione è stata utilizzata, dall'autore citato, per un attinometro, e per questo venne studiata con cura speciale.

Roloff (1), riprendendo lo studio di questo liquido attinometrico, riuscì ad aumentare la sensibilità, preparandolo nel seguente modo: alla soluzione di Eder, saturata con ossalato ammonico, si aggiunge, a piccole porzioni nitrato mercurico, finchè precipita l'ossalato di mercurio, e poi si filtra. Questo liquido, secondo Roloff, è tre volte e mezzo più sensibile del primitivo.

Secondo Jodlbauer e Tappeiner (2), conforme ai dati di Gros (3), la sensibilità viene di gran lunga aumentata per aggiunta di traccie di sostanze fluorescenti, come la tetrabromo- e la tetraclorofluoresceina.

Eder (4) ha ancora trovato che i raggi più attivi sulla sua soluzione sono quelli violetti ed ultravioletti, e che quelli rossi gialli e giallo-verdi non agiscono affatto.

Anche l'azione della temperatura è stata da Eder esaminata per un intervallo notevole (5). Dai dati di Eder, riferentisi ad esperienze eseguite con la luce solare, si calcolano facilmente i seguenti coefficienti di temperatura:

da 15° a 25°	1.13
" 20° a 30°	1.21
" 30° a 40°	1.27

Nelle nostre esperienze abbiamo fatto uso della luce di una lampada ad arco, luce che veniva concentrata e filtrata attraverso dei palloni sferici riempiti con le soluzioni opportune (6). La temperatura veniva mantenuta costante per mezzo di un termostato, in cui, lateralmente, era praticata una piccola finestra provvista di una lastra di quarzo; una provetta di vetro o di quarzo, a seconda delle luci impiegate, contenente la soluzione sensibile, veniva posta dentro il termostato in corrispondenza della finestra. Per la

(1) Zeitschrift für physikalische Chemie, XIII, 330.
(2) Photoch. Mitt., 296 (1905); Berichte, *38*, 2602.
(3) Zeitschr. f. physik. Chem., XXXVII, 188.
(4) Eder e Valenta, Beiträge zur Photochemie II, 13 (1904).
(5) ibidem, pag. 11.
(6) I particolari relativi sono descritti nella citata Nota di Padoa e Zazzaroni.

luce ultravioletta adoperammo una lampada a vapori di mercurio, facendone passare la luce attraverso una soluzione di nitrosodimetilanilina [1].

Il liquido sensibile fu preparato secondo le indicazioni di Roloff; ma, non ostante la maggior sensibilità, anche da noi verificata, rispetto alla miscela di Eder, nelle nostre condizioni non si potevano ottenere se non piccole quantità di precipitato; e d'altra parte non sarebbe stato conveniente di provocare una precipitazione abbondante, per non incorrere negli errori inerenti alle variazioni di concentrazione. Per tali ragioni abbiamo ricorso, per le pesate, al metodo della microanalisi secondo Pregl, pur valendoci di una bilancia chimica comune, resa però più sensibile del solito.

Per le luci bianca, bleu ed ultravioletta, potemmo servirci semplicemente della soluzione predetta; per la luce verde, poichè questa non vi agiva se non con estrema lentezza, abbiamo aggiunto alla soluzione qualche goccia di una soluzione acquosa diluita di tetrabromofluoresceina.

Oltre a ciò, abbiamo fatto altre esperienze, facendo agire la luce bianca su questa soluzione sensibilizzata, abbreviando il tempo di esposizione per evitare la formazione di un precipitato abbondante, che, oltre a far variare la concentrazione della soluzione mercurica, avrebbe fatto diminuire la quantità del sensibilizzatore, trascinandolo seco in buona parte.

Per cause non sempre precisabili, si ottennero talvolta delle notevoli oscillazioni in successive esperienze fatte in condizioni eguali. Ma contro gli eventuali errori ci siamo garantiti eseguendo un grande numero di determinazioni; tanto è vero che le medie generali di tutte queste esperienze corrispondono perfettamente alle medie di quelle più attendibili, qui riportate:

Luce impiegata	Tempo di esposizione	Temperatura	Peso del precipitato (10^{-4} gr.)
Bianca	30′	20°	12
	"		12
			12
	"	30°	16
			16
			16
	"	20°	22
	"	30°	24
			26
	"	40°	33
			34
			36

[1] Questa sostanza lascia passare anche dei raggi verdi, gialli e rossi; ma questi non potevano agire sulla nostra soluzione in modo apprezzabile.

Luce impiegata	Tempo di esposizione	Temperatura	Peso del precipitato (10^{-4} gr.)
Bianca con sensibilizzatore .	5′	20°	48
			52
			54
			46
	»	30°	84
			81
	2′.5	40°	85
			101
			128
			108
Ultravioletta	30′	20°	16
			14
			18
			15
			18
	»	40°	17
			18
			18
			19
Bleu scuro	45′	20°	16
			17
			12
	»	40°	20
			26
			20
Verde con sensibilizzatore . .	30′	20°	32
			28
			29
	»	40°	93
			93
			91

Per mezzo di questi dati si calcolano facilmente i seguenti coefficienti di temperatura, per l'intervallo da 20° a 40°:

	Zona luminosa (λ)	Massimo d'intensità (λ)	Coefficienti
Luce bianca (nostre esperienze).	—	—	1.29
» » (secondo Eder). .	—	—	1.24
» ultravioletta	400-280	366	1.05
» bleu scuro	478-410	448	1.21
» verde con sensibilizzatore	540-505	533	1.75
» bianca » »	—	—	1.50

Risulta evidente che, conforme a quanto si è trovato in precedenza per le sostanze fototrope, i coefficienti di temperatura aumentano col crescere della lunghezza d'onda della luce agente; il valore trovato per la luce bianca, in perfetto accordo con i dati di Eder, non è che la risultante dei varî coefficienti caratteristici per le singole lunghezze d'onda delle luci attive semplici. Anche con la luce bianca il sensibilizzatore usato fa innalzare notevolmente il coefficiente di temperatura, perchè rende preponderante l'azione di raggi (gialli, verdi) che senza di esso non avrebbero agito se non in maniera trascurabile; il valore massimo si ottiene con la luce verde. La luce rossa non agisce neppure col sensibilizzatore.

A proposito di reazioni sensibilizzate con sostanze fluorescenti, vogliamo fare osservare che nel processo di assimilazione delle piante la clorofilla agirebbe contemporaneamente da catalizzatore e da sensibilizzatore, secondo le vedute di Timiriazeff (¹) che sono generalmente accettate; il massimo d'azione si trova nella regione del giallo e dell'aranciato: ora, da certe esperienze di Kreusler (²) sulla dipendenza dell'attività di assimilazione dalla temperatura, si rileverebbe un incremento notevole, tanto che, passando da 2°.35° a 1.8, tale attività diviene 2,8 volte maggiore. Da questo dato si può calcolare il coefficiente di temperatura, che sarebbe 2,14: senza voler dare troppo peso a queste deduzioni, che potrebbero esser alterate dai fattori biologici non facilmente calcolabili, ci sembra si possa ritenere che, anche in questa reazione fotochimica di capitale importanza, il coefficiente di temperatura dev'essere assai superiore ad uno.

Dal complesso dei dati finora rilevati, e da altri fatti che verranno esposti in seguito, sembra dovrà esser alquanto modificata l'opinione, ora generalizzata (³), che le reazioni fotochimiche siano sempre caratterizzate da coefficienti di temperatura vicini all'unità.

(¹) Czapek, Biochemie der Pflanzen, pag. 614 (1913).
(²) André, Chimie agricole, pag. 96 (1909).
(³) Vedi, ad esempio, D. Berthelot, Compt. Rend., pag. 440 (1915).

Fisiologia. — *Microtitolazione alla formaldeide e sue applicazioni in fisiologia* [1]. Nota II del dott. A. CLEMENTI, presentata dal Socio L. LUCIANI [2].

II.

Applicazione allo studio dei fermenti peptidolitici della microtitolazione alla formaldeide.

In ricerche precedenti [3] io ho studiato l'azione dei fermenti peptolitici sui *polipeptidi* mediante la *determinazione quantitativa dei gruppi aminici liberi*. I risultati, ottenuti colla *microtitolazione alla formaldeide, nella analisi di soluzioni di aminoacidi e di polipeptidi chimicamente puri* [4], mi hanno fatto prevedere la possibilità teorica di applicare la microtitolazione al formolo nello studio dei fermenti che scindono i polipeptidi, ottenendo il vantaggio dell'uso di quantità di polipeptidi ancora inferiori a quelle adoperate nelle ricerche precedenti in cui ho impiegato il metodo originale di Sörensen. Ho studiato nelle seguenti esperienze con questo procedimento l'azione del succo pancreatico, dell'estratto acquoso di fegato e di muscoli sul dipeptide *dl*-leucilglicina; le prove decorsero sempre sotto l'influenza antisettica del toluolo.

TABELLA I.

48 ORE A 37° IN TERMOSTATO		QUANTITÀ ADOPERATA DI NaOH 1/50 *n* IN CMC.	
dl-leucilglicina 1/1000 *n* cmc. 10:			
Estratto acquoso di fegato di vitello cmc. 0,2. Toluolo cmc. 0,5		1,170	
Acqua distillata cmc. 10:			
Estratto acquoso di fegato di vitello cmc 0,2. Toluolo cmc. 0,5		0,425	
Come leucina + glicocolla . . .	calcolato . .	1,000	
	trovato . . .	0,745	
		in mmgr.	in %
dl-leucilglicina	aggiunta . .	1,88	100
	idrolizzata. .	0,94	50

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisiologica della R. Università di Roma.
[2] Pervenuta all'Accademia il 2 luglio 1915.
[3] A. Clementi, *Contributo allo studio dell'azione dei fermenti proteolitici sui polipeptidi*. Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. XXIV, serie 5ª, 1° sem., pag. 972.
[4] A. Clementi, *Microtitolazione alla formaldeide e sue applicazioni in fisiologia. I. Generalità sulla microtitolazione alla formaldeide*. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXIV, serie 5ª, 2° sem., pag. 51.

Tabella II.

48 ore a 37° in termostato		Quantità adoperata di Na OH 1/50 *n* in cmc.	
dl-leucilglicina 1/1000 *n* cmc. 10: Estratto acquoso di fegato di vitello cmc. 0,2. Toluolo cmc. 0,5		1,050	
Acqua distillata cmc. 10: Estratto acquoso di fegato di vitello cmc. 0,2. Toluolo cmc. 0,5		0,425	
Come leucina + glicocolla	calcolato	1,000	
	trovato	0,625	
		in mmgr.	in %
dl-leucilglicina	aggiunta	1,88	100
	idrolizzata	0,47	25

Tabella III.

48 ore a 37° in termostato		Quantità adoperata di Na OH 1/50 *n* in cmc.	
dl-leucilglicina 1/1000 *n* cmc. 20: Estratto acquoso di muscolo pettorale di cane liberato dal sangue e freschissimo cmc. 0,5		1,200	
Acqua distillata cmc. 20: Estratto acquoso di muscolo pettorale di cane cmc. 0,5		0,150	
Como leucina + glicocolla	calcolato	2,000	
	trovato	1,050	
		in mmgr.	in %
dl-leucilglicina	aggiunta	3,76	100
	idrolizzata	0,18	5

Tabella IV.

72 ore a 37° in termostato		Quantità adoperata di NaOH 1/50 *n* in cmc.	
dl-leucilglicina 1/1000 *n* cmc. 20: Estratto acquoso di mucosa intestinale di vitello cmc. 0,5		1,850	
Acqua distillata cmc. 20: Estratto acquoso di mucosa intestinale di vitello cmc. 0,5		0,400	
Come leucina + glicocolla	calcolato	2,000	
	trovato	1,450	
		in mmgr.	in %
dl-leucilglicina	aggiunta	3,76	100
	idrolizzata	1,68	45

Tabella V.

48 ore a 37° in termostato		Quantità adoperata di NaOH 1/50 *n* in cmc.	
dl-leucilglicina 1/1000 *n* cmc. 20: Estratto acquoso di muscolo di vitella cmc. 0,2.		1,300	
Acqua distillata cmc. 20: Estratto acquoso di muscolo di vitella cmc. 0,2.		0,300	
Come leucina + glicocolla	calcolato	2,000	
	trovato	1,000	
		in mmgr.	in %
dl-leucilglicina	aggiunta	3,76	100
	idrolizzata	0,0	0

Tabella VI.

7 giorni a 37° in termostato		Quantità adoperata di NaOH 1/50 *n* in cmc.	
dl-leucilglicina 1/1000 *n* cmc. 20:			
Estratto acquoso di muscolo di cane (lavati con acqua e lasciati 24 ore a temperatura ambiente) cmc. 0,5.		1,325	
Acqua distillata cmc. 20:			
Estratto acquoso di muscolo di cane cmc. 0,5.		0,310	
Come leucina + glicocolla . . .	calcolato . .	2,000	
	trovato . . .	1,015	
		in mmgr.	in °/₀
dl-leucilglicina	aggiunta . .	3,76	100
	idrolizzata .	0,0	0

Tabella VII.

7 giorni a 37° in termostato		Quantità adoperata di NaOH 1/50 *n* in cmc.	
dl-leucilglicina 1/1000 *n* cmc. 20:			
Estratto acquoso di fegato di cane (dopo 24 ore della morte dell'animale) cmc. 0,5		1,435	
Acqua distillata cmc. 20:			
Estratto acquoso di fegato di cane cmc. 0,5.		0,200	
Come leucina + glicocolla . . .	calcolato . .	2,000	
	trovato . . .	1,235	
		in mmgr.	in °/₀
dl-leucilglicina	aggiunta . .	3,76	100
	idrolizzata .	0,87	*23*

I risultati ottenuti in queste esperienze confermano, per quanto riguarda l'erepsina intestinale e la peptidasi epatica, i risultati delle mie ricerche precedenti [1]. e cioè dimostrano quantitativamente, che solo la metà (o meno della metà) della quantità totale della *dl*-leucilglicina sottoposta alla loro azione viene idrolizzata dai fermenti peptidolitici; dimostrazione quantitativa del principio dell'azione asimmetrica dei fermenti peptidolitici sui polipeptidi racemici, dedotto finora specialmente dalle osservazioni polarimetriche.

Per quanto riguarda l'azione degli estratti muscolari sulla *dl*-leucilglicina i risultati ottenuti nelle presenti ricerche meritano qualche considerazione, poichè da essi non si rileva, che l'estratto muscolare abbia esercitato un'azione evidente sul dipeptide; è da ricordare in proposito, che in alcune esperienze Aberhalden e Teruuchi [2] facendo agire succo ottenuto con la pressa di Buchner da muscoli di vitello su gr. 1,5 di glicilglicina, su 4 gr. di leucilglicina e su 4 gr. di glicildl-alanina adoperando il metodo della eterificazione, non poterono constatare alcuna scissione dei dipeptidi aggiunti oppure una lievissima scissione. Gli Autori rilevarono questo fatto, ma non si credettero autorizzati per ciò a concludere, che il succo pressato di vitello possiede poca o nessuna azione proteolitica; essi ricordarono, che in altre esperienze, dove fu adoperato succo di muscoli freschi di coniglio, si potè constatare un'azione proteolitica. Per spiegare quindi questa contraddizione essi emisero l'ipotesi, o che i muscoli di vitello non sono adattati alla scomposizione e alla rigenerazione rapida delle proteine a differenza dei muscoli di conigli, o che i muscoli, adoperati nella loro esperienza, non erano abbastanza freschi; conclusero in ogni modo rilevando, che questo fatto meritava di essere ulteriormente studiato, tanto più che nel succo di muscolo di cane, essi trovarono presente l'azione proteolitica. I risultati delle mie ricerche credo che mettono nuovamente sul tappeto il problema della esistenza e del comportamento dei fermenti peptidolitici nel *tessuto muscolare:* infatti, oltre l'ipotesi di Aberhalden si può fare un'altra supposizione e cioè, che la presenza o l'assenza di sangue nel tessuto muscolare adoperato determini o partecipi alla variazione dei risultati delle diverse esperienze: mi riservo frattanto di riprendere la questione e mediante ricerche esaurienti risolverla definitivamente.

Le conclusioni, a cui le presenti ricerche conducono sono le seguenti:

1°. La *microtitolazione alla formaldeide* può trovare campo di applicazione fecondo nella ricerca e nello studio dei *fermenti che idrolizzano i polipeptidi.*

(1) A. Clementi, loc. cit.

(2) Aberhalden e Teruuchi, *Studien über die proteolistitche Wirkung der Prebsäfte einiger tierischer Organe sowie des Darmsaftes.* Zeitschrieft f. Physiologische Chemie. Bd. 49, 1906, pag. 5.

2°. La dimostrazione *quantitativa* del principio di Emilio Fischer dell'azione asimmetrica esercitata dalle peptidasi sui polipeptidi racemici, che a me è riuscito di portare per la prima volta applicando il metodo originale di Sörensen, scaturisce anche da queste ricerche in cui fu applicato il metodo della microtitolazione al formolo.

3°. A spiegare i risultati negativi ottenuti per quanto riguarda l'azione peptidolitica di *estratti acquosi muscolari* sono necessarie ulteriori esperienze che stabiliscano la parte che nel determinismo di tali risultati spetta al sangue o al siero di sangue.

Mi riserbo di studiare la possibilità pratica dell'applicazione della microtitolazione alla formaldeide per la determinazione dell'azione dell'arginasi, per la ricerca quantitativa degli aminoacidi nel sangue e in altri liquidi dell'organismo.

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXIV. (1892-1915). Fasc. 2°. Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIV. (1892-1915). Fasc. 1-2.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XI. Fasc. 3.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

RENDICONTI — Luglio 1915.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie, sino al 18 luglio 1915.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 21 agosto 1915.* **N. 3.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXIV°. — Fascicolo 3°

2° Semestre.

Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie sino al 1° agosto 1915.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI
pervenute all'Accademia durante le ferie del 1915.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Geometria. — *Sulle superficie algebriche d'ordine 6 con infinite coniche.* Nota di GIUSEPPE MARLETTA, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO [1].

Scopo di questa Nota è di assegnare le superficie algebriche d'ordine $n=6$, con infinite coniche tali che i loro piani costituiscano un inviluppo di classe $\mu=4$, cioè [2] di classe massima.

1. Sia γ una superficie algebrica irriducibile d'ordine $n=6$, avente un fascio [3] di coniche (k) generalmente irriducibili.

Indichiamo con (π) l'inviluppo (irriducibile) costituito dai piani di queste, inviluppo che supporremo sempre di classe $\mu=4$, e con s il numero di coniche di (k) esistenti in un piano generico di (π).

È noto [4] essere

$$12=2\mu s+\delta+2\delta', \tag{1}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 18 luglio 1915.

[2] In generale: per una superficie d'ordine $n>4$, è sempre $\mu<n-1$. Vedi il mio lavoro *Sulle superficie algebriche con infinite coniche, e, in particolare, su quelle di ordine 5* [Atti dell'Accademia Gioenia, Catania, ser. 5ª, vol. VIII (1915)], n. 2.

[3] È noto essere un fascio ogni sistema (necessariamente) ∞^1 irriducibile di coniche (generalmente irriducibili) esistente sopra una superficie algebrica d'ordine $n>4$. Vedi De Franchis, *Le superficie irrazionali di 5° ordine con infinite coniche* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XV, ser. 3ª (1906)].

[4] Loc. cit. in [1].

ove δ è il numero dei punti doppî dell'involuzione I_2^1 secata dalle coniche di (k) sopra una sezione piana generica c di γ; e δ' è il numero di quei punti (distinti o no) di c, su ognuno dei quali cadono (su due rami) due punti coniugati della detta I_2^1.

Si noti inoltre che, indicando con p_c il genere di c, e con p_i il genere di I_2^1, cioè di (k), è (per la formula di Zeuthen) $\delta = 2(p_c + 1) - 4p_i$.

2. Si osservi, ora, che dalla (1), giacchè δ e δ' non sono negativi ed è $\mu = 4$, si deduce $s = 1$.

Inoltre, siccome certamente esistono piani tangenti a tre coniche di (k), ma non a tutte le coniche di questo *fascio*, così è sempre $\delta \geq 3$; anzi precisamente $\delta = 4$ e, quindi, $\delta' = 0$.

3. Sia (π) razionale e gobbo, onde (nn. 2 e 1) la sezione piana generica della superficie γ è di genere $p_c = 1$. Ne segue che γ è proiezione della superficie γ_1, dell' S_6, rappresentata nel piano dal sistema lineare $|\lambda_{123}^3|$, ove i punti $1, 2, 3$ sono in posizione generica tra loro.

I piani delle coniche di γ_1 aventi per immagini le rette uscenti dal punto 1 (p. es.), coniche che costituiscono un fascio (k_1), generano una varietà a tre dimensioni la quale, come facilmente si dimostra, è d'ordine quattro. Proiettando γ_1 da un piano generico, in un S_3, otteniamo una superficie γ d'ordine $n = 6$, la quale possiede tre fasci di coniche; e i piani delle coniche di ognuno di questi fasci costituiscono un inviluppo (π) gobbo, razionale e di classe $\mu = 4$.

Che (π) sia gobbo, si dimostra osservando che se, invece, fosse conico, dovrebbe esistere un S_3 passante per il piano centro di proiezione, e contenente o una curva incontrata da tutti i piani del fascio (k_1), ovvero un punto comune a tutti questi piani medesimi. La prima ipotesi è assurda perchè il piano centro di proiezione è generico, e quindi non incontra la varietà costituita dai piani del fascio (k_1); la seconda ipotesi, poi, si esclude subito, osservando che due qualunque coniche di (k_1) non giacciono in uno stesso S_4.

4. Supponiamo, ora, che l'inviluppo (π), pur essendo ancora gobbo, sia ellittico, onde (nn. 2 e 1) è $p_c = 3$.

Dunque [1] la superficie γ esiste, ed è riducibile, mediante una trasformazione cremoniana, a un cono cubico ellittico, sul quale le sezioni piane di γ sono rappresentate da curve d'ordine otto, passanti doppiamente per il vertice del cono, con altri tre punti-base doppî e due punti-base semplici (distinti o infinitamente vicini) [2].

[1] Scorza, *Le superficie a curve sezioni di genere 3* [Annali di Matematica, ser. 3ª, tomo XVI, n. 50; e tomo XVII, nn. 7 e 8].

[2] Si noti che γ non è alcuna delle superficie studiate dal Castelnuovo, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere 3* [Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, vol. XXV (1890)], perchè γ è irrazionale e (k) non ha alcun punto-base.

5. Supponiamo, ora, che l'inviluppo (π) sia conico, cioè abbia un (solo) punto-base V; questo sarà doppio per γ e punto-base per il fascio (k).

6. Sia (π) razionale, onde (nn. 2 e 1) la sezione piana generica di γ è di genere $p_c = 1$. Ne segue che γ è proiezione della superficie γ_1, dell' S_6, rappresentata nel piano dal sistema lineare $|\lambda^3_{123}|$, ove i punti 1 e 2 sono infinitamente vicini tra loro.

7. Sia ora (π) ellittico (e conico), sia cioè $p_i = 1$, e quindi (nn. 2 e 1) $p_c = 3$. Ne segue, tenendo conto dei citati lavori di Castelnuovo e di Scorza, che γ esiste ed è rappresentabile sul cono cubico (ellittico) mediante un sistema lineare ∞^3 di curve del sesto ordine segate da quadriche che toccano il cono in un punto fisso (1), e passano per due punti generici di questo cono medesimo.

8. L'inviluppo (π) sia di genere $p_i = 2$.

Proiettando genericamente sopra un piano τ il fascio (k), si ottiene un sistema (k') ∞^1 di coniche (generalmente irriducibili) d'indice $\nu = 6$, cui appartengono, ognuna contata due volte, le quattro rette b_1, b_2, b_3, b_4, tracce, in τ, dei quattro piani di (π) passanti per il centro di proiezione. Anzi, se D è un punto qualunque di una di queste quattro rette, delle sei coniche di (k') passanti per D due coincidono con questa retta (doppia) medesima.

Stabiliamo ora un'omografia fra le coniche-luogo di τ e i punti di un S_5. È noto (2) che alle coniche di τ, ognuna costituita da una retta doppia, corrispondono i punti di una superficie ψ di Veronese. Siccome le rette b_1, b_2, b_3, b_4 appartengono ad un fascio, ad esse, contate due volte, corrispondono quattro punti B_1, B_2, B_3, B_4 di una stessa conica t di ψ. Inoltre, al sistema lineare ∞^4 delle coniche di τ passanti tutte per un punto D di b_1, p. es., corrisponde l'iperpiano tangente doppio Σ di ψ lungo la conica d corrispondente di D, e, per quanto sopra si disse, quest'iperpiano Σ deve segare la sestica c^6, corrispondente di (k'), in sei punti, due dei quali devono coincidere in B_1, onde Σ passa per la tangente di c^6 in B_1.

Ripetendo il medesimo ragionamento per ogni punto di b_1, si deduce che la tangente di c^6 in B_1 deve appartenere a tutti gli iperpiani tangenti doppî di ψ lungo le coniche di questa passanti per B_1. Ma tutti questi iperpiani hanno in comune soltanto il piano tangente a ψ in B_1, quindi la tangente di c^6 in questo punto appartiene a questo piano tangente. Concludendo, possiamo affermare che la curva c^6 e la superficie ψ si toccano nei punti B_1, B_2, B_3, B_4, onde c^6 appartiene all'iperpiano tangente doppio di ψ lungo la conica t, e il birapporto di questi quattro punti, considerati in t,

(1) Castelnuovo, loc. cit. in (5), n. 9.

(2) Segre, *Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano e......* [Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, vol. XX (1885)], n. 1.

è eguale a quello (¹) dei quattro spazî $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ che, contenendo t, passano rispettivamente pei piani tangenti ψ in questi punti medesimi.

Ciò posto, dicasi φ la rigata cubica normale cui appartiene c^6, e t' la conica di φ passante pei punti B_1, B_2, B_3, B_4. Il piano tangente φ in B_1, p. es., e quello tangente ψ in questo stesso punto, hanno in comune la tangente di c^6 in B_1 stesso, onde essi giacciono in uno spazio passante per le due coniche complanari t e t'. Ne segue che il birapporto dei punti B_1, B_2, B_3, B_4, considerati in t', è eguale (²) a $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$, e di conseguenza $t \equiv t'$.

Infine, siccome le generatrici di φ stabiliscono fra i punti di t e quelli della retta direttrice di φ la stessa proiettività stabilita dai piani generatori dell'ipersuperficie cubica Γ (³), costituita dai piani tangenti di ψ nei punti di t, concludiamo che φ, e quindi c^6, giace in Γ, il che è assurdo, perchè, se così fosse, la conica generica di (k') sarebbe degenere.

Concludiamo dunque che l'ipotesi $p_i = 2$ è da escludere (⁴).

9. L'ipotesi $p_i = 3$, infine, si esclude pure, sia indirettamente da quanto si disse nel num. precedente, sia osservando che le tangenti alle coniche di (k) in V, punto-base (n. 5) di (π) e di (k), dovrebbero formare un cono quadrico (degenere o no); ciò che è assurdo, perchè il fascio (k) è di genere $p_i = 3$ e non iperellittico.

10. Dal breve studio che si è fatto, possiamo concludere che

le superficie d'ordine $n = 6$, con infinite coniche i cui piani costituiscano un inviluppo di classe $\mu = 4$, sono le quattro superficie γ delle quali si parla rispettivamente nei nn. 3, 4, 6, 7.

(¹) Chiamando corrispondenti un punto di t e uno spazio per B_1, B_2, B_3, B_4 ogni qual volta questo contiene il piano tangente ψ in quello, si ottiene un'omografia.

(²) Come la (⁸) sostituendo t' e φ rispettivamente a t e ψ.

(³) Essendo $t \equiv t'$, φ e ψ si toccano nei quattro punti B_1, B_2, B_3, B_4 (anzi in ogni punto di $t \equiv t'$), onde le generatrici di φ uscenti da questi punti appartengono ai piani tangenti di ψ in essi, e quindi la retta direttrice di φ, avendo già quattro punti in Γ, appartiene a questa.

(⁴) Le considerazioni fatte in questo n. 8, un po' lunghe, non sono inutili; esse guidano, come si vedrà in un mio prossimo lavoro, alle proprietà delle superficie con infinite coniche, qualunque siano i valori di n, μ, s, p_i. Per es., osservando che la c^n (analoga alla c^6 del testo) non deve giacere sull'ipersuperficie luogo dei piani delle coniche di ψ, si deduce $\mu < \frac{3n+1}{4s}$, limite assai più vantaggioso di quello conosciuto e rammentato nella (¹).

Meccanica. — *Nuove esperienze sulla elasticità del rame.* Nota di Gustavo Colonnetti, presentata dal Socio G. A. Maggi [1].

In una recente ripresa delle mie ricerche sull'isteresi elastica ho potuto, per mezzo di nuove disposizioni sperimentali [2], realizzare quei cicli bilaterali il cui interesse teorico io avevo già cercato di mettere in rilievo nell'ultima Nota in cui mi sono occupato dell'argomento [3].

A conferma di quanto avevo scritto in quell'occasione, riferirò qui la *storia* di una provetta sulla quale io ho lungamente sperimentato nello scorso mese di aprile, ed il cui comportamento mi sembra riassumere assai bene i risultati delle mie più recenti osservazioni.

A questi risultati io continuo, s'intende, ad annettere un valore puramente qualitativo, convinto che, in un problema complesso e delicato com'è quello del comportamento elastico dei materiali dotati di isteresi, non occorre tanto, allo stato attuale delle nostre conoscenze, precisare numericamente le proprietà specifiche dei singoli corpi, quanto farsi un'idea chiara dell'andamento generale dei fenomeni e rendersi conto del modo con cui le esperienze debbono essere condotte se si vuole con esse riuscire a portare un po' di luce sulle relazioni che intercedono fra le forze esterne applicate e le deformazioni da esse prodotte.

Le esperienze che sto per descrivere vennero eseguite colla macchina per prove alterne a trazione e pressione, recentemente costruita dalla ditta Fratelli Amsler di Sciaffusa per il Laboratorio sperimentale dei materiali da costruzione della R. Università di Pisa, su di una provetta di 20 millimetri di diametro ricavata, secondo le norme per l'uso di detta macchina [4], da un tondino di rame di 40 millimetri di diametro.

Le deformazioni vennero misurate col solito apparecchio a specchi di Martens, su di una lunghezza utile di 200 millimetri; l'ingrandimento, di 500 volte, permetteva di apprezzare nelle singole letture $\frac{1^{mm}}{5000}$; le deformazioni dell'asse geometrico della provetta si ottenevano, come d'uso, sommando le differenze delle letture relative a due generatrici opposte, epperò risultavano espresse in decimillesimi di millimetro.

(1) Pervenuta all'Accademia il 7 luglio 1915.

(2) Cfr. G. Colonnetti, *Una nuova macchina per prove alterne a trazione e pressione*, Giornale del genio civile, 1915.

(3) Id., *Esperienze sull'elasticità a trazione del rame*, Nota III, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, ser. 5ª, vol. XXIII (15 marzo 1914)

(4) Cfr. la mia Nota già citata, Giornale del genio civile, 1915.

Le tre tabelle numeriche allegate a questa Nota, coi relativi diagrammi (fig. 1 e 2) disegnati in assi coordinati obliqui come quelli che accompagnarono i miei precedenti scritti sull'argomento [1], si riferiscono a tre sole fra le numerose esperienze da me effettuate sul saggio: e precisamente alla prima eseguita in ordine di tempo, ed a due altre, svolte parecchi giorni appresso, dopo che il materiale era stato ripetutamente e variamente cimentato, e poi assoggettato al noto processo di eliminazione delle deformazioni mediante alternazioni decrescenti del carico.

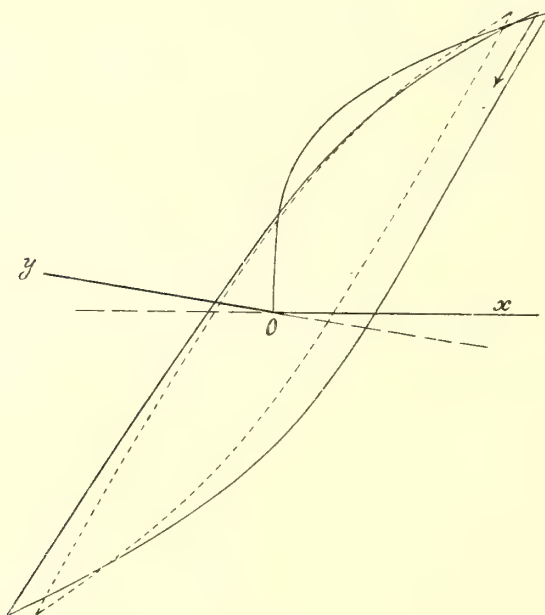



FIG. 1.

Questo processo si è rivelato perfettamente idoneo a determinare la formazione di uno stato del materiale, praticamente assai ben definito, che si può dire *neutro* in quanto il saggio si presenta privo di deformazioni apprezzabili, ed atto a subire, sotto l'azione di sforzi eguali e di segno contrario, variazioni di dimensione alla lor volta sensibilmente eguali e di segno contrario. In questo stato neutro però le proprietà del materiale si rivelano in generale nettamente distinte da quelle che lo caratterizzavano nello stato iniziale.

Ciò dipende, come è noto, da un complesso di alterazioni nelle proprietà del materiale le quali si producono sotto l'azione delle prime sollecita-

[1] Cfr. G. Colonnetti, *Esperienze sull'elasticità a trazione del rame*, Nota I, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, ser. 5ª, vol. XXIII (1° febbraio 1914).

zioni esterne che ad esso vengono applicate: la cosa appare nettamente a chi osservi la fig. 1 nella quale, per maggior chiarezza, è stato riportato con linea punteggiata il ciclo chiuso (fig. 2) che il materiale tende a descrivere dopo un conveniente numero di inversioni dello sforzo.

Questo ciclo chiuso (che nella fig. 3 è stato disegnato in assi coordinati ortogonali affinchè apparisse nelle sue vere dimensioni relative) si presenta sensibilmente simmetrico rispetto all'origine e dotato di tutte quelle proprietà che si sono già riscontrate nei cicli chiusi unilaterali (¹).

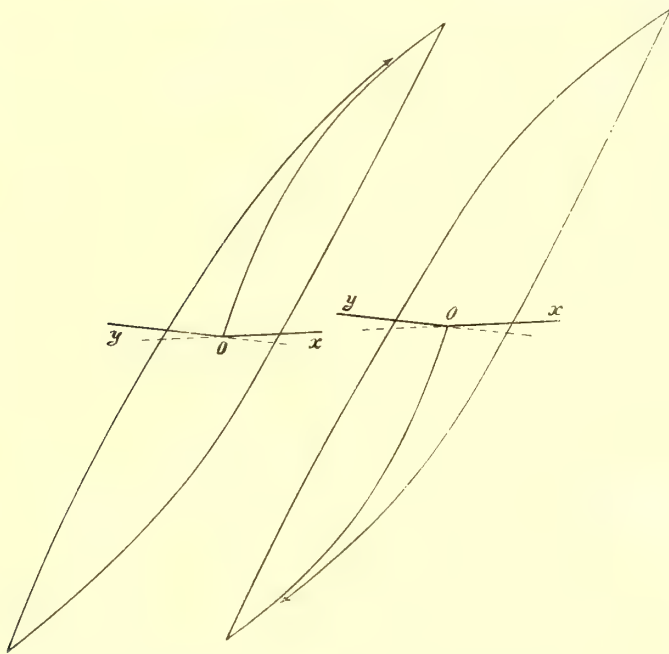



FIG. 2.

Si è così condotti a precisare il concetto di *incrudimento* attribuendogli un significato affatto analogo a quello a cui alludono i fisici quando parlano di accomodamento dei cicli.

Riesce inoltre profondamente modificata la portata dell'abituale distinzione fra deformazioni elastiche e deformazioni permanenti, in quanto essa non sembra derivare da caratteristiche proprie del materiale, ma piuttosto dall'ordine con cui su di esso si succedono le sollecitazioni, cioè dal modo con cui vien condotta l'esperienza.

In realtà ciò che è veramente essenziale nella deformazione dei materiali di cui qui si tratta (e, forse, non soltanto di questi) è la *non invertibilità* del fenomeno.

(¹) Cfr. G. Colonnetti, *Esperienze sull'elasticità a trazione del rame*, Nota II, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, ser. 5ª, vol. XXIII (15 febbraio 1914).

Bisogna pertanto decidersi a rinunciare definitivamente a tutte le formole più o meno complesse con cui da molti autori [1] si è cercato di esprimere le deformazioni di questi materiali come funzioni monodrome delle sollecitazioni.

Dal punto di vista scientifico tali formole avranno sempre il difetto di non rappresentare che un caso molto particolare di deformazione, spesso

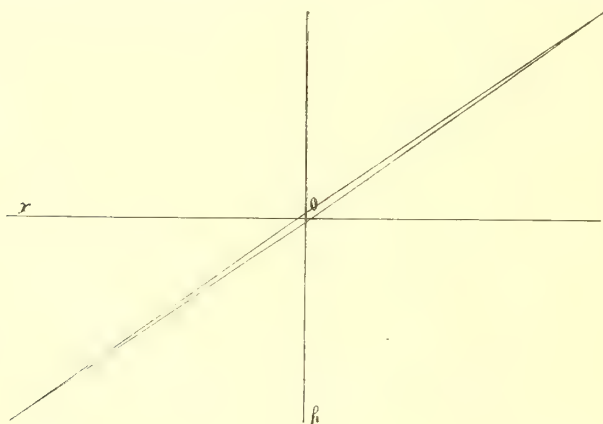



Fig. 3.

creato convenzionalmente dallo sperimentatore e per nulla corrispondente al modo con cui i materiali lavorano nelle costruzioni; in ogni caso il problema generale resta affatto insoluto.

Mentre dal punto di vista tecnico, tenuto conto della forma molto allungata dei cicli (fig. 3), pare assai discutibile se vi sia davvero qualche motivo di rinunciare ai vantaggi della classica formola di Hooke, la quale, nella sua impareggiabile semplicità, riesce, ancora meglio di ogni altra, a compendiare con sufficiente approssimazione l'infinita varietà dei processi che si verificano nei materiali dotati di isteresi elastica.

[1] Cfr. C. Bach, *Elastizität und Festigkeit*, Berlin, 1911.

Tabella I.

Data dell'esperienza: 14 aprile 1915, ore 16; temperatura 14°.

Sforzo (positivo se di trazione) Kgr.	Specchio sinistro		Specchio destro		Somma delle differenze parziali	Deformazioni totali $\frac{1^{mm}}{10000}$
	Letture $\frac{1^{mm}}{5000}$	Differenze parziali	Letture $\frac{1^{mm}}{5000}$	Differenze parziali		
0	1500		1500			0
		176		80	256	
500	1676		1580			256
		125		142	267	
1000	1801		1722			523
		140		156	296	
1500	1941		1878			819
		165		181	346	
2000	2106		2059			1165
		— 127		— 152	— 279	
1500	1979		1907			886
		— 116		— 163	— 279	
1000	1863		1744			607
		— 115		— 162	— 277	
500	1748		1582			330
		— 131		— 146	— 277	
0	1617		1436			53
		— 136		— 144	— 280	
— 500	1481		1292			— 227
		— 120		— 175	— 295	
— 1000	1361		1117			— 522
		— 122		— 187	— 309	
— 1500	1239		930			— 831
		— 134		— 198	— 332	
— 2000	1105		732			— 1163
		123		158	281	
— 1500	1228		890			— 882
		121		160	281	
— 1000	1349		1050			— 601
		113		170	283	
— 500	1462		1220			— 318
		99		184	283	
0	1561		1404			— 35
		121		164	285	
500	1682		1568			250
		133		152	285	
1000	1815		1720			535
		141		162	303	
1500	1956		1882			838
		148		174	322	
2000	2104		2056			1160
...	...	...	...	...	...	...

Tabella II.

Data dell'esperienza: 24 aprile 1915, ore 10; temperatura 15°.

Sforzo (positivo se di trazione) Kgr.	Specchio sinistro		Specchio destro		Somma delle differenze parziali	Deformazioni totali $\frac{1^{mm}}{10000}$
	Letture $\frac{1^{mm}}{5000}$	Differenze parziali	Letture $\frac{1^{mm}}{5000}$	Differenze parziali		
0	1500		1500			0
		145		128	273	
500	1645		1628			273
		167		110	277	
1000	1812		1738			550
		167		122	289	
1500	1979		1860			839
		172		136	308	
2000	2151		1996			1147
		— 153		— 125	— 278	
1500	1998		1871			869
		— 160		— 120	— 280	
1000	1838		1751			589
		— 168		— 112	— 280	
500	1670		1639			309
		— 150		— 130	— 280	
0	1520		1509			29
		— 167		— 113	— 281	
— 500	1352		1396			— 252
		— 164		— 125	— 289	
— 1000	1188		1271			— 541
		— 181		— 118	— 299	
— 1500	1007		1153			— 840
		— 165		— 140	— 305	
— 2000	842		1013			— 1145
		135		137	272	
— 1500	977		1150			— 873
		164		116	280	
— 1000	1141		1266			— 593
		164		116	280	
— 500	1305		1382			— 313
		166		114	280	
0	1471		1496			— 33
		159		125	284	
500	1630		1621			251
		169		119	288	
1000	1799		1740			539
		167		130	297	
1500	1966		1870			836
		171		136	307	
2000	2137		2006			1143
...	...	...	...	...	...	...

Tabella III.

Data dell'esperienza: 24 aprile 1915, ore 15; temperatura 15°.

Sforzo (positivo se di trazione) Kgr.	Specchio sinistro		Specchio destro		Somma delle differenze parziali	Deformazioni totali $\frac{1^{mm}}{10000}$
	Letture $\frac{1^{mm}}{5000}$	Differenze parziali	Letture $\frac{1^{mm}}{5000}$	Differenze parziali		
0	1500		1500			0
		— 157		— 115	— 272	
— 500	1343		1385			— 272
		— 158		— 121	— 279	
— 1000	1185		1264			— 551
		— 160		— 128	— 288	
— 1500	1025		1136			— 839
		— 168		— 140	— 308	
— 2000	857		996			— 1147
		136		140	276	
— 1500	993		1136			— 871
		163		117	280	
— 1000	1156		1253			— 591
		163		117	280	
— 500	1319		1370			— 311
		166		115	281	
0	1485		1485			— 30
		153		129	282	
500	1638		1614			252
		161		124	285	
1000	1799		1738			537
		163		136	299	
1500	1962		1874			836
		170		143	313	
2000	2132		2017			1149
		— 153		— 125	— 278	
1500	1979		1892			871
		— 158		— 121	— 279	
1000	1821		1771			592
		— 166		— 113	— 279	
500	1655		1658			313
		— 153		— 126	— 279	
0	1502		1532			34
		— 162		— 118	— 280	
— 500	1340		1414			— 246
		— 166		— 123	— 289	
— 1000	1174		1291			— 535
		— 174		— 125	— 299	
— 1500	1000		1166			— 834
		— 168		— 142	— 310	
— 2000	832		1024			— 1144
...	...	...	...	...	...	...

Fisica. — *Un apparecchio per lo studio dei gas e dei vapori che si svolgono dagli esplosivi a temperatura ordinaria.* Nota di D. Chiaraviglio e O. M. Corbino, presentata dal Socio Emanuele Paternò [1].

Nelle nostre ricerche sul sistema fulmicotone-nitroglicerina avevamo accertato che, a rarefazioni molto spinte, la tenuta degli apparecchi a vuoto, contenenti una sensibile quantità di esplosivo, non era più così buona come in assenza di questo; sembrava cioè che si sviluppasse progressivamente e costantemente una certa quantità di gas, per effetto di una decomposizione lenta dell'esplosivo, anche a temperature ordinarie.

Di questo sviluppo di gas a temperature ordinarie parlano tutti gli autori che trattano della stabilità degli esplosivi, deducendone l'esistenza sia dall'accertamento del medesimo fatto a temperature molto superiori, sia da osservazioni indirette quali, per es., la diminuzione del contenuto in azoto di polveri di vecchia data.

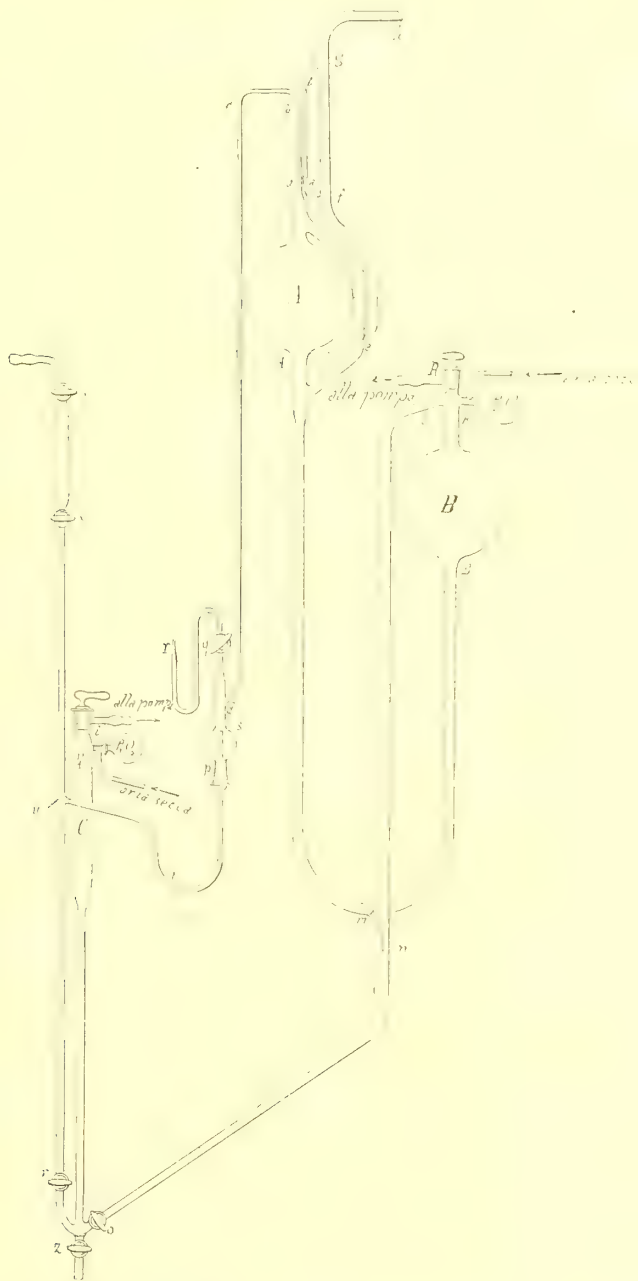
Tuttavia l'osservazione fatta allora incidentalmente, mentre si seguiva un obbiettivo diverso, ci sembrò meritasse uno studio particolareggiato per vedere se, con appositi apparecchi, fosse possibile misurare direttamente quello sviluppo gassoso e seguirlo d'ora in ora, per riconnetterlo con la importante questione dei metodi attualmente in uso nella determinazione del grado di stabilità degli esplosivi.

L'apparecchio da noi ideato a questo scopo, qual'è risultato da una lunga serie di esperienze orientative destinate a raggiungere le condizioni più favorevoli di funzionamento, e ad evitare per quanto era possibile le cause perturbatrici, è rappresentato nella seguente figura.

Esso permette che in un ambiente, dove è disposto l'esplosivo da studiare, si produca il vuoto più spinto che oggi si sappia ottenere, mercè la circolazione di una massa di mercurio che non viene mai in contatto con corpi estranei (tubi di caoutchouc, ecc.); permette inoltre che in quell'ambiente sia assolutamente eliminata la possibilità di rientrata di gas, che non siano quelli provenienti dall'esplosivo; consente infine che dei gas e dei vapori che si sviluppano lentamente da questo si misuri la pressione, coi metodi più delicati che si possan raggiungere, e che i gas stessi vengano accumulati e raccolti per poterli eventualmente analizzare.

Tutto l'apparecchio è in vetro, e le diverse parti sono saldate direttamente senza giunti a grasso. I palloni A e B, della capacità di circa due

[1] Pervenuta all'Accademia il 26 luglio 1915.

litri, comunicano per mezzo di un tubo a U le cui branche verticali sono lunghe più di 76 centimetri. Normalmente il pallone B è pieno di mercurio,

questo può spostarsi, attraverso al tubo a U, verso A, o essere richiamato in B, ricorrendo al rubinetto R che permette di far rientrare aria secca in B, o di farvi il vuoto con una pompa ausiliaria di qualunque natura.

Il pallone A è connesso a una serie di tubi disposti come in una pompa Töpler.

Così può esser fatto il vuoto in un ambiente che comunica con *h*, analogamente a quanto può farsi con una macchina Töpler; con la modificazione essenziale che la comunicazione fra i palloni A e B è in vetro, anzichè esser costituita da un tubo di caoutchouc, che produce sempre alterazioni nel mercurio e nel funzionamento di simili apparecchi. E poichè viene così resa impossibile la manovra del sollevamento e abbassamento del pallone B, vi si è sostituito il giuoco della rarefazione e della rientrata dell'aria nel pallone B attraverso al rubinetto R. Il mercurio in B è sempre in contatto di aria accuratamente disseccata prima di farla rientrare; il palloncino con anidride fosforica serve ad assicurarne il grado di disseccamento.

I gas provenienti da *h* e che, quando l'orifizio *e* è aperto, si diffondono in A, vi raggiungono dopo breve tempo la pressione del luogo di origine. Se allora il mercurio passa da B in A, l'orifizio *e* viene a chiudersi, e i gas contenuti in A si comprimono progressivamente raccogliendosi nel tubo capillare *a b*.

Si riconosce subito dalla disposizione della figura che il pallone A oltre a funzionare da pompa Töpler per la espulsione dei gas raccolti attraverso al tubo *a b c d*, funziona anche da provino di Mac-Leod, poichè permette di misurare, prima della espulsione, i gas che si trovano allora condensati nel capillare *a b*. La pressione raggiunta dopo ottenuta la compressione viene misurata dal dislivello del mercurio fra *a b* e *a' b'*. Il volume del gas compresso è limitato dal mercurio del pallone A, e da quello del tubo di espulsione *d c b* che resta sospeso nel capillare *b a* a un'altezza arbitraria.

Questa posizione del menisco superiore in *a b* può essere modificata a volontà con la manovra dei rubinetti *x*, e *v*; poichè il tubo verticale *v u x y* è permanentemente pieno di mercurio; e così quando *v* è chiuso e si apre *x*, il mercurio attraverso *u t s d* invade il capillare *d c b* e si porta al punto voluto in *b a*.

Qualora invece si chiuda *x* e si apra *v*, il capillare *b c d* viene a porsi in comunicazione col serbatoio C, pieno di mercurio fino a circa la metà.

Questa manovra permette un progresso notevole sulla pompa Töpler. E invero se attraverso *i'* si fa il vuoto con la stessa pompa ausiliaria, in C, il mercurio viene aspirato dal capillare *d c b a*; e allora i gas raccolti nel capillare *a b*, si espandono in *c d*, e vengono poi spinti dal mercurio proveniente dal pallone A, con che possono essere espulsi assai facilmente raccogliendosi sotto il rubinetto *q*. In queste condizioni il mercurio circola da A verso *a b c d* in colonnine frazionate, *come in una pompa Sprengel*, e permette così la espulsione completa del gas condensato in AB, espul-

sione che, come è noto, non si riesce a raggiungere nella Töpler quando il gas condensato si raccoglie in una bollicina che si fissa sulla parete del tubo.

Poichè nella manovra una certa quantità di mercurio è passata dal sistema A B al serbatoio C, basta, per riportarvelo, chiudere v, e aprire o, e far rientrare aria secca in C; con che attraverso alla punta nm il mercurio ripassa nel sistema A B quando si rifà il vuoto in B per preparare la successiva operazione.

Si può così riconoscere che l'apparecchio consente tutte le manovre necessarie, facendo circolare il mercurio sempre in ambiente secco e privo di corpi estranei.

I rubinetti o, v, x (attraverso ai quali il liquido è obbligato a passare solo in piccolissima parte a ogni manovra), sono costruiti in modo speciale che permette quasi l'eliminazione dei grassi, sempre pericolosi per l'inquinamento che ne consegue nel mercurio. Essi del resto, come si riconosce dalla figura, restano sempre sotto pressione di colonne di mercurio superiori a 76 centimetri, e perciò non sono da temere, anche in caso di non perfetta tenuta, possibili rientrate di aria.

I gas espulsi vengono, come si è detto, raccolti fra d e q; con manovre facili a concepire essi possono essere estratti, per l'eventuale analisi, attraverso al rubinetto q e al capillare ricurvo r.

Misura della pressione.

La pressione dei gas raccolti in A viene eseguita, come si è detto, servendosi dello stesso pallone, e del capillare sovrastante, come di provino di Mac-Leod. E poichè è molto grande la capacità del pallone A (circa due litri, come si è detto), la misura può farsi molto esattamente anche se la pressione iniziale è assai piccola. Così se questa è solo di un centomillesimo di mercurio, con che il prodotto pv in millimetri di mercurio-millimetri cubici è misurato del numero 20, si potranno raccogliere nel capillare ab circa 4 millimetri cubici di gas alla pressione di 5 millimetri, il che permette una misura ancora abbastanza esatta.

Ma poichè il provino di Mac-Leod che si fonda sull'applicazione della legge di Boyle, permette solo la valutazione della pressione dei gas, e non quella dei vapori eventualmente presenti, abbiamo creduto opportuno aggiungere all'apparecchio un manometro di non minore sensibilità, ma capace di misurare la totale pressione del miscuglio di gas e vapori, senza bisogno di comprimerli, per la misura, in minor volume.

Ci siamo per questo fondati sulla dissipazione di calore provocata dalle particelle gassose presenti su una spirale di filo di platino, lievissimamente riscaldata da una corrente elettrica, avente la resistenza di circa 23 ohm, e disposta in un'ampolla di vetro saldata all'apparecchio a vuoto.

La spirale costituiva una delle branche di un ponte di Wheatstone, disposto con tutte le cautele per le misure di grande precisione

La corrente elettrica che alimentava il ponte serviva insieme per il riscaldamento della spirale, di una diecina di gradi, e per la misura della resistenza di essa. E poichè l'ampolla era immersa in un termostato a duplice involucro che garantiva entro un millesimo di grado la costanza della temperatura della parete di vetro, mantenuta a circa zero gradi, e poichè, d'altra parte, un dispositivo potenziometrico di alta precisione permetteva, per confronto con una pila normale Weston, che la corrente riscaldatrice fosse tenuta ad un valore determinato e costante entro i limiti di un ventimillesimo, ne risulta che la temperatura e quindi la resistenza assunta dalla spirale, e misurata dal ponte, è funzione soltanto della pressione dei gas e dei vapori che circondano la spirale.

La legge di dipendenza fra la pressione del gas ambiente e la temperatura, e quindi la resistenza assunta dalla spirale, non è facile a dedurre *a priori*. Essa, secondo le belle ricerche di Knudsen, sarebbe lineare per un filo molto sottile, anche dentro limiti estesi di variazione della pressione. Ma non è più tale, come risulta da alcune esperienze eseguite con una spirale identica alla nostra dai dott. Marini e Blache, qualora il filo non sia di spessore piccolissimo.

D'altro canto se si vuole adoperare una corrente riscaldatrice non troppo debole, perchè il dispositivo elettrico abbia una sufficiente sensibilità, e se si vuole inoltre che il filo resti a una temperatura non troppo superiore a quella ambiente, occorre che esso non sia sottilissimo. Fu quindi necessario eseguire una taratura diretta, determinando caso per caso la legge di dipendenza fra la pressione e la resistenza del filo, ciò che poteva farsi facilmente col nostro apparecchio, ricorrendo a un gas di nota costituzione, modificandone progressivamente la pressione, e misurando questa al provino di Mac-Leod, mentre si seguiva al ponte la legge di variazione della resistenza.

Si potè così tracciare una curva che mette in relazione la pressione del gas e la resistenza della spirale. La curva ottenuta ha valore, rigorosamente, solo per il gas che fu usato nelle esperienze di taratura. Ma la teoria della trasmissione del calore a traverso i gas, nel regime delle alte rarefazioni, quale è stata svolta nelle Memorie del Knudsen e confermata nel miglior modo desiderabile dalle sue ricerche sperimentali, permette di prevedere che nelle nostre condizioni la curva tracciata può anche servire per qualunque gas o vapore, purchè di costituzione molecolare poliatomica.

E invero la forma di elica a fitte spire data al filo, e il suo spessore non piccolissimo, permettono di considerare come eguale a 1 il coefficiente di accomodazione della teoria di Knudsen. La trasmissione del calore viene allora a essere determinata solo dal coefficiente teorico di conducibilità del gas; che, per il regime delle pressioni assai basse, dipende alla sua volta da

alcune costanti molecolari in modo conosciuto. E si può facilmente riconoscere che il coefficiente medesimo è praticamente lo stesso per quei gas le cui molecole abbiano il medesimo numero di gradi di libertà, cosicchè sia lo stesso il rapporto fra i calori specifici a pressione e a volume costante. Si potrà quindi, senza errore notevole, ammettere la identità del coefficiente per quei gas o vapori a costituzione molecolare complessa, che conferisce alla molecola il maggior numero possibile di gradi di libertà, cioè 6; e ricorrere per la taratura del manometro elettrico a uno di questi gas, per i quali sia facile la misura della pressione al provino di Mac-Leod. Che se nell'ambiente limitato comune al provino e al manometro elettrico si introduce un miscuglio di gas e vapori, il primo misurerà la sola pressione parziale dei gas, il secondo la pressione totale del miscuglio; e si potrà così dedurre la tensione dei vapori presenti.

Le condizioni da noi realizzate nella disposizione elettrica del ponte eran tali che la variazione di un milionesimo di millimetro nella pressione del gas intorno al filo di platino produceva lo spostamento di circa un millimetro sulla scala del galvanometro. Erano quindi nettamente percepibili le variazioni della tensione del vapore di mercurio che riempiva l'apparecchio quando se ne provocava con un lieve raffreddamento sotto zero gradi la parziale condensazione prima dell'ampolla contenente il filo di platino e immersa nel termostato a ghiaccio.

Con l'apparecchio sopradescritto noi abbiamo eseguito una lunga serie di esperienze preliminari sullo sviluppo progressivo di gas occlusi da parte di corpi pulverulenti come l'anidride fosforica, come anche da parte di sostanze esplosive come il fulmicotone. E possiamo annunziare fin da adesso che la legge di sviluppo continuo di gas da parte del fulmicotone rivela nettamente un processo di lenta decomposizione a temperatura ordinaria. Non si poteva invero attribuire lo sviluppo di gas osservato a semplice liberazione di gas imprigionati nella massa pulverulenta, poichè veniva ridotto a circa la decima parte raffreddando l'esplosivo dalla temperatura ambiente a quella di zero gradi; mentre per lo sviluppo dei gas semplicemente occlusi in corpi pulverulenti un simile abbassamento di temperatura avrebbe prodotto un effetto trascurabile.

La ricerca presenta, a nostro parere, un grande interesse, poichè lo sviluppo progressivo di gas per lenta decomposizione alla temperatura ordinaria è legata ad una modificazione continua dell'esplosivo, colla quale a sua volta è intimamente connesso lo stato di conservazione ed il grado di conservabilità dell'esplosivo stesso: ora è noto con quanta incertezza noi possiamo renderci conto dello stato di conservazione e del grado di conservabilità di un dato esplosivo, i migliori indizii per ciò non potendosi trarre nella pratica che dagli ordinarî metodi per la misura della stabilità nei quali gli

esplosivi sono sottoposti a riscaldamento (da 80 a 135°) che sono ben lungi dal rappresentare le ordinarie condizioni di conservazione.

La possibilità di accertare e misurare la lenta decomponibilità di questi corpi già alla temperatura ordinaria offre quindi il modo di impostare la questione della stabilità e della conservabilità su basi completamente nuove e assai promettenti; noi non possiamo per ora continuare queste ricerche; ci riserviamo tuttavia di riprenderle quando ne avremo la possibilità.

Fisica. — *Interruttore elettrolitico per la corrente alternata* (¹). Nota di G. C. TRABACCHI, presentata dal Socio P. BLASERNA (²).

Quando si deve far funzionare con la corrente alternata un rocchetto che debba servire per alimentare dei tubi per la produzione dei raggi X, uno dei più gravi problemi che si incontrano è certo quello della scelta dell'interruttore.

L'impiego della corrente alternata viene imposto sovente dal fatto che la distribuzione urbana della energia elettrica è fatta in quasi tutti i paesi con tale corrente e i piccoli impianti, specialmente se debbono essere trasportabili, non possono in generale essere muniti di complessi dinamo-motore atti a trasformare localmente la corrente alternata in continua.

La soluzione ideale del problema è per ora rappresentata dal noto interruttore a turbina, azionato da un motore sincrono, il quale interrompe la corrente nell'istante in cui essa assume i suoi valori massimi: alcuni di tali interruttori utilizzano solo la metà di ogni periodo, altri, più perfezionati, con opportuni dispositivi utilizzano ambedue i semiperiodi; uno spinterometro a punta e piano inserito nel senso conveniente tra un polo del rocchetto e il tubo è sufficiente per eliminare le correnti di chiusura che sono sempre molto deboli.

Tali interruttori sono però assai costosi e per di più non ne è facilissimo l'uso e la manutenzione, così che è andato diffondendosi l'*interruttore elettrolitico* malgrado le difficoltà che presenta il suo uso con la corrente alternata.

I difetti essenziali dell'interruttore elettrolitico con la corrente alternata sono principalmente due:

1° La punta di platino si logora rapidamente essendo ad ogni periodo sottoposta per la metà del tempo a funzionare da catodo.

2° Durante il semiperiodo in cui la punta è catodo, e che diremo *semiperiodo inverso*, avvengono delle interruzioni, in generale irregolari, le

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Roma.

(²) Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1915.

quali più che le chiusure che hanno luogo nel *semiperiodo utile*, provocano delle correnti che sono deleterie per il tubo perchè ne determinano rapidamente la metallizzazione e l'indurimento.

Al primo inconveniente si suole ovviare sostituendo alla punta di platino una di ferro che può essere di tanto in tanto rinnovata dato il suo costo esiguo: all'acido solforico si sostituisce una soluzione salina.

Per eliminare le conseguenze del secondo inconveniente sono stati proposti varî dispositivi di valvole da inserirsi tra il rocchetto e il tubo per arrestare le correnti indotte dirette in senso opposto al normale.

Rimane però sempre difficile trovare le condizioni di buon funzionamento a seconda dell'autoinduzione del rocchetto e della durezza del tubo impiegato.

***

Allo scopo di introdurvi dei miglioramenti mi sono innanzi tutto proposto di studiare il funzionamento dell'interruttore elettrolitico per corrente alternata, con un mezzo che permettesse di rendersi conto di tutte le modalità delle interruzioni.

Ho pertanto istituito un dispositivo di studio per i varî interruttori che mi proponevo di esaminare fondato sull'uso del noto *tubo a raggi catodici munito di schermo fluorescente*, il quale realizza il più perfetto oscillografo che si conosca.

Due bobine di opportuno avvolgimento sono disposte in modo da agire ortogonalmente sul fascetto catodico: in una delle bobine passa la corrente alternata presa direttamente; nell'altra la stessa corrente che attraversa il primario del rocchetto e l'interruttore.

La prima determina gli spostamenti secondo l'asse x, la seconda secondo l'asse y.

Dalla forma delle curve ottenute è facile desumere quanto si cerca.

La fig. 1 rappresenta due diagrammi relativi ad uno degli interruttori elettrolitici, più usati con la corrente alternata, costituito da una punta e una lamina di ferro in una soluzione di carbonato di potassio ($d = 1{,}036$). I due diagrammi corrispondono a stadî attraversati durante le manovre di accomodamento: non è raro che durante il funzionamento si ripassi saltuariamente dall'uno all'altro di essi data la irregolarità delle interruzioni durante il semiperiodo inverso.

Da questi diagrammi si deducono con facilità quelli ordinarî della corrente studiata e si vede chiaramente che tale corrente durante il *semiperiodo utile* subisce una buona interruzione durante la fase di massimo seguìta da altre di effetto trascurabile; però durante il *semiperiodo inverso* avviene (sebbene in misura ridotta) la stessa cosa.

Non si comportano meglio altri interruttori analoghi che sono stati proposti allo stesso scopo e nei quali la lamina è di piombo.

È bene notare che per la giusta interpretazione del diagramma oscillografico è necessario determinare il senso in cui esso viene percorso; per fare questa determinazione in modo semplice e sicuro io guardo la figura che si disegna sullo schermo fluorescente attraverso a fenditure praticate radialmente in un disco opaco che gira sull'asse di un motore sincrono messo in moto da corrente della stessa frequenza di quella che passa nell'interrut

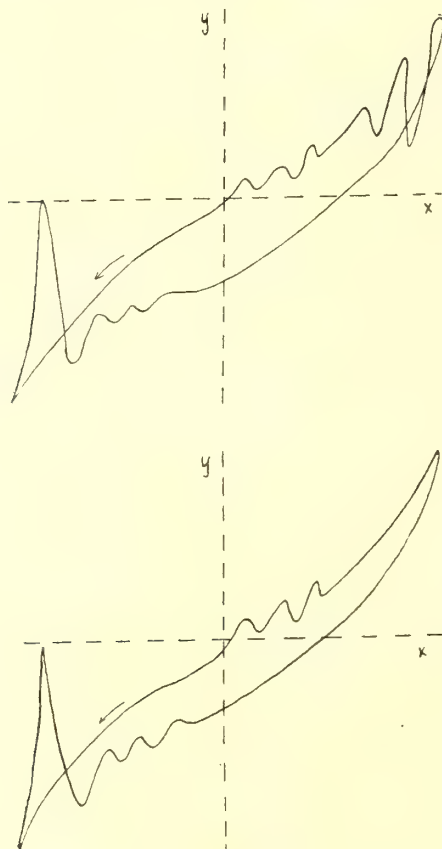



Fig. 1.

tore; le fenditure sono equidistanti e in numero uguale alla metà dei poli dell'induttore del motore, se perciò l'occhio di chi guarda è fermo si vede il puntino immobile in una certa posizione: movendo l'occhio *nel senso del moto del disco* si vedrà la figura disegnarsi lentamente in modo da poter fissare, senza tema di errore, il senso in cui è percorsa.

È con questo metodo che ho potuto segnare le frecce che si vedono nelle figure.

Il funzionamento di questo interruttore varia assai con la temperatura del liquido, la punta si logora rapidamente, e la corrente per la metà del

periodo, oltre a dar luogo alle scariche dannose di cui si è parlato, e che devono essere arrestate da buone valvole, scalda inutilmente il liquido con notevole spreco di energia.

Allo scopo di eliminare per lo meno in parte questa corrente dannosa ed inutile, ho pensato di sostituire alla lamina di ferro una di alluminio cambiando il liquido usato ordinariamente con uno di quelli che meglio si prestano alla funzione polarizzatrice dell'alluminio.

In questo modo essendo notevolmente ridotta l'intensità della corrente durante il *semiperiodo inverso* era da prevedersi anche la cessazione delle interruzioni durante questo tempo; infatti tali interruzioni sono conseguenza dell'effetto termico della corrente, effetto che per la legge di Joule si riduce in misura più forte che non la corrente stessa.

Le previsioni sono state completamente confermate dalle esperienze, così che con il dispositivo, che ora descriverò, ho potuto realizzare un interruttore che funziona in modo che si avvicina assai a quello dell'interruttore con motore sincrono il quale *saltando i semiperiodi inversi interrompe la corrente quando essa ha raggiunto il suo valore massimo durante il semiperiodo utile*.

La lamina è, come ho detto, di alluminio: la sua superficie immersa è utile che sia variabile, perchè la densità di corrente che l'attraversa è bene che non sia mai troppo piccola: la si immergerà quindi più o meno a seconda che si adoperano correnti intense o deboli. Tra i liquidi che ho sperimentato, quelli che ho trovato migliori sono:

il tartrato doppio di sodio e potassio (soluzione al 20 $^0/_0$).

il bicarbonato di sodio (soluzione satura);

la punta può essere di ferro, ma, tenuto conto che il suo logoramento è minimo, perchè minima è la corrente inversa, può essere anche di platino che non si logora affatto: così è facile adattare per la corrente alternata, qualunque comune interruttore elettrolitico per corrente continua, cambiando solo il liquido e la lamina.

Usando il platino si realizza anche una maggiore conservazione del liquido: la lamina di alluminio serve per molto tempo, e non è necessaria per essa nessuna preliminare formazione; quando la si usa per la prima volta si forma con la stessa corrente alternata in 30 secondi al massimo.

Il buon funzionamento dell'apparecchio non varia sensibilmente con la temperatura del liquido e perciò ne è possibile l'uso anche per varie ore di seguito senza inconvenienti.

Riporto (fig. 2) alcuni diagrammi analoghi a quelli della fig. 1, ma relativi alla nuova disposizione usata con liquidi di varia specie:

il primo corrisponde al carbonato di potassio;

il secondo al bicarbonato di sodio;

il terzo al tartrato di potassio e sodio.

Come si vede, deducendo mentalmente dalle figure il diagramma usuale della corrente nei varî casi, *durante il semiperiodo inverso non vi sono mai interruzioni* e per i due ultimi liquidi usati la corrente inversa è debolissima rispetto alla diretta.

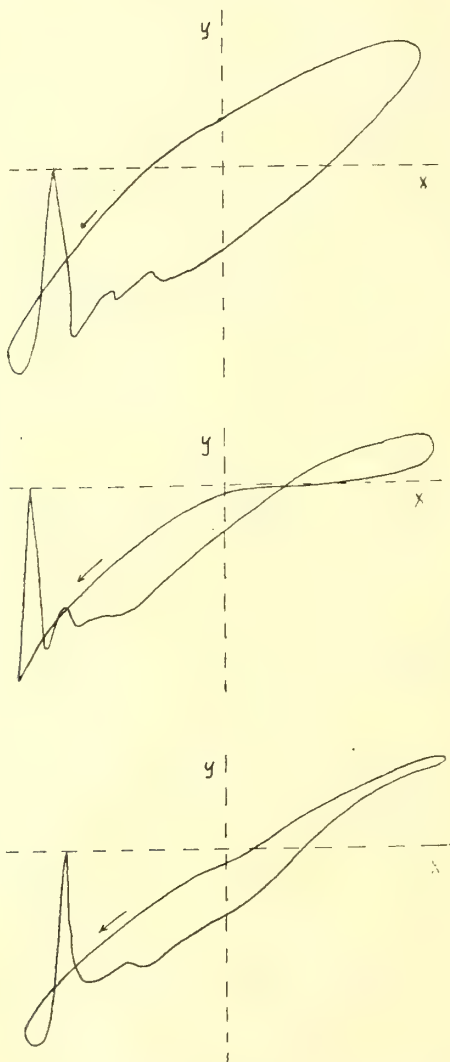



Fig. 2.

Usando pertanto tali liquidi si realizza una notevole economia nella corrente: per sincerarsene basta anche un mezzo grossolano: se alla lamina di alluminio, senza mutare le altre condizioni, si sostituisce una lamina di ferro o di piombo, pur non ottenendosi aumenti nella corrente indotta uti-

lizzabile, si vedrà aumentare notevolmente la intensità efficace della corrente primaria.

La fase della interruzione può essere variata regolando la lunghezza della punta; aumentandola, la interruzione ritarda sempre più rispetto al massimo della corrente e in conseguenza la successiva chiusura si può facilmente far avvenire quando la f. e. m. della corrente è molto prossima ad annullarsi, come è dimostrato dai diagrammi della fig. 3. Il primo corrisponde ad una punta lunga, il secondo ad una breve.

Se, come accade per tutti i rocchetti moderni, è in proprio potere modificare l'autoinduzione del primario insieme alla resistenza inserita nel circuito, si possono ottenere condizioni di funzionamento anche migliori di quelle descritte, come lo provano i diagrammi della fig. 4; in essi si vede che pur determinandosi la interruzione nella fase di massimo, la susseguente corrente di chiusura è praticamente trascurabile; l'interruzione è poi una sola per ogni periodo.

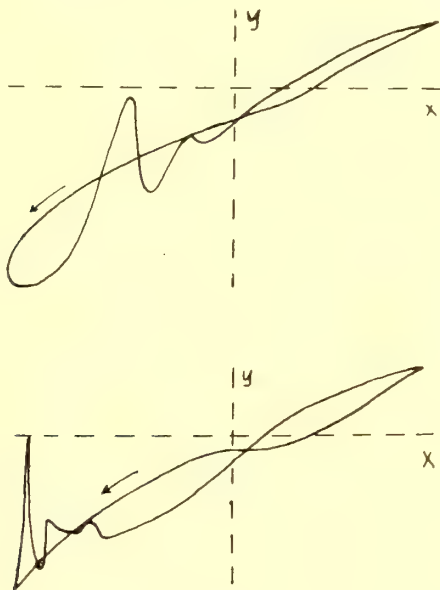



Fig. 3.

Quando tutto è così ben regolato *è anche possibile connettere il tubo generatore di raggi X al rocchetto senza bisogno di intercalare delle valvole*: in mancanza di autoinduzioni e resistenze ampiamente variabili è però sufficiente, anche usando i tubi più molli, inserire uno spinterometro uguale a quello che si usa con l'interruttore a motore sincrono.

Data la grande regolarità di funzionamento di questo apparecchio che possiamo chiamare *interruttore sincrono elettrolitico*, ne consegue che *usando*

la disposizione descritta con la corrente alternata è da ritenersi che i risultati che si possono ottenere per la produzione dei raggi X, sono migliori di quelli che l'ordinario interruttore elettrolitico dà con la corrente continua: con questa, infatti, la legge con cui si susseguono le interruzioni è determinata da condizioni che variano assai con il funzionamento, cosicchè è difficile che le modalità della interruzione siano sempre le stesse, mentre colla corrente alternata dopo la interruzione segue un intervallo determinato di riposo durante il quale tutto torna sempre nelle stesse con-

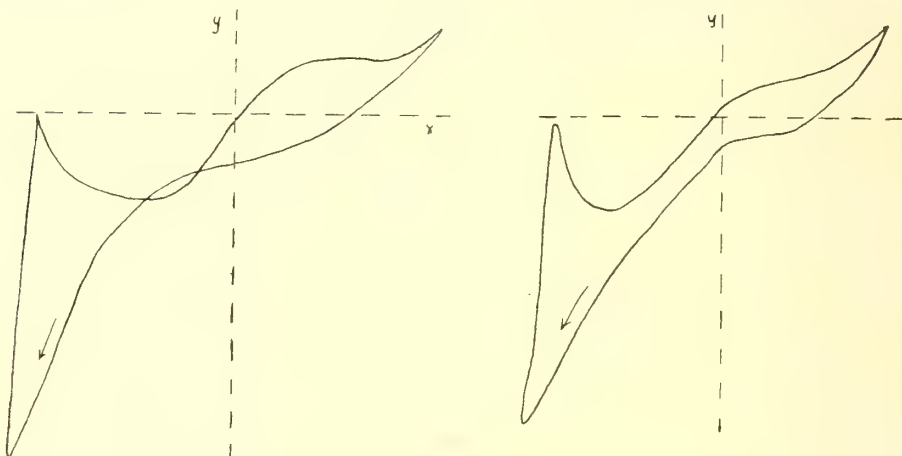



Fig. 4.

dizioni; è infatti caratteristica la stabilità sullo schermo fluorescente, delle figure oscillografiche riportate nella fig. 2 e seguenti.

In virtù di tale stabilità ne è stata possibile la esatta riproduzione proiettandone la immagine, con un buon obbiettivo, sul vetro spulito di una camera fotografica sul quale era appoggiato un foglietto di carta trasparente che serviva a tracciare il diagramma.

Con l'interruttore elettrolitico ordinario e la corrente continua l'oscillografo rivela in generale che le interruzioni non si seguono a intervalli regolari e inoltre le correnti di chiusura, data la costanza della f. e m., sono quasi sempre tali da generare correnti indotte capaci di attraversare i tubi danneggiandoli, se non si fa uso di buone valvole.

Il funzionamento dei tubi generatori di raggi X è, invece, con l'interruttore descritto, assolutamente perfetto, con gran beneficio per la loro durata, essendo completamente eliminate le scariche dannose: le correnti di apertura, durante il semiperiodo inverso, mancano del tutto, la corrente di chiusura, durante il semiperiodo utile, si può rendere così debole che una interruzione di pochi millimetri tra piano e punta è sufficiente ad eliminarla.

Una prova brillante della regolarità del funzionamento è data dal fatto che, alimentando in parallelo con la corrente alternata i primari di due rocchetti, in ciascuno dei quali era inserito un interruttore elettrolitico sincrono in modo che i due interruttori erano disposti in sensi rispettivamente inversi, sono riuscito facilmente ad ottenere che due tubi emettessero con grande regolarità i raggi X alternativamente, utilizzando cioè, metà per ciascuno, ogni intero periodo.

Disposti i due tubi a conveniente distanza tra loro e dallo schermo fluorescente si ottiene una doppia immagine degli oggetti interposti che, guardata coi due occhi attraverso a due serie di fori praticati in modo opportuno in un disco opaco che ruota per mezzo di un motore sincrono, *dà la completa sensazione del rilievo.*

Sui particolari di questo dispositivo *radiostereoscopico* riferirò in una prossima Nota.

Cristallografia. — *Studio cristallografico della cianmetil- e della benzilcianmetilglutaconimide cuproammoniche* [1]. Nota della dott.ssa Fausta Balzac, presentata dal Socio C. F. Parona [2].

Il prof. Icilio Guareschi pubblicò, alcuni anni or sono [3], una interessante Nota sopra alcuni nuovi composti cuproammonici che preparò facendo agire i sali ammonici di alcune immidi su opportune soluzioni cuproammoniche.

Essi sono delle glutaconimidi cuproammoniche sostituite come le seguenti, la formula delle quali è scritta secondo le idee del Werner:

cianmetilglutaconimide cuproammonica

$$(C_7H_5N_2O_2)_2[Cu(NH_3)_4] . 2H_2O ;$$

metilcianmetilglutaconimide cuproammonica

$$(C_8H_8N_2O_2)_2[Cu(NH_3)_4] . 4H_2O ;$$

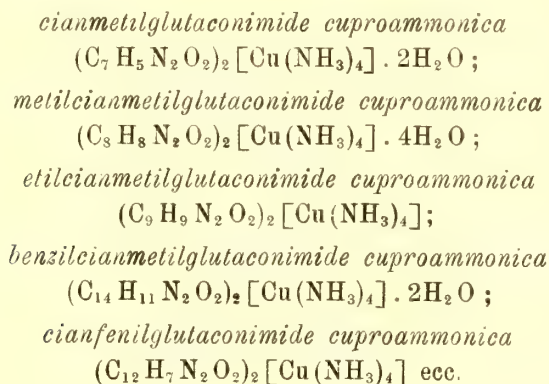
etilcianmetilglutaconimide cuproammonica

$$(C_9H_9N_2O_2)_2[Cu(NH_3)_4] ;$$

benzilcianmetilglutaconimide cuproammonica

$$(C_{14}H_{11}N_2O_2)_2[Cu(NH_3)_4] . 2H_2O ;$$

cianfenilglutaconimide cuproammonica

$$(C_{12}H_7N_2O_2)_2[Cu(NH_3)_4] \text{ ecc.}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 26 luglio 1915.

[2] Lavoro eseguito nell'Istituto di mineralogia della R. Università di Torino, diretto dal prof. Ferruccio Zambonini.

[3] Icilio Guareschi, *Sopra alcuni nuovi composti cuproammonici*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino (1897), 193.

Siccome appariva interessante lo studio delle relazioni morfotropiche esistenti fra i composti di questa serie in dipendenza dei varî gruppi sostituentisi nell'imide, come pure dell'acqua di cristallizzazione, ho seguìto con piacere il consiglio del chmo prof. Ferruccio Zambonini di incominciarne lo studio, eseguendo le mie ricerche su materiale dovuto alla cortesia del prof. Guareschi, il quale mise a mia disposizione i sali da lui stesso preparati.

In questa prima Nota espongo i risultati del mio studio su due sali che fra loro differiscono di un solo gruppo benzilico. e cioè la cianmetil- e la benzilcianmetilglutaconimide cuproammoniche, che cristallizzano entrambe con due molecole di acqua.

I. — *Cianmetilglutaconimide cuproammonica*
$(C_7H_5N_2O_2)_2[Cu(NH_3)_4] . 2H_2O$.

Sistema cristallino: monoclino, classe prismatica:

$$a:b:c = 1,3406:1:2,0107$$
$$\beta = 95^\circ\, 59'.$$

Forme osservate:

$c\ \{001\}$ $a\ \{100\}$ $s\ \{\bar{1}11\}$ $d\ \{012\}$.

Combinazioni:

c a s	abbastanza comune	(fig. 1)
c a s d	rara	(fig. 2).

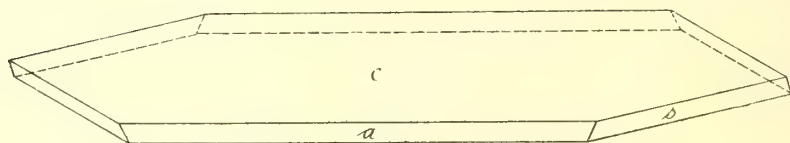



Fig. 1.

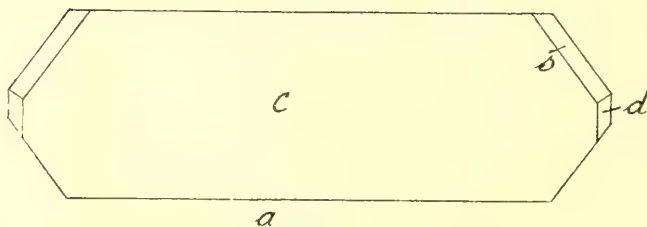



Fig. 2.

Si presenta in minuti cristallini di colore azzurro-violetto, a faccie piane, splendenti, e fu ottenuta dal prof. Guareschi aggiungendo ad una

soluzione concentrata del sale ammonico della cianmetilglutaconimmide una di solfato di rame ammoniacale contenente un eccesso di ammoniaca.

Ricristallizzata dalle soluzioni acquose calde di ammoniaca al 10 %, nelle quali manifesta una discreta solubilità, la ottenni in cristallini che misurano fino a 3 mm. di lunghezza e $^1/_3$ di mm. di spessore. Sono assai stabili alla temperatura ordinaria, alterandosi assai facilmente a temperatura elevata: verso 100° si scompongono in modo sensibile, perdendo H_2O; a 125° circa si eliminano 2 molecole di ammoniaca e due d'acqua, lasciando un residuo di color verde olivo

I cristalli sono costantemente tabulari secondo {001} ed allungati nella direzione dell'asse y. Il pinacoide base {001}, che si rinviene sempre in tutti i cristalli, presenta faccie molto estese, che dànno, al goniometro, immagini buonissime. L'ortopinacoide {100} ha faccie molto sottili, che dànno, però, immagini discrete. Il prisma {$\bar{1}$11} è costituito da faccie variamente sviluppate, però discrete per le misure. Il prisma {012}, che raramente presenta tutte le sue faccie, è, quando esiste, sempre subordinato; le sue facciette hanno sviluppo disuguale e dànno immagini pallide e multiple.

Nella seguente tabella sono raccolti gli angoli misurati e quelli calcolati in base alle costanti surriferite.

Spigoli misurati	Limiti delle misure	Numero delle misure	Media	Calcolati
(001):(100)	83°59′ - 84° 2′	7	84° 1′	*
(001):($\bar{1}$11)	71 11 - 71 30	7	71 19	*
($\bar{1}$00):($\bar{1}$11)	57 55 - 58 4	5	58 00	*
($\bar{1}$11):($\bar{1}\bar{1}$1)	98 41 - 98 57	3	98 51	98°48′ $^1/_2$
(001):(012)	44 57 - 45 23	5	45 13	45 0
(012):(11$\bar{1}$)	71 50 - 72 19	2	72 4 $^1/_2$	71 55
(100):(012)	86 2 - 86 12	3	86 9	85 46 $^1/_2$

I cristalli di questa sostanza sono abbastanza fragili, pur presentando una certa flessibilità. La polvere ha colore violaceo chiaro.

Densità = 1,539 a 17° (determinata col metodo dei liquidi pesanti, e la bilancia di Westphal).

Siccome il peso molecolare è = 466, il volume molecolare risulta = 302.

Al microscopio, i cristalli molto tabulari secondo (001), lasciano scorgere, se poggiati su una faccia di questa forma, un debole pleocroismo:

nella direzione dell'asse y: color azzurro-violetto;

in direzione normale all'asse y: color azzurro-violetto più chiaro.

A nicols incrociati in luce parallela essi presentano estinzione parallela rispetto allo spigolo [(001):(100)].

In luce convergente da $\{001\}$ emerge una bisettrice fortemente inclinata rispetto alla normale alla faccia. L'angolo apparente degli assi ottici risulta assai grande. Il piano degli assi ottici è parallelo a $\{010\}$.

Col compensatore di Babinet si osserva che la direzione d'allungamento su $\{001\}$ — e, cioè, l'asse y — è otticamente negativa.

Per poter confermare l'appartenenza di questa sostanza alla classe prismatica ricorsi all'esame delle figure di corrosione. Trattai, perciò, i cristalli, a freddo ed a caldo, con acqua ammoniacale; ma non ottenni se non figure poco nitide, assai strette, con la direzione di allungamento parallela a $\{010\}$, e normale, quindi, alla direzione di allungamento del cristallo. Tali figure, per la loro imperfezione, non dimostrano in modo inconfutabile l'appartenenza della cianmetilglutaconimide cuproammonica alla classe suaccennata; ma, per quanto è stato possibile di osservare, apparisce molto probabile che questi cristalli si possano veramente ascrivere alla classe prismatica del sistema monoclino.

II. — *Benzilcianmetilglutaconimide cuproammonica.*

Sistema cristallino, triclino:

$$\alpha = 94°42'6'' \ , \ \beta = 121°51'7'' \ , \ \gamma = 69°58'15''$$
$$a : b = 0,7941 : 1 \ .$$

Forme osservate:

a $\{100\}$ c $\{001\}$ b $\{010\}$ d $\{110\}$.

Si presenta in fogliette cristalline di color azzurro-pallido che sono limitate da qualche faccia laterale brillante, e male si prestano alla determinazione cristallografica.

Ricristallizzando questo composto dalle soluzioni sature a caldo di ammoniaca al 10 %, non si ottengono individui migliori; e risultato analogo si ha tentando di variare le condizioni di esperienza.

Le misure che ho potuto prendere sono riportate nella seguente tabella:

Spigoli misurati	Limiti delle misure	Numero delle misure	Media	Calcolati
(100):(1$\bar{1}$0)	39°37′ - 39°58′	7	39°46′	*
(100):(001)	57 38 - 57 58	5	57 45	*
010):($\bar{1}$00)	69 00 - 69 44	7	69 18	*
(110):(010)	70 42 - 71 2	7	70 49	70°56′
(001):(110)	62 49 - 63 8	5	62 58	*
(001):(0$\bar{1}$0)	97° - 98°	2	—	97°6′34″

In questi cristalli si riscontrano due zone, misurabili, come si vede, a sufficienza: ho potuto constatare anche, in qualcuno degli individui meglio conformati, l'esistenza di un altro pinacoide appartenente alla zona [001:010] e precisamente posto tra la (001) e la (0$\bar{1}$0); ma, data la natura di queste faccie piccolissime, non mi fu possibile se non determinarne con approssimazione l'angolo d'inclinazione sulla (001), che è di circa 20°.

Il pinacoide {100} è sempre estesissimo: le sue faccie raggiungono una lunghezza di quasi 1 mm. con una larghezza di circa 0,3; il pinacoide {110} è sempre meno esteso; ed infine le faccie di {010} e di {001} sono esilissime; le prime specialmente raggiungono raramente $^1/_{10}$ mm. di larghezza (fig. 3).

Densità = 1,424 a 23°.

Siccome il peso molecolare di questo composto è 696, ne risulta il volume molecolare = 453.

Al microscopio i cristalli appoggiati sulla (100) — che è l'unica faccia attraverso la quale si possano esaminare — mostrano in luce ordinaria un debole pleocroismo; una direzione di massima estinzione, negativa, forma, per la luce bianca, un angolo di 12° con lo spigolo [(100):(110)].

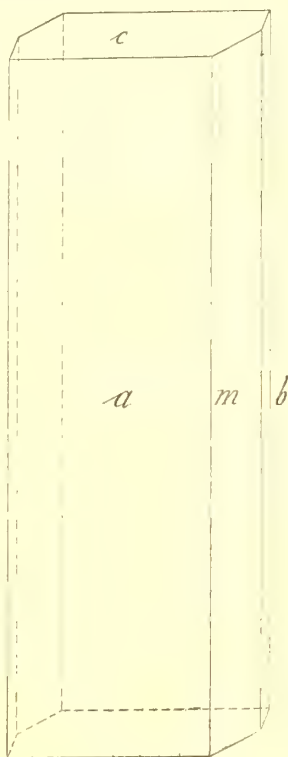
In luce convergente si vede emergere da (100) un asse ottico all'orlo del campo.

Fig. 3.

Per quanto risulta dallo studio dei due composti ora descritti, l'entrata del gruppo benzilico nella molecola della cianmetilglutaconimide produce un completo cambiamento nella struttura dell'edificio cristallino.

Rispetto, poi, alla densità si ha, com'era da prevedersi, una sensibile diminuzione nel benzilderivato: ciò che conseguentemente porta ad un aumento del volume molecolare.

Per quanto riguarda il colore, il benzilderivato è sensibilmente più chiaro.

Ringrazio vivamente il prof. F. Zambonini che coi suoi consigli mi guidò, agevolandomi in ogni modo, nel presente lavoro.

Mineralogia. — *Ricerche petrografiche e mineralogiche nei dintorni di Osilo (Sardegna)* [1]. Nota di Aurelio Serra, presentata dal Corrispondente F. Millosevich [2].

Non credo privo di interesse occuparmi delle rocce che si sviluppano in questa zona, poichè gli studiosi che vi rivolsero le osservazioni sfiorarono appena l'argomento, per cui, all'epoca presente, si hanno dati mal sicuri sulla loro esatta consistenza.

Già il La Marmora [3] distinse le roccie del castello di Osilo, di Bonaria e di S. Antonio, da quelle che si rinvengono ai piedi del villaggio ed alla Fontana del Fico. Tali differenziazioni pur vennero confermate dal Lovisato [4] il quale delimita ancor più le formazioni ammettendo l'esistenza delle « trachiti e delle andesiti, delle rocce recenti e della trachite antica ».

I dati da me raccolti assumono maggior rilievo in quanto tendono ad eliminare siffatte distinzioni riducendo ad un unico tipo la roccia ovunque dominante: vedremo, infatti, come questa talvolta mostri un aspetto anomalo, mascherando in tal guisa la sua vera natura, onde può essere tratto facilmente in inganno chi si contenti di una superficiale indagine. Al castello di Osilo la roccia è compatta, di color bruno; frequentemente presenta strati colorati in rosso di varî toni. La struttura è ipocristallina: al microscopio si notano grandi interclusi di plagioclasio che presentano, in massima, una estinzione media di 44°, riferibili quindi alla bitownite: non è però da escludersi la labradorite Ab_8An_4, avendosi estinzioni anche fra i 35 e i 38°. Assai frequenti i geminati polisintetici, con frequente accenno ad accrescimento zonale.

Il meroxeno notasi con abito pseudo-esagonale, con forte assorbimento, di color bruno, sensibilmente pleocroico.

Colore degli assi:

$\mathfrak{a}$ = giallognolo
$\mathfrak{b}$ = bruno
$\mathfrak{c}$ = rosso-cupo

Per ordine di frequenza seguono interclusi di augite; meno frequenti gli interclusi di iperstene. La massa fondamentale appare costituita da un

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Sassari.
[2] Pervenuta all'Accademia il 21 luglio 1915.
[3] *Voyage en Sardaigne* par Albert La Marmora.
[4] *Gita inaugurale del Club alpino italiano al castello di Osilo*, 1879.

esile velo vetroso; le piccole liste feldspatiche non sono sempre evidenti: spesso si notano invece sferoliti, globuliti, trichiti di meroxeno e di augite. Raramente si notano la magnetite e la ilmenite.

Gli strati di color rosso, che macroscopicamente con tanta frequenza è dato rilevare, in altro non differenziano se non per una alterazione ocracea dipendente dalla ricchezza in ferro del minerale originario meroxeno.

Gli elementi qualitativamente riscontrati in questa roccia rispondono in gran parte a quelli più sotto riportati nell'analisi quantitativa. In questa se ne trascurarono alcuni, poichè solo rivelati dalla ricerca microchimica. Seguendo il Behrens [1], un frammento di roccia venne polverizzato e trattato a caldo con HFl ed alcune goccie di H_2SO_4. Il residuo della evaporazione, ripreso con acqua debolmente acidulata, rivelò il cloro con la formazione di cloruro di argento in cristalli cubici ed ottaedrici, il fosforo per la comparsa dei cristalli trimetrici emimorfi di fosfato ammonico-magnesiaco, lo zolfo per la formazione di cristalli di alluminato di cesio. Una lamina sottile della roccia venne trattata con HCl caldo: in questa guisa il plagioclasio venne corroso, profondamente attaccato il meroxeno con residuo di silice gelatinosa, totalmente attaccati gli ossidi di ferro, debole residuo di ferro titanato. Peso specifico 2.54.

L'analisi quantitativa fornì i seguenti risultati:

SiO_2	52.21
Al_2O_3	25.49
Fe_2O_3	3.26
IiO_2	0.99
FeO	1.57
M_2O	0.92
CaO	9.70
MgO	1.73
K_2O	1.72
Na_2O	3.60
perdita per arroventamento	3.73
	104.92

Seguendo Loewinson-Lessing, si dedusse la seguente notazione:

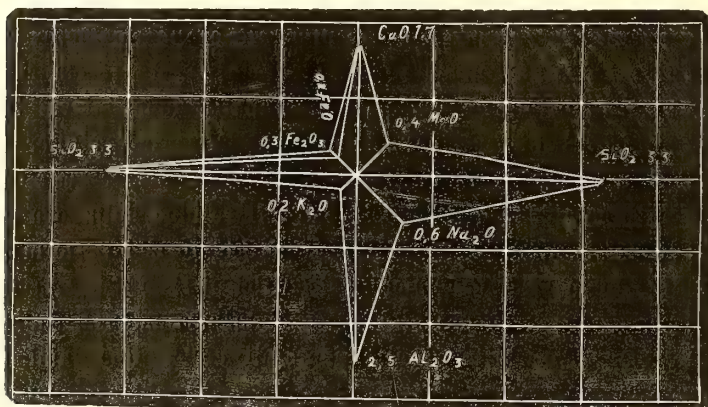
$$\alpha = 1.55 \quad ; \quad \beta = 67$$
$$1.2\,RO \,.\, R_2O_3 \,.\, 3.3\,SiO_2$$
$$R_2O : RO = 1 : 3.28\,.$$

Seguendo Osann, la seguente formola:

$$s_{59.65} \quad a_{4,7} \quad c_{10,8} \quad f_{4,8} \quad n_{7,6}\,.$$

[1] Behrens, *Anleitung zur microchemicher Analyse*, Leipzig 1899.

Per la costituzione chimica questa roccia è quindi da ritenersi come andesite.

La composizione è resa evidente dal seguente diagramma:

I risultati si accordano con la costituzione mineralogica, per la quale si deve ritenere come un'andesite meroxenica.

Presenta grande analogia con quella da me raccolta a « Contrada Fenosu e S'Adde de S'Ulmu » (¹): anche queste, per prodotti di natura ocracea, si presentano di colore rossastro. La differenza si manifesta nella quantità degli elementi; comune in tutte il plagioclasio, solo in questa si hanno estinzioni più ampie; sempre comune la biotite e l'augite; sempre accessorî magnetite ed ilmenite. Una certa analogia presenta anche con quelle di Val Barca e di Pala Mantedda studiate dal Millosevich (²): in queste si avrebbe una maggiore quantità di iperstene e mancanza di meroxeno. Il passaggio di queste roccie è graduale, e non è possibile di stabilire ove si originino le une ed ove abbiano termine le altre.

Ai piedi del villaggio si trova una roccia costituita da elementi frammentizî della su accennata.

Gli elementi costitutivi di questa roccia tufacea si mostrano variamente cementati: spesso rotti, corrosi ed alterati; al microscopio si notano grandi interclusi di plagioclasio, di meroxeno, di augite, di iperstene; accessoriamente si hanno microliti di magnetite e di ilmenite.

In questa roccia si rinvengono spesso druse di cristalli di quarzo, in cui si notano le seguenti forme:

$$\{10\bar{1}0\},\ \{10\bar{1}1\},\ \{01\bar{1}1\},\ \{2\bar{1}\bar{1}1\},\ \{51\bar{6}1\}.$$

(¹) *Ricerche su roccie eruttive basiche della Sardegna settentrionale.* Rend. Accad. Lincei, 1908.

(²) *Studî sulle rocce vulcaniche della Sardegna.* Rend. Accad. Lincei, 1908.

Gli spigoli rispondenti alle facce plagiedriche, per raffreddamento, previo riscaldamento, si elettrizzano negativamente. Presentano una colorazione rosea violacea, dovuta probabilmente ad un debole pigmento di ossido di manganese. A temperatura superiore a 400°, gradualmente si scolorano poichè in questa guisa si verifica perdita di ossigeno. Col ristabilirsi delle condizioni fisiche primitive non si ha ritorno di colore; si deve ritenere probabile, in base alle esperienze su riferite, che con lo sparire della colorazione avvenga una scomposizione chimica per eliminazione di ossigeno. Frequentemente si notano piccole plaghe di calcedonio e di mesolite. La calcite molto spesso si trova associata a questi minerali: si rinviene anche da sola a costituire piccole geodi; nei cristallini frequentemente si riconoscono le seguenti forme:

$$\{10\bar{1}0\}, \{21\bar{3}1\}, \{01\bar{1}2\}, \{10\bar{1}1\}.$$

Circa l'origine di questi minerali si deve ritenere che essi siano prodotti del disfacimento dei minerali della roccia preesistente: non è il caso di ammettere contemporaneità di formazione, poichè derivati da successive e graduali alterazioni.

Verso sud, e precisamente a R. Pirricone, la roccia presenta un aspetto verdastro dovuto ad alterazione del meroxeno che passa a clorite. I cristalli componenti frequentemente si mostrano appannati e rendono visibili particolari corrugamenti. In qualche punto è dato notare la presenza di ossidi di manganese. Presso « Fundana e Sa Pedra » vennero messi allo scoperto alcuni filoncelli di solfuri di rame dati da calcopiride e da erubescite. I lavori sono invero condotti con troppa economia perchè allo stato attuale delle ricerche si possa esprimere un giudizio sulla importanza del giacimento. La presenza di questi solfuri confermerebbe le idee dello Stella ed i dati da me raccolti su analoghe manifestazioni metallifere, che cioè effettivamente la sede originaria della mineralizzazione sia la roccia vulcanica: ulteriori ricerche potranno meglio metterla in evidenza e potranno suggerire utili criterî per una eventuale coltivazione.

Proseguendo lungo la strada provinciale, verso Sassari, è dato riscontrare sempre la roccia compatta con gli stessi caratteri di quella del Castello di Osilo. Nella R. Abealzu si possono accertare i rapporti fra le roccie vulcaniche e le sedimentarie, le quali nel sassarese vennero dal De Stefani riferite all'elveziano ed al langhiano [1]. Il calcare, di apparenza saccaroide, si estende sopra la bruna roccia andesitica: al contatto si mostra colorato in rosso, ed all'analisi rivela notevole quantità di ferro e di silice.

[1] De Stefani, *Cenni preliminari sui terreni mesozoici della Sardegna*. Rendic. Accad. Lincei, 1891.

Verso nord-est, e precisamente a M. Pala Enistra, è dato rinvenire banchi compatti di materiale frammentizio, colorati in rosso. Talora assumono una consistenza terrosa; talaltra passano al conglomerato con noduli di roccie a *facies* abissale della stessa natura della roccia eruttiva ed anche, talvolta, di calcare miocenico. Si hanno fenomeni di avanzata devitrificazione e di effervescenza con gli acidi.

Lì presso è dato rinvenire anche la roccia identica a quella che domina tutta la zona, la roccia andesitica bruna e compatta: però, di frequente, appare decomposta e colorata in rossastro. Il calcare immediatamente sovrastante si mostra giallo-rosso, è di grana fine, talora mostrasi poroso. Al microscopio si rendono evidenti piccole sferette che dimostrano l'origine per sedimentazione chimica: nelle sezioni provenienti da materiali di contatto si notano cristalli feldspatici e di meroxeno, invero evidenti anche ad occhio nudo.

Le osservazioni da me compiute mi autorizzano a non accogliere la distinzione — in questa zona — fra trachite antica, trachite anfibolica e prodotti lavici recenti, poichè questi ultimi mancano affatto, e la roccia designata come trachite antica altro non è che un prodotto di alterazione da ritenersi con tutta sicurezza posteriore alle colline di Osilo, colline che il Deprat (1) nella sua fugace escursione riferì a lobradoriti augitiche post-elveziane.

Più giustamente il Millosevich (2) propende a ritenere anteriori ai calcari miocenici, basandosi su analogie riscontrate con roccie da lui studiate ed appartenenti alle serie più antiche; ciò infatti viene confermate dalle mie osservazioni, poichè in diversi punti mi fu dato rinvenire il calcare miocenico decisamente sovraincombersi alla roccia andesitica preesistente.

Accertate le inesatte determinazioni fatte dal Lamarmora (3) e dal Lovisato (4) nel limitato campo da me esplorato, per ragioni induttive si spiegano facilmente i dubbî espressi sui rapporti di talune roccie sarde.

Così al Narcao, al M. Essa, a S. Michele di Arenas, all'Arcuentu, ai monti di Pula e Monastir, roccie che secondo La Marmora mostrerebbero molta somiglianza con quelle che formano oggetto del mio studio, nel modificare i concetti che concernono l'apparizione della « roccia-anfibolica » (andesite) e della « trachite antica » (andesite alterata, tufo andesitico), si spiega facilmente la presenza degli inclusi e pur facilmente si spiega come **la** roccia derivante da alterazione debba costituire la parte superiore delle

(1) Deprat, Comptes Rendus, Acad. Sc., Paris, 1907.

(2) *Voyage en Sardaigne par Albert La Marmora.*

(3) loc. cit.

(4) *Sulle roccie vulcaniche della Sardegna settentrionale*, Genova, tip. A. Ciminaco, 1907.

colate, per le quali deve ritenersi assolutamente fuori causa il riferimento ad un periodo più recente di quello dei depositi subapennini, questo riferimento può ammettersi solo in quanto riguarda il conglomerato nel quale si ha modo di riscontrare noduli di calcare miocenico.

Un'altra lacuna è quindi colmata, e lo studio dello sviluppo riguardante le roccie della Sardegna rimane così attendibilmente delineato con dati utili e precisi sui quali mi propongo di ritornare ampiamente in una successiva Memoria.

Chimica. — *Nuove ricerche sulle combinazioni inferiori di alcuni elementi* [1]. Nota di L. Marino, presentata dal Socio R. Nasini [2].

Da una serie di pregevoli lavori, apparsi in questi ultimi anni, risulta che, applicando le leggi degli equilibrî chimici [3] allo studio dei rapporti esistenti fra i varî gradi di ossidazione di uno stesso elemento, o fra questo ed i suoi composti tipici, è possibile il dimostrare che esistono nuove combinazioni nelle quali la valenza dell'elemento considerato è ancora diminuita di grado. Un tal complesso di ricerche, mentre porta un nuovo contributo sperimentale all'antica ipotesi della valenza variabile, sempre in completo accordo con le odierne teorie, viene d'altro canto a confermare sempre più il concetto che il grado di valenza per un dato elemento, non solo dipende dalla natura della coppia di elementi che reagiscono, ma è definito anche dalle esterne circostanze, dalle variabili del sistema considerato ed in particolar modo dalla temperatura. La conoscenza di queste condizioni di equilibrio lascia anzi dedurre la variazione dell'energia libera messa in giuoco nella graduale saturazione di questi gradi di valenza, sia in casi semplici, quali ad es. i composti alogenati del fosforo, sia in casi più complicati quali il sesquicloruro di platino o di palladio, i cloruri di iridio, gli ossidi del tungsteno ecc., allo scopo evidente di potere dal confronto delle singole affinità risalire a conclusioni più generali e sui rapporti dell'affinità totale e su queste parziali affinità di valenza.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale di Pisa.

(2) Pervenuta all'Accademia il 6 luglio 1915.

(3) Vedere ad es. Abel, Z. f. anorg. Chem., *26*, 361 (1901); Förster u. Seidel, ibid., *14*, 106 (1897); Fredenhagen, Z. f. anorg. Chem., *29*, 396 (1907); Peters, Z. f. phys. Chem., *26*, 193 (1898); G. N. Lewis, Z. f. phys. Chem. *55*, 449 (1906); Bose, Z. f. Elektr., *13*, 477 (1907), *14*, 314 (1908), e *14*, 85 (1908); Denham, Journ. of the chem. soc., *93*, 424 (1908) e *93*, 833 (1908); Lothar Wohler u. S. Streicher, Berl. Ber., *46*, 1577 (1913).

Studî e confronti, fatti in questa direzione, potranno in seguito portare notevoli vantaggi teorici e pratici, purchè le rispettive condizioni di equilibrio vengano assai accuratamente discusse, se non si vogliono trarre erronee deduzioni. Dico, accuratamente, perchè non sempre basta un semplice esame dei dati sperimentali per avere il diritto di concludere. Dalla conoscenza dell'equilibrio, ad es. fra calcio e idrogeno (1), si sarebbe portati ad ammettere l'esistenza di un sottoidruro di calcio; per gli idruri di cerio e di lantanio, dal comportamento anormale che si osserva nella misura della pressione di dissociazione (2), si sarebbe tentati di ammettere una particolare variazione nella struttura molecolare degli idruri; per le combinazioni di idrogeno e nichel (3), dall'incapacità dell'idruro, ottenuto dal nichel ridotto ad alta temperatura, di idrogenare il benzolo, si vorrebbe ammettere che debba esistere un idruro più povero in idrogeno, forse Ni_2H_2. Dal diagramma di equilibrio fra bismuto e cloro (4) dovremmo giungere al sottocloruro di bismuto; e lo stesso avverrebbe per gli altri sottosali dello stesso metallo. Le misure di polarizzazione del cloruro di bario non ancora fuso farebbero confermare l'esistenza di un sottocloruro di bario (5), già ammesso da Guntz (6); e le misure di tensione per i composti alogenati dell'iridio svelerebbero un monocloruro di iridio, $IrCl$, finora non noto. Analogamente, per altri elementi si sarebbe giunti ad accettare la formazione di ossidi o di cianuri o di combinazioni complesse inferiori.

Ora non bisogna dimenticare che nella misura degli equilibrî chimici, specie allorquando i varî gradi di valenza sono collegati ad eterogenei, completi stati di equilibrio, intervengono sovente le influenze di diversi fattori che velano il fenomeno principale; e solo un accurato esame dei fatti osservati può dar luce nelle conclusioni che se ne posson ritrarre. Scopo infatti di queste nuove ricerche si è quello di mettere in rilievo come, in molti casi, i valori sperimentali ottenuti han condotto ad erronee conclusioni perchè furono trascurati alcuni particolari di osservazione i quali, se apparentemente possono sembrare di secondaria importanza, sostanzialmente formano la base di qualsiasi logico ragionamento.

Scegliamo per ora, fra i varî argomenti da discutersi, quelli dell'idruro di calcio e del sottocloruro di bario.

Com'è noto, dopochè Moissan (7) ha fatto rilevare che il calcio metal-

(1) Z. f. anorg. Chem., *82* (1913), 130.

(2) Ann. der Chem., *325*, pag. 281.

(3) P. Sabatier, *Die Hydrierung durch Katalyse*, Leipzig 1913.

(4) Z. f. phys. Chem., *64*, 488 e 499.

(5) Z. f. anorg. Chem., *41* (1904), 424.

(6) Bull. Soc. Chim., [3], *29*, 490 (1903).

(7) Compt. rend., *127* (1899), 29; Ann. chim. phys., [7], *18* (1899), 311; Bull. Soc. chim., [3], *21* (1899), 876.

lico assorbe idrogeno, Gautier (1) fece notare che per 675° comincia l'idruro a dissociarsi, e che un analogo fenomeno si osserva per le corrispondenti combinazioni di bario e di stronzio. Una più completa ricerca sulla dissociazione dell'idruro di calcio fu pubblicata recentemente da Moldenhauer e C. Roll-Hansen (2), e, entro limiti ristretti di temperatura (641-747°), anche da J. N. Brönsted (3).

Moldenhauer e Roll-Hansen stabilirono la curva di dissociazione tanto per l'idruro di calcio preparato dalla fabbrica elettrochimica di Bitterfeld, quanto per l'idruro di calcio puro sintetico. In base alla curva ottenuta per l'idruro normale CaH_2, essi si domandarono se non fosse possibile anche per il calcio una combinazione CaH analoga a quelle ammesse da Troost e Hautefeuille (4) quando l'idrogeno agisce sui metalli alcalini, ad es. Na_2H e K_2H.

L'esistenza di una tale combinazione credono essi di poter dedurre dalle misure di tensione. Difatti, se il calcio assorbe la metà dell'idrogeno richiesto per avere CaH_2, cioè quanto ne richiede l'ipotetico composto CaH, la curva assume realmente una nuova direzione; per circa 917° la pressione osservata è di 105 mm., che si ripete anche evacuando diverse volte l'apparecchio. Facendo assorbire a questa stessa sostanza tanto idrogeno da avere CaH_2, si riottiene una pressione di 186 mm. di mercurio, pressione che coincide con quella letta in varie altre esperienze per la dissociazione del CaH_2. A prima giunta questo direbbe che, oltre all'idruro normale, esiste una combinazione contenente meno idrogeno. Ora da un lungo ed accurato studio dell'argomento (5), i risultati del quale verranno minutamente descritti in un altro lavoro che pubblicherò insieme con P. Quinto, risulterebbe che i valori ottenuti per la curva di dissociazione dei composti di idrogeno e calcio sono assai prossimi a quelli dati da Moldenhauer e Roll-Hansen, l. c., ma possono avere un significato solo per il composto più idrogenato.

Quando si tenta di costruire la seconda curva, che dovrebbe rappresentare la dissociazione del CaH, allora i fatti osservati svelano che durante la misura si ha da fare con un fenomeno facile a sfuggire, a causa del quale una parte dell'idrogeno si sottrae alla misura; donde i valori più bassi.

Si potrebbe subito obiettare che l'idrogeno reagisce col tubo di quarzo entro il quale avviene la reazione; ma questo non è, perchè col dispositivo

(1) Compt. rend., *134* (1902), 1108.

(2) Z. f. anorg. Chem., *82* (1913), 130.

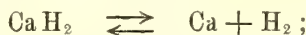
(3) Z. f. Elektr. *20*, 81 (1914).

(4) Ann. Chim. Phys. [5], *2*, 273.

(5) Rispetto alla preparazione dell'idruro di calcio, che oggi si prepara in grande col brevetto tedesco (D. R. P., 188570) in grossi pezzi compatti che servono per avere idrogeno in grandi quantità a scopo militare, posso confermare che non è possibile preparare, come vorrebbe il brevetto, questo composto per azione dell'idrogeno a pressione atmosferica sul calcio fuso (795° circa), perchè per questa temperatura la pressione di dissociazione è già più grande di quella atmosferica.

impiegato (tubo di ferro entro tubo di quarzo) posso dimostrare, come sarà descritto nella seconda parte del presente lavoro, che tutto l'idrogeno impiegato, entro i limiti delle temperature raggiunte, si ritrova o libero nello spazio del tubo e dell'annesso manometro, o combinato al calcio nelle parti più fredde.

La causa di questa differenza deve ricercarsi nella volatilità del calcio. Con l'innalzarsi della temperatura, il processo di dissociazione sarebbe dato dall'espressione d'equilibrio

$$CaH_2 \rightleftarrows Ca + H_2 ;$$

ma al disotto degli 800° un po' di calcio viene a condensarsi nelle parti meno roventi del tubo che lo contiene. In questo piccolo spazio di deposizione, che è variabile, la temperatura è inferiore a quella costante del tratto in cui avviene la dissociazione, per cui dell'idrogeno reso libero se ne fissa sul calcio distillato tanto quanto corrisponde alla pressione di dissociazione dell'idruro per la temperatura che acquista il calcio deposto nel punto considerato. Con qualche piccolo artificio è possibile di misurare questa distanza e stabilire in qual modo è distribuito l'idrogeno nelle singole parti dell'apparecchio, al momento in cui si interrompe l'esperienza; per cui è da escludersi che la nuova curva delle misurate pressioni di dissociazione indichi la presenza di un nuovo composto. Praticamente, detta curva è assai vicina a quella data da Moldenhauer e Roll-Hansen, ma non spetta all'equilibrio di dissociazione

$$2\,CaH_2 \rightleftarrows 2\,CaH + H_2 .$$

Se così fosse, in una delle parti del tubo, ad una adeguata temperatura, la sostanza analizzata dovrebbe avere una composizione assai vicina al rapporto CaH, mentre in realtà i documenti analitici conducono sempre, a seconda della quantità di idrogeno impiegato o all'idruro normale o ad un miscuglio di $CaH_2 + Ca$.

I documenti analitici e la relativa discussione confermano dunque pienamente questa conclusione e mostrano che per questa via non è possibile di dedurre l'esistenza di un composto di idrogeno e calcio nel quale il calcio funzioni da elemento monovalente.

Ciò posto, è chiaro che:

1) non si può parlare di calore di combinazione del primo o del secondo atomo di idrogeno;

2) si spiega perchè, quando dai valori di p sperimentalmente trovati calcoliamo il valore di Q (= calore di combinazione) servendoci della equazione abbreviata di Nernst

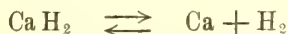
$$\log p = \frac{Q}{4.57\,T} + 1.75 \log T + 1.6 ,$$

si osserva una differenza in meno rispetto ai dati ottenuti per via calorimetrica.

Che non si possa parlare di calore di combinazione del primo o del secondo atomo di idrogeno, risulta evidente quando si ricordi che l'equilibrio da considerarsi è espresso da

$$CaH_2 \rightleftarrows Ca + H_2$$

e non da

$$2\,CaH_2 \rightleftarrows 2\,CaH + H_2;$$

la quale equazione potrebbe ipoteticamente dar poi luogo alla seguente, solo con l'innalzarsi della temperatura, perchè allora soltanto

$$2\,CaH \rightleftarrows 2\,Ca + H_2.$$

Quanto alla discrepanza fra il calcolato ed il trovato, basta far osservare che, nell'anzidetta formola abbreviata del Nernst, Q varia col variare della pressione (espressa in atmosfere) p e col variare di T (temperatura assoluta), e che, per un certo valore della temperatura, Q nella maggior parte dei casi (entro i limiti dell'esattezza concessa dalla su riportata formola, ma varrebbe lo stesso ragionamento se si applicasse la formola più esatta) rimane determinato con grande approssimazione se p rappresenta la vera misura della pressione.

Ora nel nostro caso il suo valore è influenzato dalla quantità di calcio che sublima, la quale, oltre alle cause minori, varia molto con la temperatura. E quanto più alta è questa, tanto più rilevanti sono le differenze che si avranno nel valore di p e quindi nel valore di Q, perchè maggiore è la quantità di calcio che si trova in grado di riassorbire una parte dell'idrogeno durante l'esecuzione dell'esperienza. La ricerca di J. N. Brönstedt (¹), che misura la tensione di dissociazione dell'idruro di calcio nell'intervallo di temperatura fra 641° e 747°, confermerebbe questo modo di vedere. Egli ottiene per Q_{18} un valore più grande di quello dedotto termodinamicamente da Moldenhauer e Roll-Hansen ($Q_{18} = 43900$; $Q_{900} = 42000$ cal.), e, per conseguenza, più vicino a quello che trovarono Guntz e Basset (²), cioè 46200 cal. Per via calorimetrica Brönstedt trova, per il calore di combinazione, $Q_{18} = 45100$ cal., che, come si vede, è assai vicino al precedente. E la differenza non è dovuta soltanto al fatto che Guntz e Basset si riferiscono al calcio solido, mentre Moldenhauer si riferisce al calcio liquido. Finchè per il sistema considerato fondiamo il ragionamento sulla posizione delle curve di tensione e consideriamo i componenti indipendenti e le relative

(¹) Z. f. Elektr., *20*, pag. 81 (1914).
(²) Compt. Rend. 140, 863; C. B. 1905, I, 1305.

fasi, avremo sempre nella volatilità del calcio una causa di errore non trascurabile, capace di spostare l'equilibrio per la temperatura considerata.

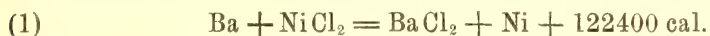
Per quanto riguarda il sottocloruro di bario, bisogna ricordare che Guntz [1] l'ottenne per la prima volta da bario metallico sul rispettivo cloruro. Ebbe una massa bruna omogenea al microscopio, cristallina, che, scaldata al rosso verso 1000° nel vuoto allo scopo di fondere il prodotto, lasciò volatilizzare il bario, e rimase del cloruro baritico $BaCl_2$. Secondo lui, sarebbe questa la causa per la quale non si riesce a preparare il bario elettrolizzando il cloruro fuso. Senza discutere per ora se questa sia proprio la vera causa di questo insuccesso, ho potuto però confermare che, se si sottopone all'elettrolisi il cloruro di bario fuso impiegando un anodo di carbone, si ottiene subito uno sviluppo di cloro, ma poi l'intensità diminuisce senza produrre alcun effetto utile. La quantità di bario che assorbe il corrispondente cloruro fra 850-860° può variare: per cui i cristalli bruni omogenei al microscopio hanno spesso una composizione compresa fra quella del $BaCl$ e quella del $BaCl_2$. Data l'impossibilità di purificarlo, il prodotto veniva preparato in questo modo: in una navicella di alundo, posta entro un tubo di quarzo e rivestita di ferro, scaldavo gr. 1.0414 di $BaCl_2$ anidro, mescolati con gr. 0.3434 di bario, per circa un'ora nel vuoto ad una temperatura compresa fra 855 e 860° in modo da fondere il bario. Dopo raffreddamento, separavo i cristalli colorati che apparivano più modificati, e su essi dosavo il bario sotto forma di solfato. Per gr. 0.409 di prodotto si trovò di bario gr. 0,289, cioè una percentuale di bario di 70.66, mentre per $BaCl$ si calcola 79.48 e per $BaCl_2$ 65.95. Questo farebbe credere che il bario si diffonde nei cristalli di cloruro di bario prima ancora che questo fonda e prenda origine una soluzione solida. Lo stesso fatto si deve verificare quando si preparano i composti del tipo $BaX . NaX$ che Guntz ottiene o per elettrolisi del miscuglio $BaCl_2 + NaCl$ o per fusione, in crogiuolo chiuso, del miscuglio $BaCl_2 : 2\,Na$. Se si opera in crogiuolo di ferro chiuso e si varia la quantità di sodio riducendola ad es. alla metà, si ottiene una massa cristallina grigiastra, per la quale, ove si abbia cura di sciegliere rapidamente i cristalli di apparenza più omogenei, si trova un contenuto in bario inferiore a quello che si calcola per $BaCl . NaCl$. E lo stesso avviene per lo ioduro. Anche quindi per questi sali probabilmente si tratta di una soluzione solida di sodio in cloruro di bario. Io ho cercato di vedere se potevo in modo non dubbio provare l'esistenza della soluzione solida; ma le gravi difficoltà sperimentali incontrate non mi permettono di dire ancora l'ultima parola decisiva. Non si può infatti escludere che si tratti di polverizzazione metallica in cristalli di cloruro di bario, analogamente a quanto avrebbero trovato Lorenz e Eitel [2] per le nebbie metalliche di piombo in cloruro di piombo

[1] Bull. Soc. Chim. [3], *29*, 490 (1903).

[2] Z. f. anorg. Chem., *91* (1915), pag. 46.

e di argento e tallio nei rispettivi cloruri, giacchè in un caso sono riuscito ad avere dei cristalli colorati, apparentemente omogenei, di $BaCl_2 + Ba$, ma con spigoli incolori. Questi cristalli si trasformano in cristalli di cloruro baritico, otticamente vuoti all'ultramicroscopio.

A questo risultato sembra contraddicano le deduzioni di Haber e di Tolloczo [1], i quali trovano che la polarizzazione per il puro cloruro di bario a 600° (elettrolisi con anodo di nichel e catodo di grafite) è sempre più alta di quella che si calcola con la regola di Thompson per la reazione

$$Ba + NiCl_2 = BaCl_2 + Ni + 122400 \text{ cal.} \qquad (1)$$

utilizzando come calore di reazione il dato di Guntz nella scomposizione $Ba\,(sol.) + 2\,H_2O + Aq = Ba(OH)_2\,Aq + H_2$ (secco) $+ 92500$ cal. e servendosi dei numeri di Thomson discussi da Ostwald. È cioè sempre superiore a 2.86 volts, mentre con la regola di Thomson si calcola 2.65 volts. In realtà, misurando la polarizzazione con il dispositivo di Haber e Tolloczo si ottiene subito un valore variabile da 2.95-3 volts, che si abbassa, in meno di un minuto, a 1.95 volts, ma l'interpretazione da darsi deve esser diversa. Gli autori ritengono che questo valore rappresenti una differenza troppo grande rispetto alla tonalità termica della 1ª reazione, per potere ritenere il valore di 1.95 volts come corrispondente all'energia libera di formazione di $BaCl_2$ (solido) e Ni da bario metallico e $NiCl_2$, per cui rimarrebbe inspiegato il valore iniziale più alto. Tale differenza spiegherebbero invece bene ammettendo il sottocloruro, perchè allora si può attribuire il valore di 1.9 volts alla reazione $2\,BaCl + NiCl_2 = 2\,BaCl_2 + Ni$, dalla quale si può calcolare, per l'osservata tensione di 1.9 volts, con la regola di Thomson, la tonalità termica dell'ultima reazione che è di 87800 cal. Ora, questo non contraddice a quanto sopra ho affermato, perchè, pur ammettendo che l'ipotetico prodotto Ba Cl non sia che una soluzione solida, sussisterebbe l'ultima reazione, e quindi sempre le stesse conclusioni.

Ad ogni modo, prima di poter comprovare anche per tali reazioni la relazione fra il valore della polarizzazione e la tonalità termica, occorrerebbe chiarire tutti i possibili fenomeni che si compiono all'anodo o al catodo, perchè, come risulta dagli interessanti lavori di R. Lorenz e collaboratori [2] sui sali fusi, oltre all'eventuale originarsi di sottocloruri, anche altre cause genesi di nebbie metalliche, solubilità dei metalli nel fuso, e, secondo me, anche la diffusione del prodotto in vicinanza del punto di fusione, mentre costituiscono un complesso di fenomeni proprî dei sali fusi. possono contribuire a modificare grandemente l'andamento del fenomeno principale che si studia.

Continuerò la trattazione degli argomenti ricordati in questa Nota.

[1] Z. f. anorg. Chem., *41* (1904), 424; Ann. Phys., *26* (1908), 935.
[2] Die Elektrolyse geschmolzener Salze, Bd. 3, Knapp 1906.

Chimica. — *Studî intorno agli indoni. I. Sintesi dell'α-etil-β-fenil-indone* (1). Nota di R. de Fazi, presentata dal Socio E. Paternò (2).

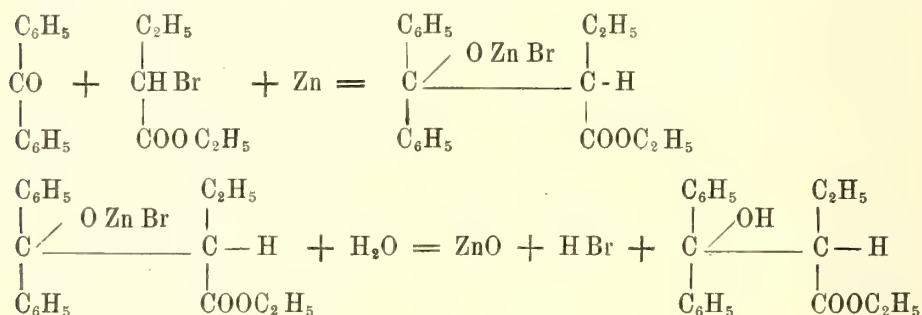
L'α-β-difenil-indone, che ho ottenuto per azione dell'anidride fosforica sull'acido β-trifenil-lattico (3), mi ha fatto pensare alla possibilità di ottenere derivati dell'indone partendo da derivati dell'acido cinnamico.

Interessante era di ottenere acidi cinnamici, i quali avessero, nelle posizioni α e β, gruppi diversi.

La sintesi dell'acido β-metil-cinnamico, di Schroeter (4); quella dell'acido β-fenil-cinnamico di Rupe e Busolt (5); e più ancora quella dell'acido α-metil-β-fenil-cinnamico di Rupe, Steiger e Fiedler (6), mi hanno indicato la via per ottenere acidi di tale tipo.

Facendo agire l'α-bromo-butirrato di etile sul benzofenone in presenza di zinco in granuli, ho ottenuto l'etere etilico dell'acido α-etil-β-difenil-lattico, secondo lo schema seguente:

$$\begin{matrix} C_6H_5 \\ | \\ CO \\ | \\ C_6H_5 \end{matrix} + \begin{matrix} C_2H_5 \\ | \\ CHBr \\ | \\ COOC_2H_5 \end{matrix} + Zn = \begin{matrix} C_6H_5 & & C_2H_5 \\ | & OZnBr & | \\ C & \text{———} & C\text{-}H \\ | & & | \\ C_6H_5 & & COOC_2H_5 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} C_6H_5 & & C_2H_5 \\ | & OZnBr & | \\ C & \text{———} & C-H \\ | & & | \\ C_6H_5 & & COOC_2H_5 \end{matrix} + H_2O = ZnO + HBr + \begin{matrix} C_6H_5 & & C_2H_5 \\ | & OH & | \\ C & \text{———} & C-H \\ | & & | \\ C_6H_5 & & COOC_2H_5 \end{matrix}$$

Questo etere, con H_2SO_4 conc., dà, a freddo, una fugace colorazione gialla e arancio, e passa poi subito ad un bel colore verde smeraldo.

Questa colorazione verde, Rupe e Busolt (7) l'hanno notata per l'acido β-difenil-lattico, per l'acido β-fenil-cinnamico, e per alcuni derivati. Heyl e Meyer (8) osservarono che l'α-β-difenil-indone dava una colorazione verde

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio Chimico della Sanità Pubblica.
(2) Pervenuta all'Accademia il 20 luglio 1915.
(3) R. de Fazi, questi Rendic., *24* (1), 440 (1915).
(4) G. Schroeter, Ber., *37* (1), 1090 (1904); id., Ber., *40* (2), 1589 (1907).
(5) Rupe, e Busolt, Ber., *40* (2), 4537 (1907).
(6) Rupe, Steiger e Fiedler, Ber., *47* (1), 66 (1914).
(7) Rupe e Busolt, loc. cit.
(8) Heyl e Meyer, Ber., *28*, 2787 (1895).

con l'acido solforico concetrato. Io l'ho notata ancora per l'acido β-trifenil-lattico e per i suoi derivati ([1]).

Ma non soltanto l'etere etilico dell'acido α-etil-β-difenil-lattico (dal quale ho ottenuto, come dirò, l'α-etil-β-fenil-indone) dà tale colorazione, bensì anche l'etere etilico dell'acido α-metil-β-difenil-lattico — che ho preparato secondo le indicazioni di Rupe, Steiger e Fiedler ([2]) — dà una bella colorazione verde smeraldo con H_2SO_4 conc., a freddo. E da questo etere, per azione dell'H_2SO_4, ho avuto, come descriverò in altra Nota, l'α-metil-β-fenil-indone, identico a quello che Rupe, Steiger e Fiedler ottennero per azione del cloruro di tionile sull'acido α-metil-β-fenil-cinnamico.

Dunque: l'acido β-trifenil-lattico e l'α-β-difenil-indone; l'etere etilico dell'acido α-etil-β-difenil-lattico e l'α-etil-β-fenil-indone; l'etere etilico dell'acido α-metil-β-difenil-lattico e l'α-metil-β-fenil-indone, dànno tutti questa caratteristica colorazione verde-smeraldo. La colorazione (sia verde smeraldo più o meno intenso, sia bleu o violacea, od altra) che questi acidi cinnamici, eteri lattici o acidi lattici, dànno a freddo con H_2SO_4 conc., sono il vero indizio della formazione dell'indone.

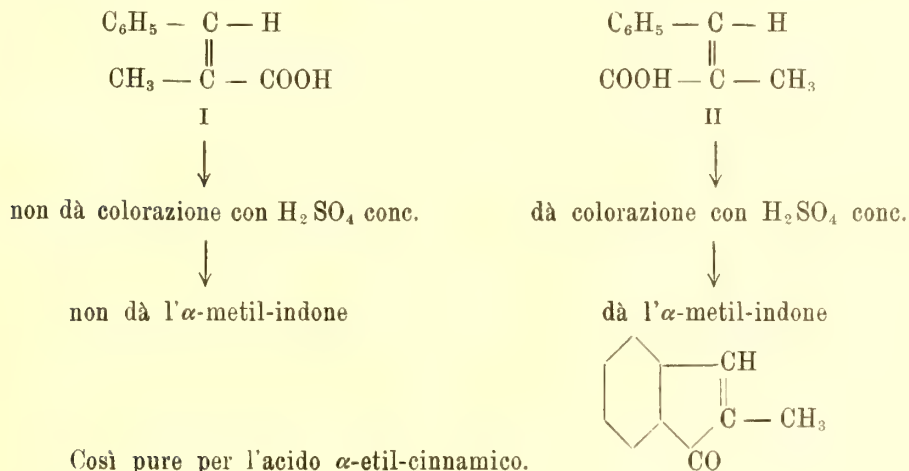
Il fatto notato da Stoermer e da Voht ([3]) è la migliore conferma.

Questi autori hanno studiato la trasformazione degli acidi α-cinnamici, dalla forma stabile alla forma *allo*.

L'acido α-etil-cinnamico e l'α-metil-cinnamico sono stati trasformati nella forma *allo*, per azione dei raggi ultravioletti. L'acido α-metil-cinnamico, stabile, con H_2SO_4 conc. non dà, a freddo, colorazione; l'acido *allo* α-metil-cinnamico dà invece una colorazione bleu violacea. Dal primo, gli autori non sono riusciti ad ottenere l'α-metil-indone; dal secondo, invece, sì.

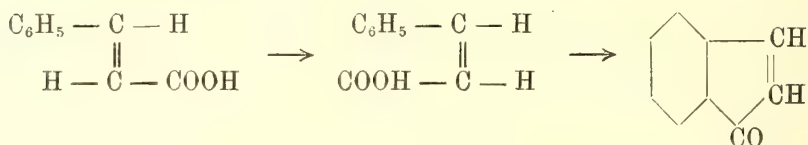
E ciò si spiega molto facilmente, con l'osservare le due formule stereoisomere:

I	II
$C_6H_5 - C - H$	$C_6H_5 - C - H$
$\Vert$	$\Vert$
$CH_3 - C - COOH$	$COOH - C - CH_3$
↓	↓
non dà colorazione con H_2SO_4 conc.	dà colorazione con H_2SO_4 conc.
↓	↓
non dà l'α-metil-indone	dà l'α-metil-indone

$$C_6H_4\begin{cases} -CH \\ \quad \Vert \\ \quad C - CH_3 \\ -CO \end{cases}$$

Così pure per l'acido α-etil-cinnamico.

([1]) R. de Fazi, loc. cit.
([2]) Rupe, Steiger e Fiedler, loc. cit.
([3]) Stoermer e Voht, Lieb. Ann., *409*, 37 (1915).

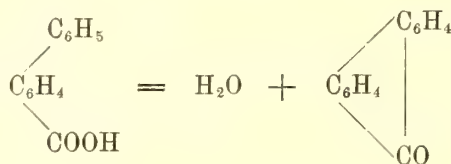
Questo fa pensare che sarà possibile la sintesi dell' indone, trasformando prima l'acido cinnamico in acido *allo* cinnamico, e disidratando poi questo, con un disidratante appropriato:

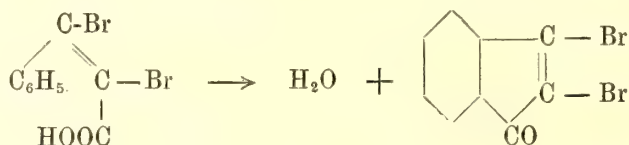
$$\begin{matrix} C_6H_5 - C - H \\ \| \\ H - C - COOH \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C_6H_5 - C - H \\ \| \\ COOH - C - H \end{matrix} \longrightarrow C_6H_4\begin{matrix} - CH \\ \| \\ CH \\ CO \end{matrix}$$

Anche M. Bakunin [1] ha accennato alla possibilità di ottenere l' indone dall'acido *allo*-cinnamico.

Ho voluto dire poche parole su queste colorazioni, che gli indoni dànno, a freddo, con H_2SO_4 conc., poichè possono essere utili, non soltanto per la sintesi degli indoni, ma, in molti casi, anche per riconoscere gli acidi cinnamici stabili, dagli *allo*-acidi.

L'α-etil-β-fenil-indone l'ho ottenuto per azione dell'acido solforico, sull'etere etilico dell'acido α-etil-β-difenil-lattico.

Già Gräbe e Aubin [2] avevano adoperato l'acido solforico come disidratante tra un gruppo fenico ed uno carbossilico. Dall'acido difenil-orto-carbonico avevano ottenuto il difenil-chetone:

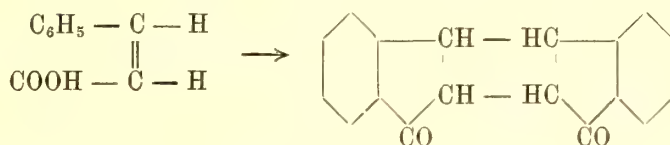
$$C_6H_4\begin{matrix} / C_6H_5 \\ \backslash COOH \end{matrix} = H_2O + C_6H_4\begin{matrix} / C_6H_4 \\ \backslash CO \end{matrix}$$

Roser [3] trasformò in indoni alcuni derivati dell'acido cinnamico per azione dell'acido solforico. Dall'acido dibromo-cinnamico, ottenne il dibromo-indone:

$$\begin{matrix} & C\text{-}Br \\ C_6H_5 & C - Br \\ & HOOC \end{matrix} \longrightarrow H_2O + C_6H_4\begin{matrix} - C - Br \\ \| \\ C - Br \\ CO \end{matrix}$$

(1) M. Bakunin, Gazz. chim., *30* (2), 355 (1900).

(2) Gräbe e Aubin, Ber., *20*, 845 (1887).

(3) Roser, Lieb. Ann., *247*, 129 (1888).

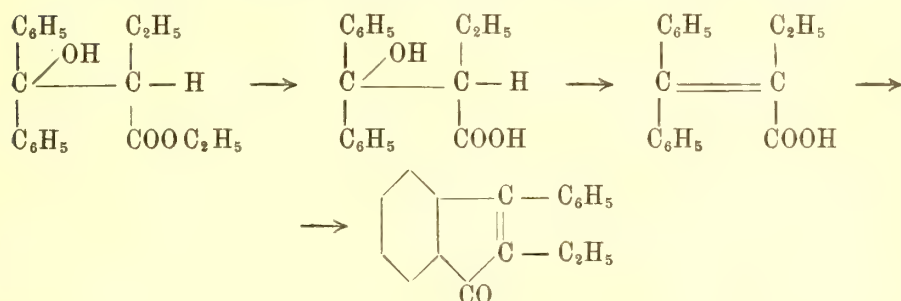
Liebermann [1], facendo agire l'acido solforico conc. sull'acido *allo* cinnamico, ottenne non l'indone, ma un dimero, il truxone:

$$\begin{array}{c} C_6H_5 - C - H \\ \| \\ COOH - C - H \end{array} \longrightarrow \text{(truxone: due nuclei indanonici uniti per } CH - HC,\ CH - HC \text{, con i due } CO\text{)}$$

Stoermer e Voht [2], come ho accennato, appunto per azione dell'acido solforico sull'acido allo α-metil-cinnamico, hanno ottenuto l'α-metil-indone.

È facile comprendere come io abbia potuto ottenere l'α-etil-β-fenil-indone, dall'etere etilico dell'acido α-etil-β-difenil-lattico.

L'acido solforico conc., a freddo, ha prima saponificato l'etere dando l'acido α-etil-β-difenil-lattico; poi ha eliminato da questo una molecola d'acqua, formando l'acido α-etil-β-fenil-cinnamico; e finalmente una seconda molecola d'acqua tra il carbossile e l'anello benzenico, dando luogo alla formazione dell'α-etil-β-fenil-indone.

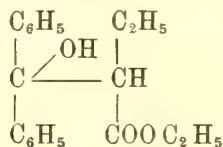
La reazione sarebbe andata, dunque, secondo lo schema seguente:

$$(C_6H_5)_2C(OH) - CH(C_2H_5) - COOC_2H_5 \longrightarrow (C_6H_5)_2C(OH) - CH(C_2H_5) - COOH \longrightarrow (C_6H_5)C = C(C_2H_5) - COOH \longrightarrow C_6H_4\begin{cases} C - C_6H_5 \\ \| \\ C - C_2H_5 \\ CO \end{cases}$$

Questo metodo per la sintesi degli indoni è molto semplice; e si hanno buoni rendimenti, poichè da 2 gr. di etere etilico dell'acido α-etil-β-difenil-lattico ho sempre ottenuto almeno 1 gr. di α-etil-β-fenil-indone.

Di questo indone ho ottenuto l'ossima ed il fenil-idrazone.

Ho in corso esperienze per trasformare questo indone nell'idrindone e nell'idrindene corrispondente.

Etere etilico dell'acido α-etil-β-difenil-lattico.

$$(C_6H_5)_2C(OH) - CH(C_2H_5) - COOC_2H_5$$

[1] Liebermann, Ber., *31* (2095), (1898).

[2] Stoermer e Voht, loc. cit.

Si disciolgono 20 gr. di benzofenone in 60 c. c. di benzolo (disseccato su Na), e si aggiungono poi 14 gr. di α-bromo-butirrato di etile e gr. 10 di zinco in granuli.

La reazione si fa in un pallone da 500 c. c.; a b. m., con refrigerante chiuso da un tubo a $CaCl_2$.

Dopo pochi minuti di ebullizione, la reazione avviene con una certa vivacità; e la soluzione, da incolora, diviene di colore giallo-bruno. Si lascia bollire per circa 2 ore. Poi si raffredda e si decompone con H_2SO_4 diluito. Si separa la soluzione benzenica e si lava bene con acqua; e, dopo aver filtrato, si distilla il benzolo. Per raffreddamento tutta la massa cristallizza in ciuffi di aghi. Si filtrano alla pompa e si lavano poi con poco alcool. Cristallizzati da una mescolanza di acqua ed alcool (1:3), si ottengono grossi aghi bianchi e lucenti che fondono a 107-108°.

La sostanza si dissecca a 100° e si analizza:

I sostanza gr. 0,2222 : CO_2 gr. 0,6192 ; H_2O gr. 0,1478
II sostanza gr. 0,2282 : CO_2 gr. 0,6401 ; H_2O gr. 0,1518

Donde °/₀ :

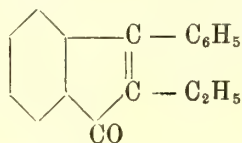
	Trovato	Calcolato per $C_{19}H_{22}O_3$
C	76,00 - 76,50	76,51
H	7,44 - 7,44	7,38

Questo etere, con H_2SO_4 conc., a freddo, si colora in un bel verde smeraldo; a caldo, in rosso. Per aggiunta di acqua, la soluzione, dal colore dal colore verde passa al colore giallo intenso.

È una sostanza molto solubile in alcool etilico e metilico, in benzolo, cloroformio, etere etilico ed etere acetico; meno solubile in etere di petrolio.

Da una preparazione si ottengono circa 20 gr. di questo etere.

Azione dell'acido solforico sull'etere etilico dell'acido α-etil-β-difenil-lattico: α-etil-β-fenil-indone.

C — C_6H_5
||
C — C_2H_5
CO

A 2 gr. di etere etilico dell'acido α-etil-β-difenil-lattico si aggiungono 10 c. c di H_2SO_4 conc. La soluzione diviene immediatamente di un bel colore verde smeraldo.

Però, se si fa questa operazione con attenzione, si nota come la colorazione verde, pur essendo immediata, è preceduta da una fugace colorazione gialla, poi arancio e rossa.

Si lascia reagire a temperatura ordinaria, per 1 giorno. Si aggiungono quindi dei piccoli pezzi di ghiaccio, mantenendo però a bassa temperatura (miscuglio di ghiaccio e sale) il recipiente in cui si fa questa operazione.

L'aggiunta dei piccoli pezzi di ghiaccio deve essere fatta lentamente. Dal colore verde, la soluzione passa ad una serie di colori, nelle sfumature più strane, dal verde al rosso, dal rosso all'arancio, dal colore arancio al giallo intenso, e si nota un odore speciale. Si aggiungono poi pochi c. c. di acqua, sempre però a freddo.

Si depositano così dei fiocchi di colore giallo-arancio, che si raccolgono su filtro. Si disciolgono in alcool etilico bollente, nel quale sono molto solubili.

Per raffreddamento della soluzione, si depositano grossi prismi, lucenti, di bel colore giallo-arancio, che fondono a 92-93°.

La sostanza — disseccata a 50°, e tenuta in essiccatore nel vuoto, su P_2O_5, per 3 giorni — si analizza:

I sostanza gr. 0,2288 : CO_2 gr. 0,7286 ; H_2O gr. 0,1232
II sostanza gr. 0,2018 : CO_2 gr. 0,6448 ; H_2O gr. 0,1112

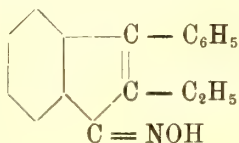
Donde °/₀:

	Trovato	Calcolato per $C_{17}H_{14}O$
C	86,85 - 87,14	87,20
H	6,03 - 6,16	6,00

Questo indone, con H_2SO_4 conc., a freddo si colora in un bel verde smeraldo; a caldo, in rosso. La reazione è così sensibile che basta un cristallino perchè 10 c. c. di acido solforico si colorino in un bel verde smeraldo. Con HNO_3 conc., a freddo si colora in rosso.

È una sostanza molto solubile in alcool etilico e metilico, benzolo, cloroformio, etere etilico ed etere acetico; meno in etere di petrolio.

Da una preparazione si ottiene, sempre, più di 1 gr. di α-etil-β-fenil-indone.

Ossima dell'α-etil-β-fenil-indone

C — C_6H_5
‖
C — C_2H_5
C = NOH

Si disciolgono 2 gr. di α-etil-β-fenil-indone in 40 c. c. di alcool etilico, e si aggiungono poi 2 gr. di cloridrato di idrossilammina disciolti in 10 c. c. di acqua.

Si fa bollire per 3 ore. Per raffreddamento si depositano degli aghi di colore giallo, che fondono a 178-182°.

Si cristallizzano da una mescolanza di alcool etilico e acqua (2 : 1). Si hanno così dei lunghi aghi, lucenti e di un bel colore giallo-oro, che fondono a 182-183°.

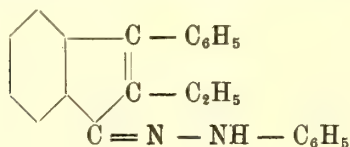
Con H_2SO_4 conc., a freddo si colorano in rosso-sangue. Si dissecca a 100° la sostanza, e si determina l'azoto:

sostanza gr. 0,1992: N c. c. 9.4 a 758 mm. e 23°.

Donde %:

	Trovato	Calcolato per $C_{17}H_{15}NO$
N	5,27	5,60

Fenil-idrazone dell'α-etil-β-fenil-indone

C_6H_4 — C — C_6H_5
‖
C — C_2H_5
C = N — NH — C_6H_5

Si disciolgono 2 gr. di α-etil-β-fenil-indone in 40 c. c. di alcool etilico, e si aggiungono poi 2 gr. di fenil-idrazina.

Si fa bollire per 2 ore a b. m. Si distilla un po' d'alcool e si filtra. Per raffreddamento della soluzione, si depositano cristalli di colore giallo intenso, che fondono a 132-134°.

Cristallizzati nuovamente dall'alcool, nel quale sono molto solubili, si ottengono prismi di colore giallo, che fondono a 136-138°.

La sostanza si dissecca a 100°, e si determina l'azoto:

I sostanza gr. 0,1210 : N. c. c. 10,2 a 758 mm. e 25°
II sostanza gr. 0,2114 : N. c. c. 16,2 a 760 mm. e 23°

Donde %:

	Trovato	Calcolato per $C_{23}H_{20}N_2$
N	9,33 - 8,50	8,63

Questo fenil-idrazone dà, con H_2SO_4 conc., a freddo, una colorazione rosso-bruna.

Patologia vegetale. — *L'avvizzimento bacteriaceo del pomodoro.* Nota del prof. Vittorio Peglion, presentata dal Socio G. Ciamician [1].

Nel maggio 1914, il prof. Calabresi, direttore della Cattedra ambulante di Agricoltura di Vasto accertava nelle coltivazioni di pomodoro colà abbastanza diffuse per l'esportazione dei prodotti primaticci, la presenza di una malattia caratterizzata, come primo sintomo, dall'avvizzimento delle foglie che poscia si accartocciano e si essiccano, indi da progressivo inflaccidamento dei tessuti dello stelo cui segue la morte della pianta. Alcune piante colpite mi furono spedite in esame, ed esse presentavano i sintomi anzidetti, senza alcuna parvenza esterna di infezione fungiva, se si esclude qualche macchia di *Septoria lycopersici.*

Sezionando trasversalmente lo stelo, appaiono evidenti lesioni localizzate nella regione vascolare: aree più o meno vaste, formanti talora un anello pressochè continuo, sono colpite da un caratteristico imbrunimento ed anzichè la sodezza specifica dei tessuti sani soggiaciono ad accentuata disorganizzazione; l'ago di platino penetra senza sforzo per qualche centimetro di lunghezza in seno ai tessuti dissociati e ridotti allo stato di poltiglia mucosa.

Le sezioni longitudinali rivelano che codesta alterazione del sistema vascolare si estende per lunghissimi tratti dello stelo e da questo nelle ramificazioni, nei picciuoli e nei peduncoli fiorali. L'alterazione resta nettamente localizzata nella parte aerea ed in nessun caso se ne è constatata traccia nel fittone.

L'esame microscopico conferma la profonda disorganizzazione subìta dal sistema vascolare della pianta: in seguito al disfacimento del floema esterno ed interno si formano lacune in cui restano isolati gli elementi xilematici. I vasi legnosi, ma soprattutto codeste cavità lisigeniche del floema si rivelano infarciti da un microorganismo che vi pullula a miriadi e di cui si constata la presenza allo stato, per così dire, di coltura pura, anche nelle propaggini ultime del processo patologico in seno agli organi che esternamente non presentano ancora segni di alterazione.

Ho proceduto all'isolamento di questo microorganismo mercè la comune gelatina di brodo di carne e successivamente coll'agar al brodo, quando la temperatura del laboratorio non consentiva l'uso della gelatina. Ottimi resultati ho avuto anche colla gelatina di brodo di fagiuolo glucosato, preparata secondo le indicazioni del Mazè per la separazione dei rizobi e che,

[1] Pervenuta all'Accademia il 26 luglio 1915.

a più riprese, ho verificato molto adatta per la coltura di bacteri fitopatogeni.

In tutti i casi, si isola un bacterio corto, immobile, che si sviluppa lentamente nei detti substrati formando colonie rotondeggianti opalescenti all'inizio indi di color giallo, man mano più carico; nelle strie su gelatina esso forma una patina gialla di aspetto lievemente viscido; nelle infissioni si sviluppa prevalentemente in superficie, ma anche lungo il canale d'innesto, formando colonie più pallide; la gelatina è liquefatta soltanto dopo parecchie settimane. Nei substrati glucosati la viscidità si accentua, ed all'esame microscopico si osserva frequente e caratteristico incapsulamento; nessuna traccia di sporificazione anche nelle colture molto vecchie.

L'attitudine patogenica di questo bacterio è stata dimostrata mediante inoculazioni a piante di pomodoro, prelevate dal vivaio dell'orto della Scuola e coltivate in vaso nella serra. Dopo 10-15 giorni le piante inoculate presentavano il primo sintomo caratteristico: l'avvizzimento delle foglie che in breve disseccano e si disarticolano; sezionando il fusto appaiono illividite e disorganizzate le zone anzidette della sezione vascolare: l'esame microscopico rivela la presenza di miriadi di bacteri i cui caratteri culturali resultano identici a quelli osservati nelle colture ricavate direttamente dal materiale ricevuto da Vasto. Le inoculazioni ripetute durante i mesi di giugno e luglio 1914 dettero costantemente resultati positivi col pomodoro, negativi col tabacco e colla datura.

Sembra che il prolungato sviluppo in substrati artificiali attenui profondamente la virulenza del bacterio: le colture in gelatina ed in agar che attraversarono l'estate 1914, riprese nell'autunno ed adibite ad inoculazioni in piante di pomodoro tenute in serra, determinarono lesioni molto ristrette e localizzate nei tessuti dello stelo. Inoculando le stesse colture pure a frutti immaturi di pomodoro, staccati dalla pianta ebbi resultati positivi: il bacterio determina sollecita disorganizzazione della polpa e prelevando materiale da innesto da questi frutti si riesce a provocare lesioni più accentuate nel fusto di piante viventi e sane.

Anche quest'anno la malattia ha tornato a manifestarsi negli orti di Vasto, ed il materiale gentilmente fornitomi dal prof. Calabresi ha confermato le osservazioni compiute nel 1914.

Questa malattia rientra fra le bacteriosi vascolari, intese nel senso secondo il quale fu creato questo gruppo da Erwin F. Smith. Le zooglee bacteriacee occupano non soltanto il lume dei grossi vasi legnosi ma si diffondono nel parenchima annesso, ed in seguito alla disorganizzazione di esso e del floema occupano le cavità lisigeniche che ne resultano: lesioni tutte che alterano sino ad impedire la circolazione dei liquidi, donde il progressivo avvizzimento delle foglie e l'essiccamento più o meno sollecito della pianta.

Come tale essa non può assimilarsi alle forme di bacteriosi del pomodoro di cui è stata antecedentemente segnalata la presenza in Italia dal Voglino ([1]) e dal Pavarino ([2]), prospettate più specialmente come bacteriosi del frutto di pomodoro, sebbene il Pavarino, nel diligente studio intorno al malanno quale si verifica nel Vogherese, abbia rilevato che l'infezione non sia localizzata nei frutti, ma attacchi tutte le parti aeree della pianta; tuttavia la natura delle lesioni osservate sui germogli e l'illustrazione anatomo-patologica datane, ed infine i caratteri del microorganismo specifico non hanno nulla di comune con quanto si osserva nelle piante infette degli orti di Vasto.

Esiste invece una grandissima analogia sia dal punto di vista eziologico che anatomo-patologico tra queste e le piante di pomodoro colpite dalla malattia descritta da Erwin F. Smith col nome di « Grand Rapid Tomato diseare », bacteriosi vascolare ben distinta dal « Brown Rot of Solanaceous » illustrata dallo stesso autore. Quest'ultima malattia, comune a parecchie specie di Solanacee, fu descritta dallo Smith ([3]) sino dal 1896 ed esaurientemente illustrata di recente ([4]): essa è dovuta al *Bact. Solanacearum.* L'altra infezione bacteriacea del pomodoro è stata osservata nell'estate 1909 mentre infieriva nelle coltivazioni di pomodoro di Grand Rapids nel Michigan: ne fu data un'illustrazione sommaria nel 1910 ([5]) ed un ulteriore studio nel 1914 ([6]); l'agente specifico è l'*Aplanobacter michiganense*, i cui caratteri morfo-biologici corrispondono a quelli rilevati nello studio del microorganismo isolato dai pomidoro provenienti da Vasto.

La malattia sembra piuttosto diffusa nel nord America, a quanto scrive lo Smith, e da un cenno incidentale dato dal Jones. Lo stesso Smith ritiene che si debba considerare identica la malattia bacteriacea delle patate studiata dallo Spickermann ([7]) in Vestfalia nel 1908 e sommariamente descritta nel 1910. Ma nel particolareggiato studio testè pubblicato dallo Spickermann ([8]), ov'è ampiamente illustrato il microorganismo specifico di questa

([1]) Voglino P., Annali R. Accad. di Agricolt. Torino, 1909, pag. 277.

([2]) Pavarino G. L., *Sulla batteriosi del pomodoro.* Atti Ist. Bot. della R. Università di Pavia, pp. 338-344, vol. XII, 1910; *Sul marciume dei pomodori.* Riv. di Pat. veg., anno VI, n. 6, 1913.

([3]) Erwin F. Smith, *A bacterial disease of tomato, eggplant and Irish potato.* Bull. 12 Div. of veg. phys. and pathol. Washington, 1896.

([4]) Erwin F. Smith, *Bacteria in relation to plant diseases*, vol. 3°, Washington, 1914.

([5]) Erwin F. Smith, *A new tomato disease of Economic importance Science*, vol. XXXI, n. 803, 1910.

([6]) Erwin F. Smith, *Bact. in rel. to plant diseases*, vol. 3°, 1914.

([7]) Spieckermann A., *Ueber eine noch nicht beschrieb. bakter. Gefasserkrank. der Kartoffelpflanze.* Centr. f. Bakt., II abt., 1910.

([8]) Spieckermann A. und Kotthoff, *Die Bakterienringfaule der Kartoffelpflanze.* Landwirtsch. Jahrbucher, heft 5, 1914.

« Bakterienringfaule » della patata (*Bact. sepedonicum*) non v'ha il minimo cenno che indichi che questo Autore fosse edotto delle ricerche dello Smith intorno alla bacteriosi in parola; tant'è che fra le specie bacteriacee, parassite della patata, studiate dallo Spickermann in confronto al *B. sepedonicum*, non figura l'*Aplanobacter* anzidetto.

A differenza di quanto è stato accertato in America, la malattia quale si è manifestata a Vasto sembra circoscritta, quasi localizzata in alcuni orti; così almeno mi fu riferito dal prof. Calabresi, nè io ho avuto occasione di accertarne la presenza altrove, in alcuna delle coltivazioni industriali di pomodoro tanto estese ormai nella Valle padana.

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXIV. (1892-1915). Fasc. 3°. Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIV. (1892-1915). Fasc. 1-2.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XI. Fasc. 3.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie, sino al 1° agosto 1915.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 2 settembre 1915.* **N. 4.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXIV°. — Fascicolo 4°

2° Semestre.

Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie sino al 15 agosto **1915.**

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI
pervenute all'Accademia durante le ferie del **1915.**

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Matematica. — *Sulle trasformazioni di Ribaucour dei sistemi tripli ortogonali.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI [1].

1. Ribaucour per il primo, costruendo la teoria dei sistemi ciclici, ha riconosciuto l'importanza, in geometria infinitesimale, della considerazione di quegli inviluppi di sfere a due parametri, sulle cui due falde si corrispondono le linee di curvatura. Le due superficie S, S' che formano le due falde di un tale inviluppo di Ribaucour, si diranno derivate l'una dall'altra per *trasformazione di Ribaucour.* In altre parole, due superficie S, S' saranno trasformate di Ribaucour l'una dell'altra se si corrispondono punto a punto in guisa che le normali in ogni coppia P, P' di punti corrispondenti s'incontrino in un punto M_0, equidistante da P, P', e quando P descrive una linea di curvatura di S il corrispondente P' descrive una linea di curvatura di S'. In tal caso la sfera descritta col centro in M_0 e di raggio $M_0P = M_0P'$ è la sfera inviluppante.

Nella presente Nota mi propongo di risolvere il problema di costruire le trasformazioni di Ribaucour pei sistemi tripli di superficie ortogonali. Più precisamente si ricercano tutte le coppie possibili di sistemi tripli ortogonali (Σ), $(\overline{\Sigma})$ che si corrispondono punto a punto e per linee di curvatura in guisa che, *in una delle tre serie* dei sistemi tripli, le superficie corrispondenti siano trasformate di Ribaucour l'una dell'altra. Cominceremo dal

[1] Pervenuta all'Accademia il 14 agosto 1915.

dimostrare che la circostanza, supposta per una delle tre serie, si verifica necessariamente anche per le altre due.

2. Siano u_1, u_2, u_3 i tre parametri che fissano la posizione di ogni singola superficie nelle rispettive tre serie, sicchè nella nostra ipotesi si corrisponderanno nei due sistemi $(\Sigma), (\overline{\Sigma})$ i punti di eguali coordinate curvilinee (u_1, u_2, u_3). Ora supponiamo, di più, che due qualunque superficie corrispondenti S, S' in una delle tre serie, p. es. nella $u_3 = \text{cost}$, siano toccate in ogni coppia P, P' di punti corrispondenti da una medesima sfera, Descriviamo allora per ogni tale coppia di punti il circolo C normale alla sfera inviluppante e quindi alle due superficie S, S'. È ben noto che il sistema degli ∞^2 circoli costruiti è un sistema ciclico (ved. *Lezioni di geometria differenziale*, vol. II, § 281), cioè ammette una serie ∞^1 di superficie ortogonali, fra le quali figurano le due S, S'. Inoltre si sa che la congruenza degli assi di questo circolo ha sviluppabili reali, e queste corrispondono alle linee di curvatura $(u_1), (u_2)$ di S, S'. Se con F_1, F_2 si indicano i due fuochi della congruenza sull'asse del circolo C, le rette PF_1, $P'F_1$ sono le tangenti a due linee di curvatura corrispondenti di S, S', e similmente le congiungenti $PF_2, P'F_2$ dànno le tangenti alle linee di curvatura dell'altro sistema (ibid., § 276). D'altra parte queste due tangenti $PF_1, P'F_1$ sono le normali nel punto P a due superficie corrispondenti di una delle altre due serie, diciamo le $u_1 = \text{cost}$; e similmente $PF_2, P'F_2$ saranno le normali a due superficie corrispondenti dell'altra serie $u_2 = \text{cost}$. E siccome $PF_1 = P'F_1$, $PF_2 = P'F_2$, ne risulta appunto che anche due superficie corrispondenti della serie $u_1 = \text{cost}$, o della $u_2 = \text{cost}$, sono trasformate di Ribaucour l'una dell'altra.

3. Premesse queste considerazioni geometriche, andiamo a ricercare coll'analisi tutti i sistemi tripli ortogonali $(\overline{\Sigma})$ trasformati di Ribaucour di un sistema dato (Σ). Questo sistema sarà definito, nel solito modo, dalla corrispondente espressione del ds^2

$$ds^2 = H_1^2\, du_1^2 + H_2^2\, du_2^2 + H_3^2\, du_3^2, \tag{1}$$

e si riterranno le consuete notazioni (X_i, Y_i, Z_i) $i = 1, 2, 3$ pei coseni di direzione degli spigoli del triedro principale, e β_{ik} $(i \neq k)$ per le sei rotazioni. Si sa che queste rotazioni β_{ik} sono legate dal sistema differenziale

$$\text{(A)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\, \beta_{lk} \\ &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} = -\beta_{li}\, \beta_{lk}. \end{aligned} \right. \qquad (i \neq k \neq l)$$

Note le sei rotazioni β_{ik}, in funzione di u_1, u_2, u_3, è determinata l'immagine sferica del sistema triplo; ma esistono infiniti di questi sistemi

colla stessa immagine sferica, cioè con eguale orientazione del triedro principale, che per ciò diconsi *paralleli*. Essi corrispondono alle singole terne (H_1, H_2, H_3) di soluzioni del sistema differenziale

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k \qquad (i \neq k),$$

il cui integrale generale dipende da tre funzioni arbitrarie essenziali.

Ricordiamo che i nove coseni (X_i, Y_i, Z_i) sono determinati, a meno di movimenti, dal sistema di equazioni ai differenziali totali

$$(a) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial X_i}{\partial u_i} &= -\beta_{ki} X_k - \beta_{li} X_l \\ \frac{\partial X_i}{\partial u_k} &= \beta_{il} X_l . \end{aligned} \right. \qquad (i \neq k \neq l)$$

In fine, note le H_i e le X_i, si hanno per quadrature le coordinate x, y, z del punto variabile, che descrive il sistema triplo (Σ), dalle formole:

$$(2) \qquad \frac{\partial x}{\partial u_i} = H_i X_i \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial u_i} = H_i Y_i \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial u_i} = H_i Z_i .$$

4. Pel secondo sistema triplo $(\overline{\Sigma})$, che supponiamo legato a (Σ) da una trasformazione di Ribaucour, manteniamo le medesime notazioni, distinguendole con un soprassegno. Le normali in due punti corrispondenti, $P \equiv (x, y, z)$, $\overline{P} \equiv (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, a due superficie della serie $u_i = \text{cost}$, s'incontrano, per ipotesi, in un punto F_i equidistante da $P, \overline{P}$; onde ponendo $PF_i = R_i$, deduciamo

$$x + R_i X_i = \overline{x} \pm R_i \overline{X}_i$$

colle analoghe in y, z.

Ma non alteriamo la generalità, limitandoci a prendere il segno superiore, bastando cangiare nel caso contrario $\overline{H}_i$ in $-\overline{H}_i$; così avremo

$$(3) \qquad \overline{X}_i = X_i + \frac{x - \overline{x}}{R_i} .$$

Ora, indicando con ξ, η, ζ i coseni della direzione da P a $\overline{P}$, poniamo

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 \\ \eta &= \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \alpha_3 Y_3 \\ \zeta &= \alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2 + \alpha_3 Z_3 , \end{aligned} \right.$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono tre funzioni di u_1, u_2, u_3 legate dalla relazione

$$(5) \qquad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 .$$

Denotando poi con T il valore algebrico del segmento $P\bar{P}$, avremo

$$\bar{x} = x + T\xi, \tag{6}$$

colle analoghe per $\bar{y}, \bar{z}$; e, sostituendo nelle (3),

$$\bar{X}_i = X_i - \frac{T}{R_i}\xi. \tag{7}$$

Ora dobbiamo avere $S\bar{X}_i^2 = 1$ [1]; e siccome

$$SX_i^2 = 1 \quad , \quad S\xi^2 = 1 \quad , \quad S\xi X_i = \alpha_i ,$$

dalle (7) deduciamo

$$\frac{T}{R_i} = 2\alpha_i ,$$

e per ciò

$$\bar{X}_i = X_i - 2\alpha_i \xi . \tag{8}$$

Ma si osservi che, inversamente, se le α_i soddisfano la (5), queste formole

$$\bar{X}_i = X_i - 2\alpha_i(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3)$$

dànno in effetto i coseni di direzione $(\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i)$ $i = 1, 2, 3$, degli spigoli di un triedro trirettangolo, perchè risulta identicamente

$$S\bar{X}_i\bar{X}_k = 0 \qquad (i \neq k).$$

5. Il nostro problema analitico consiste nel trovare le condizioni a cui debbono soddisfare le funzioni incognite $T, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ affinchè le formole (6) definiscano un sistema triplo ortogonale $(\bar{\Sigma})$ col triedro principale $(\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i)$. Le condizioni a ciò necessarie e sufficienti saranno date dalle relazioni

$$S\bar{X}_k \frac{\partial \bar{x}}{\partial u_i} = 0 \qquad (i \neq k), \tag{9}$$

soddisfatte le quali il nuovo sistema triplo ortogonale $(\bar{\Sigma})$ sarà trasformato di Ribaucour del sistema (Σ) e i raggi R_1, R_2, R_3 delle tre sfere inviluppanti saranno dati dalle formole

$$R_1 = \frac{T}{2\alpha_1} \quad , \quad R_2 = \frac{T}{2\alpha_2} \quad , \quad R_3 = \frac{T}{2\alpha_3} . \tag{10}$$

La condizione (9), a causa delle (2), (6), (7), si scrive

$$S(X_k - 2\alpha_k\xi)\left(H_i X_i + \frac{\partial T}{\partial u_i}\xi + T\frac{\partial \xi}{\partial u_i}\right) = 0; \tag{9*}$$

[1] Col simbolo S indichiamo la somma di tre termini simili rispetto agli assi x, y, z.

e per calcolarla conviene tener conto delle seguenti identità:

$$S X_i X_k = 0 \quad , \quad S X_k \xi = \alpha_k \quad , \quad S \xi^2 = 1 ,$$

e delle altre che ne seguono per derivazione, tenendo conto delle (a):

$$S \xi \frac{\partial \xi}{\partial u_i} = 0 \quad , \quad S X_k \frac{\partial \xi}{\partial u_i} = \frac{\partial \alpha_k}{\partial u_i} - \beta_{ki} \alpha_i .$$

Si trova, così,

$$- \alpha_k \frac{\partial T}{\partial u_i} + T \left(\frac{\partial \alpha_k}{\partial u_i} - \beta_{ki} \alpha_i \right) - 2 \alpha_i \alpha_k H_i = 0 ,$$

ossia

$$\frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial u_i} + 2 H_i \alpha_i \right) = \frac{1}{\alpha_k} \left(\frac{\partial \alpha_k}{\partial u_i} - \beta_{ki} \alpha_i \right) ,$$

nella quale formola il valore del primo membro non dipende dall'indice k. Introduciamo tre nuove funzioni incognite $\gamma_1 , \gamma_2 , \gamma_3$, ponendo

$$\frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial u_i} + 2 H_i \alpha_i \right) = \gamma_i ,$$

e dovremo avere insieme le formole

$$\frac{\partial T}{\partial u_i} = \gamma_i T - 2 H_i \alpha_i \tag{11}$$

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial u_i} = \beta_{ki} \alpha_i + \alpha_k \gamma_i , \tag{12}$$

dopo di che, resterà a discutere, per le funzioni incognite T , α_i , γ_i, il sistema differenziale (11), (12), al quale è da aggiungersi l'equazione in termini finiti (5) per le α_i.

6. Confrontiamo due delle equazioni (11). Siano

$$\frac{\partial T}{\partial u_i} = \gamma_i T - 2 H_i \alpha_i$$

$$\frac{\partial T}{\partial u_k} = \gamma_k T - 2 H_k \alpha_k ;$$

e costruiamo la corrispondente condizione d'integrabilità:

$$\frac{\partial}{\partial u_k} (\gamma_i T) - \frac{\partial}{\partial u_i} (\gamma_k T) + 2 \frac{\partial}{\partial u_i} (H_k \alpha_k) - 2 \frac{\partial}{\partial u_k} (H_i \alpha_i) = 0 .$$

Sviluppando le derivazioni colle formule (11), (12) stesse e colle (B), resta semplicemente

$$T\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} - \frac{\partial \gamma_k}{\partial u_i}\right) = 0 \text{ [1]};$$

e poichè T non si annulla, ne deduciamo

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \frac{\partial \gamma_k}{\partial u_i},$$

cioè *l'espressione* $S\gamma_i \, du_i$ *deve essere un differenziale esatto.* Dopo ciò, possiamo esprimere le tre incognite γ_i per un'unica funzione Φ, ponendo

$$(13) \qquad \gamma_i = -\frac{1}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

ed introdurremo ancora, al posto delle α_i, tre nuove funzioni W_i, ponendo

$$(14) \qquad W_i = \Phi \alpha_i ;$$

sicchè avremo, per la (5),

$$(14^*) \qquad \Phi^2 = W_1^2 + W_2^2 + W_3^2 .$$

Le equazioni differenziali (12) dànno nelle W_i il sistema

$$(B^*) \qquad \frac{\partial W_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} W_k ,$$

che è precisamente il sistema *aggiunto* del sistema (B) cui soddisfanno le H_i.

Le formole (11) diventano

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(\Phi T) = -2 H_i W_i ,$$

ovvero, se poniamo

$$\Phi T = -2F ,$$

$$(15) \qquad \frac{\partial F}{\partial u_i} = H_i W_i .$$

Ma appunto, essendo le H_i soluzioni del sistema (B) e le W_i del suo aggiunto (B^*), l'espressione $\sum_i H_i W_i \, du_i$ è un differenziale esatto, onde

$$(15^*) \qquad F = \int (H_1 W_1 \, du_1 + H_2 W_2 \, du_2 + H_3 W_3 \, du_3) .$$

[1] La medesima condizione $\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \frac{\partial \gamma_k}{\partial u_i}$ si otterrebbe costruendo le condizioni d'integrabilità per le (12), servendosi delle (A).

Le formole (6), che dànno il sistema $(\bar{\Sigma})$ derivato, diventano, così,

$$\bar{x} = x - \frac{2\,F}{W_1^2 + W_2^2 + W_3^2}\,(W_1 X_1 + W_2 X_2 + W_3 X_3)\,. \tag{16}$$

Viceversa, se si prende una terna qualunque (W_1, W_2, W_3) di soluzioni del sistema (B^*), le formole (16), dove F è calcolata con una quadratura dalla (15^*), daranno un sistema triplo ortogonale $(\bar{\Sigma})$ derivato per trasformazione di Ribaucour dal sistema (Σ). E invero tutte le condizioni calcolate al n. 5 risultano allora soddisfatte.

7. Possiamo anche esprimere tutti gli elementi nelle formole (16) per l'unica funzione F e le sue derivate, ricordando che si ha, per le (15),

$$W_i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial F}{\partial u_i}\,.$$

Le equazioni di condizione (B^*) per le W_i si traducono allora, per la funzione F, nelle tre equazioni simultanee del secondo ordine

$$(C)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial u_1\,\partial u_2} &= \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial u_2}\frac{\partial F}{\partial u_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial u_2}\\
\frac{\partial^2 F}{\partial u_2\,\partial u_3} &= \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u_3}\frac{\partial F}{\partial u_2} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u_2}\frac{\partial F}{\partial u_3}\\
\frac{\partial^2 F}{\partial u_3\,\partial u_1} &= \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial u_3} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial u_3}\frac{\partial F}{\partial u_1}\,.
\end{aligned}\right.$$

Scritte colla notazione simbolica delle derivate seconde covarianti, calcolate rispetto alla forma differenziale (1), queste si esprimono più brevemente così:

$$(C^*)\qquad F_{12} = 0 \quad , \quad F_{23} = 0 \quad , \quad F_{31} = 0\,.$$

Ed osservando, poi, che si ha

$$\Phi^2 = W_1^2 + W_2^2 + W_3^2 = \Delta_1 F\,,$$

$$W_1 X_1 + W_2 X_2 + W_3 X_3 = \sum_i \frac{1}{H_i^2}\frac{\partial x}{\partial u_i}\frac{\partial F}{\partial u_i} = \nabla(x\,, F)\,,$$

dove $\Delta_1 F$, $\nabla(x\,, F)$ indicano i noti parametri differenziali, daremo alle (16) la forma definitiva seguente:

$$(II)\qquad \bar{x} = x - \frac{2F}{\Delta_1 F}\nabla(x\,, F) \quad , \quad \bar{y} = y - \frac{2F}{\Delta_1 F}\nabla(y\,, F)\,,$$

$$\bar{z} = z - \frac{2F}{\Delta_1 F}\nabla(z\,, F)\,.$$

Queste formole, nelle quali si ponga per F una qualunque soluzione del sistema (C), dànno tutti i sistemi tripli ortogonali $(\overline{\Sigma})$ derivati dal primitivo (Σ) per trasformazione di Ribaucour. Osserveremo che le formole (8) pei coseni $\overline{X}_i$ si scrivono, alla loro volta,

$$(\mathrm{I}^*) \qquad \overline{X}_i = X_i - \frac{2}{H_i \Delta_1 F} \frac{\partial F}{\partial u_i} \nabla(x, F), \text{ ecc.}$$

8. Dalle (10), calcolando i raggi R_i delle sfere inviluppanti, abbiamo

$$R_i = \frac{T}{2\alpha_i} = \frac{\Phi T}{2\Phi\alpha_i} = -\frac{F}{W_i},$$

ossia

$$(17) \qquad R_i = -\frac{H_i F}{\dfrac{\partial F}{\partial u_i}}.$$

Ne risulta il teorema di Ribaucour [ved. Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux* (2ème édition), pag. 400): *Dato un sistema triplo ortogonale* (Σ), *se si prende una soluzione qualunque* F *del sistema* (C), *e sulle tre normali in un punto* P *si riportano i tre segmenti* $PF_i = R_i$ *dati dalla* (17), *le tre sfere coi centri in* F_1, F_2, F_3 *che passano per* P, *passano anche per un secondo punto* $\overline{P}$ *il quale descrive un nuovo sistema triplo ortogonale* $(\overline{\Sigma})$.

Ma la ricerca eseguita nei nn. precedenti dimostra, inoltre, che questo teorema di Ribaucour dà il più generale sistema triplo ortogonale $(\overline{\Sigma})$ derivato da Σ per una trasformazione di Ribaucour.

9. È già stato osservato dal Darboux (loc. cit., pag. 401) che il teorema di Ribaucour, applicato alla ricerca di nuovi sistemi tripli ortogonali, non dà nulla di più dei metodi combinati delle trasformazioni parallele (o di Combescure) e delle inversioni per raggi vettori reciproci. Si riconosce meglio l'identità dei due metodi, ponendola sotto questa forma più espressiva:

Se due sistemi tripli ortogonali $(\Sigma), (\overline{\Sigma})$ *sono trasformati di Ribaucour l'uno dell'altro, esistono due altri sistemi tripli ortogonali* $(\Sigma'), (\overline{\Sigma}')$ *rispettivamente paralleli a* $(\Sigma), (\overline{\Sigma})$ *e che si deducono l'uno dall'altro con un'inversione per raggi vettori reciproci.*

Per dimostrarlo, riferiamoci alle formole sopra stabilite ed osserviamo che, siccome W_1, W_2, W_3 soddisfanno alle (B^*), se si pone

$$(18) \qquad \begin{cases} x' = W_1 X_1 + W_2 X_2 + W_3 X_3 \\ y' = W_1 Y_1 + W_2 Y_2 + W_3 Y_3 \\ z' = W_1 Z_1 + W_2 Z_2 + W_3 Z_3, \end{cases}$$

queste formole definiscono un sistema triplo ortogonale (Σ') parallelo a (Σ).

Precisamente, derivando queste rapporto ad u_i, si ottiene

$$\frac{\partial x'}{\partial u_i} = H'_i X_i ,$$

dove

$$H'_i = \frac{\partial W_i}{\partial u_i} + \beta_{ki} W_k + \beta_{li} W_l ,$$

od anche, esprimendo per la funzione F,

$$H'_i = \frac{F_{ii}}{H_i} , \tag{19}$$

formole che dànno i valori dei coefficienti H'_i pel sistema (Σ'). Con una inversione per raggi vettori reciproci, rispetto alla sfera col centro nell'origine e di raggio $=1$, cangiamo il sistema (Σ') nell'inverso $(\overline{\Sigma}')$, colle formole

$$\overline{x}' = \frac{x'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} , \quad \overline{y}' = \frac{y'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} , \quad \overline{z}' = \frac{z'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} . \tag{20}$$

Queste, derivate rapporto ad u_i, coll'osservare che si ha

$$\frac{\partial x'}{\partial u_i} = H'_i X_i \quad , \quad \frac{\partial}{\partial u_i}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 2\, S\, x' \frac{\partial x'}{\partial u_i} = 2 H'_i W_i ,$$

dànno le formole

$$\frac{\partial \overline{x}'}{\partial u_i} = \frac{H'_i}{x'^2 + y'^2 + z'^2} \left(X_i - \frac{2\, x' W_i}{x'^2 + y'^2 + z'^2} \right) ,$$

ovvero anche, colle notazioni del n. 4,

$$\frac{\partial \overline{x}'}{\partial u_i} = \frac{H'_i}{x'^2 + y'^2 + z'^2} (X_i - 2\, \alpha_i\, \xi) = \frac{H'_i}{x'^2 + y'^2 + z'^2} \overline{X}_i .$$

Dunque il sistema $(\overline{\Sigma}')$ è parallelo al sistema derivato $(\overline{\Sigma})$, c. d. d.

Possiamo anche dire che la trasformazione di Ribaucour, la quale conduce dal sistema (Σ) al derivato $(\overline{\Sigma})$, si decompone in questi tre passaggi successivi: 1°) da (Σ) a (Σ') con una trasformazione parallela (o di Combescure); 2°) da (Σ') a $(\overline{\Sigma}')$ con una inversione per raggi vettori reciproci; 3°) da $(\overline{\Sigma}')$ a $(\overline{\Sigma})$ con una trasformazione parallela.

In conclusione: *Le trasformazioni di Ribaucour dei sistemi tripli ortogonali si compongono di trasformazioni di Combescure e di inversioni per raggi vettori reciproci.*

10. Il metodo, che abbiamo tenuto in questa Nota per la ricerca delle trasformazioni di Ribaucour dei sistemi tripli ortogonali, si estende facil-

mente al problema analogo *pei sistemi* n^{pli} *ortogonali* nello spazio S_n euclideo definito da

$$(21)\qquad ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + \cdots + H_n^2 du_n^2 .$$

Estese le considerazioni geometriche del n. 2 ai sistemi n^{pli} ortogonali, basta invero riprendere i calcoli dei nn. 3-7 colle formole generali dei sistemi n^{pli} ortogonali per giungere ai risultati seguenti.

Si prenda una qualunque soluzione $F = F(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ del sistema differenziale

$$F_{ik} = 0 \qquad (i \neq k),$$

ottenuto eguagliando a zero le derivate seconde miste covarianti di F [calcolate rispetto alla forma differenziale (21)], sistema la cui soluzione generale contiene n funzioni arbitrarie essenziali. Allora le formole stesse (I)

$$(II)\qquad \overline{x}_i = x_i - \frac{2F}{\Delta_1 F} \nabla(x_i, F) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

daranno il più generale sistema n^{plo} ortogonale $(\overline{\Sigma})$, derivato per trasformazione di Ribaucour dal sistema primitivo (Σ).

La formola (17) per $i = 1, 2, \ldots, n$ fornisce i raggi delle n ipersfere, che toccano le n superficie coordinate in un medesimo punto P di (Σ), e passano per un secondo punto $(\overline{P})$ che descrive il nuovo sistema n^{plo} ortogonale $(\overline{\Sigma})$. È questo il *teorema di Ribaucour esteso all'* S_n *euclideo.*

Osserviamo, ancora, che dalle (II), servendosi delle formole di derivazione invariantiva, si calcolano facilmente i coefficienti $\overline{H}_i$ pel sistema derivato $(\overline{\Sigma})$, e si trova

$$(22)\qquad \overline{H}_i = H_i - \frac{2F \cdot F_{ii}}{H_i \Delta_1 F},$$

formole che valgono in particolare per $n = 3$.

Ed anche qui, nello spazio euclideo ad n dimensioni, si vede che le trasformazioni di Ribaucour si decompongono in trasformazioni parallele ed inversioni per raggi vettori reciproci. Ma non è senza interesse osservare che, se dagli spazî euclidei si passa agli spazî generali a curvatura costante, rappresentandosi questi conformemente sullo spazio euclideo con conservazione delle sfere, esistono ancora manifestamente le trasformazioni di Ribaucour, ma non sono più decomponibili come nello spazio euclideo.

11. Ritornando per semplicità al caso dello spazio ordinario, consideriamo sulle tre normali alle superficie coordinate in un punto P i tre centri F_1, F_2, F_3 delle sfere inviluppanti. Da quanto si è detto al n. 2, risulta che il triangolo $F_1 F_2 F_3$ viene proiettato dai due punti corrispondenti $P, \overline{P}$ di $(\Sigma), (\overline{\Sigma})$ secondo i due rispettivi triedri principali. Inoltre, se

spostiamo la coppia $(P, \bar{P})$ lungo le corrispondenti superficie di una delle tre serie, p. es. della $u_3 = \text{cost}$, il lato $F_1 F_2$ del triangolo descrive una congruenza ciclica di cui F_1, F_2 sono i fuochi. Similmente per gli altri due lati.

Un' ulteriore proprietà della trasformazione di Ribaucour si ha nel seguente teorema:

In ogni coppia $(\Sigma), (\bar{\Sigma})$ *di sistemi tripli ortogonali derivati l'uno dall'altro per trasformazione di Ribaucour, i tre centri delle sfere inviluppanti descrivono tre sistemi tripli coniugati.*

Per dimostrarlo prendiamo p. es. le coordinate x_3, y_3, z_3 del centro F_3 date da

$$x_3 = x + R_3 X_3 = x - \frac{F}{W_3} X_3, \tag{23}$$

colle analoghe. Se si osservano le identità

$$\frac{\partial x}{\partial u_1} = H_1 H_1 \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial u_2} = H_2 X_2 \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial u_3} = H_3 X_3$$

$$\frac{\partial X_3}{\partial u_1} = \beta_{31} X_1 \quad , \quad \frac{\partial X_3}{\partial u_2} = \beta_{32} X_2 \quad , \quad \frac{\partial X_3}{\partial u_3} = -\beta_{13} X_1 - \beta_{23} X_2 \, ,$$

e le altre

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{F}{W_3}\right) = \frac{W_1}{W_3^2}(H_1 W_3 - \beta_{31} F) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{F}{W_3}\right) = \frac{W_2}{W_3^2}(H_2 W_3 - \beta_{32} F),$$

$$\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{F}{W_3}\right) = H_3 - \frac{F}{W_3^2}\frac{\partial W_3}{\partial u_3},$$

si calcolano dalle (23) le derivate prime

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x_3}{\partial u_1} &= \frac{H_1 W_3 - \beta_{31} F}{W_3^2}(W_3 X_1 - W_1 X_3) \\ \frac{\partial x_3}{\partial u_2} &= \frac{H_2 W_3 - \beta_{32} F}{W_3^2}(W_3 X_2 - W_2 X_3) \\ \frac{\partial x_3}{\partial u_3} &= \frac{F}{W_3}\left(\beta_{13} X_1 + \beta_{23} X_2 + \frac{1}{W_3}\frac{\partial W_3}{\partial u_3} X_3\right). \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Sarà provato il teorema se si dimostra che le derivate seconde miste

$$\frac{\partial^2 x_3}{\partial u_1 \partial u_2} \, , \quad \frac{\partial^2 x_3}{\partial u_2 \partial u_3} \, , \quad \frac{\partial^2 x_3}{\partial u_1 \partial u_3}$$

si compongono linearmente ed omogeneamente colle rispettive coppie di derivate prime

$$\left(\frac{\partial x_3}{\partial u_1}, \frac{\partial x_3}{\partial u_2}\right) \quad , \quad \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_2}, \frac{\partial x_3}{\partial u_3}\right) \quad , \quad \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_1}, \frac{\partial x_3}{\partial u_3}\right),$$

mediante coefficienti che rimangono gli stessi per y_3, z_3. Questo risulta subito dalla forma delle (24), coll'osservare le seguenti identità:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u_2}(W_3X_1 - W_1X_3) &= \left(\beta_{12} - \frac{\beta_{32}W_1}{W_3}\right)(W_3X_2 - W_2X_3) + \\
&\quad + \frac{\beta_{32}W_2}{W_3}(W_3X_1 - W_1X_3) \\
\frac{\partial}{\partial u_3}(W_3X_1 - W_1X_3) &= \frac{W_1W_3}{F}\frac{\partial x_3}{\partial u_3} + \frac{1}{W_3}\frac{\partial W_3}{\partial u_3}(W_3X_1 - W_1X_3) \\
\frac{\partial}{\partial u_3}(W_3X_2 - W_2X_3) &= \frac{W_2W_3}{F}\frac{\partial x_3}{\partial u_3} + \frac{1}{W_3}\frac{\partial W_3}{\partial u_3}(W_3X_2 - W_2X_3).
\end{aligned}\right.$$

Osserviamo, di più, che, se si pone

$$(25) \qquad h_1 = H_1 - \frac{\beta_{31}F}{W_3} \quad , \quad h_2 = H_2 - \frac{\beta_{32}F}{W_3} \quad , \quad h_3 = \frac{F}{W_3},$$

dalle formole

$$\frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_2} = \beta_{32}\,\beta_{21} \quad , \quad \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_1} = \beta_{31}\,\beta_{12},$$

risulta

$$\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial u_2} = \beta_{21} - \beta_{31}\frac{W_2}{W_3} \quad , \quad \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial u_1} = \beta_{12} - \frac{\beta_{32}W_1}{W_3}.$$

Dopo ciò, si vede che x_3, y_3, z_3 sono tre soluzioni del seguente sistema differenziale:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2\theta}{\partial u_1\,\partial u_2} &= \frac{\partial \lg h_1}{\partial u_2}\frac{\partial\theta}{\partial u_1} + \frac{\partial \lg h_2}{\partial u_1}\frac{\partial\theta}{\partial u_2} \\
\frac{\partial^2\theta}{\partial u_2\,\partial u_3} &= \frac{\partial \lg h_2}{\partial u_3}\frac{\partial\theta}{\partial u_2} + \frac{\partial \lg h_3}{\partial u_2}\frac{\partial\theta}{\partial u_3} \\
\frac{\partial^2\theta}{\partial u_3\,\partial u_1} &= \frac{\partial \lg h_3}{\partial u_1}\frac{\partial\theta}{\partial u_1} + \frac{\partial \lg h_1}{\partial u_3}\frac{\partial\theta}{\partial u_1},
\end{aligned}\right.$$

e questo caratterizza appunto il sistema triplo coniugato.

12. Termineremo queste considerazioni sulle trasformazioni di Ribaucour pei sistemi tripli ortogonali coll'osservare che sussiste anche qui un

teorema di permutabilità, di cui non è difficile dare la dimostrazione, colle formole effettive:

Se due sistemi tripli ortogonali (Σ_1), (Σ_2) *provengono da un medesimo* (Σ) *per trasformazioni di Ribaucour, esiste una serie* ∞^1 *di sistemi come* (Σ) (*determinabile con una quadratura*), *da ciascuno dei quali provengono egualmente* (Σ_1), (Σ_2) *per trasformazioni di Ribaucour.*

In fine osserviamo che le formole per le trasformazioni di Ribaucour dei sistemi tripli ortogonali includono, come caso particolare, quelle delle trasformazioni stesse per le superficie isolate S. Basta infatti considerare la S nel sistema triplo ortogonale determinato dalle sue superficie parallele.

Se riferiamo la S alle sue linee di curvatura (u, v), e riteniamo le consuete notazioni, si otterranno tutte le trasformate $\overline{S}$ di Ribaucour della S nel modo seguente: Si determini una terna di funzioni W_1, W_2, W_3 di u, v che soddisfino al sistema differenziale

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial W_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} W_2 \quad , \quad \frac{\partial W_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} W_1 \\ &\frac{\partial W_3}{\partial u} = \frac{\sqrt{E}}{r_2} W_1 \quad , \quad \frac{\partial W_3}{\partial v} = \frac{\sqrt{G}}{r_1} W_2 ; \end{aligned}\right.$$

determinata con una quadratura la funzione F data da

$$F = \int \left(\sqrt{E}\, W_1 du + \sqrt{G}\, W_2 dv\right) ,$$

si avrà, per le formole richieste,

$$\overline{x} = x - \frac{2F}{W_1^2 + W_2^2 + W_3^2} (W_1 X_1 + W_2 X_2 + W_3 X_3) .$$

Matematica. — *Sulla flessione delle superficie inestendibili.* Nota di Matteo Bottasso, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo [1].

Stabiliremo, per la flessione di una superficie inestendibile, alcune formule omografico-vettoriali assolute, fondamentali per tutti i problemi della applicabilità, come risulterà, oltrechè dagli esempî dei nn. 7-9, da un prossimo lavoro sul problema del rotolamento di una superficie sopra un'altra, ad essa applicabile.

Siano S, S_0 due superficie; e fra il punto generico P di S ed il punto generico P_0 di S_0 sia stabilita una corrispondenza biunivoca, per modo che P_0 è funzione di P, variabile in S, e P è funzione di P_0 variabile in S_0 [2].

Per gli elementi $\mathbf{N}$ (vettore unitario normale in P ad S), la dilatazione σ di S, e per i corrispondenti $\mathbf{N}_0$, σ_0 di S_0, valgono le note posizioni e proprietà essenziali:

$$(a)\qquad \sigma = \frac{d\mathbf{N}}{dP} \quad , \quad \sigma\mathbf{N} = 0 \quad , \quad \sigma_0 = \frac{d\mathbf{N}_0}{dP_0} \quad , \quad \sigma_0\mathbf{N}_0 = 0\,.$$

A causa della corrispondenza tra P e P_0, ad ogni spostamento $dP, \delta P, \ldots$, normale ad $\mathbf{N}$, corrisponde uno spostamento determinato dP_0, δP_0, ... normale ad $\mathbf{N}_0$. Inoltre, affinchè S de S_0 siano *applicabili*, come supporremo, nei punti corrispondenti P, P_0, occorre e basta (*Fond.*, n. 9) che per ogni spostamento dP di P si abbia:

$$(b)\qquad (dP)^2 = (dP_0)^2\,,$$

Ciò equivale a dire (*A. V.*, I, pag. 47, od *Isom.*) che esiste una *isomeria vettoriale* λ, ad invariante terzo positivo,

$$(c)\qquad \lambda\,.\,\mathrm{K}\lambda = \mathrm{K}\lambda\,.\,\lambda = 1 \quad , \quad \mathrm{I}_3\,\lambda = 1\,,$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 31 luglio 1915.

[2] Citeremo i lavori seguenti: *a*) C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*, vol. I, II (Pavia, Mattei e C., 1912-13); *b*) C. Burali-Forti, *Gradiente, rotazione e divergenza in una superficie* (Atti della R. Accademia di Torino, vol. XLV, 1909-10, pp. 388-400); *c*) Id., *Fondamenti per la geometria differenziale su di una superficie, col metodo vettoriale generale* (Rend. Circ. matem. di Palermo, tom. XXXIII, 1° sem. 1912, pp. 1-40). *d*) Id., *Isomerie vettoriali e moti geometrici* [Mem. R. Accad. di Torino (2ª), LXV, 1915, n. 14]. Nel seguito richiameremo brevemente e rispettivamente questi lavori con « *A. V.* », « *Gr.* », « *Fond.* », « *Isom.* ».

funzione di P (e, quindi, anche di P_0), tale che, per d arbitrario,

$$(d) \qquad \lambda\, dP = dP_0 \quad , \quad \lambda \mathbf{N} = \mathbf{N}_0 \quad ([1]).$$

In ciò che segue supponiamo che $\mathbf{u}$ sia un vettore funzione di P e normale ad $\mathbf{N}$ (cioè $\mathbf{u} \times \mathbf{N} = 0$), e poniamo $\mathbf{u}_0 = \lambda \mathbf{u}$. Ne segue che $\mathbf{u}_0$ è normale ad $\mathbf{N}_0$, perchè $\mathbf{u}_0 \times \mathbf{N}_0 = \lambda \mathbf{u} \times \lambda \mathbf{N} = \mathbf{u} \times \mathbf{N} = 0$.

Formule fondamentali della flessione.

1. Per l'omografia $d\lambda$, che non è un'isomeria (*Fond.*, pag. 9), si hanno le notevoli formule seguenti, che la caratterizzano completamente:

$$(1) \qquad d\lambda \,.\, \mathbf{N} = (\sigma_0 \lambda - \lambda \sigma)\, dP \ ([2]),$$

$$(2) \qquad d\lambda \,.\, \mathbf{u} = \mathrm{H}\, \{(\lambda\sigma - \sigma_0 \lambda)\, \mathbf{u} \,,\, \mathbf{N}_0\}\, dP_0 \,.$$

La (1) segue subito differenziando la 2ª delle (d), poichè, per le (a) e (d), si ha, così,

$$d\lambda \,.\, \mathbf{N} = d\mathbf{N}_0 - \lambda\, d\mathbf{N} = \sigma_0\, dP_0 - \lambda\sigma\, dP = \sigma_0 \lambda\, dP - \lambda\sigma\, dP .$$

Per la (2) si osservi che, differenziando $\lambda \delta P = \delta P_0$, si ha:

$$d\lambda \,.\, \delta P = d\,\delta P_0 - \lambda\, d\,\delta P ,$$

e quindi, sviluppando i doppî prodotti vettoriali e per le (d), (b), si ottiene:

$$\begin{aligned}(d\lambda \,.\, \delta P) \wedge (dP_0 \wedge \delta P_0) &= (d\,\delta P_0 \times \delta P_0 - \lambda\, d\delta P \times \delta P_0)\, dP_0 - \\ &\quad - (d\,\delta P_0 \times dP_0 - \lambda\, d\,\delta P \times dP_0)\, \delta P_0 \\ &= (d\,\delta P_0 \times \delta P_0 - d\,\delta P \times \delta P)\, dP_0 - (d\,\delta P_0 \times dP_0 - d\,\delta P \times dP)\, \delta P_0 \\ &= \tfrac{1}{2}\, d\left[(\delta P_0)^2 - (\delta P)^2\right] dP_0 - \tfrac{1}{2}\, \delta\left[(dP_0)^2 - (dP)^2\right] \delta P_0 = 0 ;\end{aligned}$$

il che prova che $d\lambda . \delta P$ è parallelo a $dP_0 \wedge \delta P_0$, cioè ad $\mathbf{N}$. E siccome δP è arbitrario fra i vettori $\mathbf{u}$ normali ad $\mathbf{N}$, è $d\lambda . \mathbf{u} = h \mathbf{N}_0$, da cui, moltiplicando internamente per $\mathbf{N}_0$, per il teorema di commutazione e la (1)°, si ha:

$$\begin{aligned} h = \mathbf{N}_0 \times d\lambda \,.\, \mathbf{u} = \mathbf{u} \times \mathrm{K} d\lambda \,.\, \mathbf{N}_0 = \mathbf{u} \times (\sigma \,.\, \mathrm{K}\,\lambda \,.\, \sigma_0)\, dP_0 &= \\ = dP_0 \times (\lambda\sigma - \sigma_0 \lambda)\, \mathbf{u} ,&\end{aligned}$$

che, sostituita nella precedente, dà la (2).

[1] Che equivalgono a:

$$(d)^{\circ} \qquad \mathrm{K}\lambda\, dP_0 = dP \quad , \quad \mathrm{K}\lambda \mathbf{N}_0 = \mathbf{N} .$$

[2] Ossia l'equivalente:

$$(1)^{\circ} \qquad d\mathrm{K}\lambda \,.\, \mathbf{N}_0 = (\sigma \mathrm{K}\lambda - \mathrm{K}\lambda \,.\, \sigma_0)\, dP_0 .$$

Anche nel seguito scriveremo (in generale) una sola delle formule, ottenendosi l'altra cambiando $\sigma , \lambda , \mathbf{N} , \mathbf{u} , P,$ in $\sigma_0 , \mathrm{K}\lambda , \mathbf{N}_0 , \mathbf{u}_0$.

OSSERVAZIONE. — Siccome, per le (a) e (d), $\lambda\sigma - \sigma_0\lambda$ trasforma ogni vettore $\mathbf{u}$ (normale ad N) in un vettore normale ad $\mathbf{N}_0$, le (1) e (2) esprimono che *l'omografia* $d\lambda$ *trasforma vettori* paralleli *o* normali *ad* **N** *in vettori* normali *o* paralleli *ad* $\mathbf{N}_0$.

2. Differenziando $\mathbf{u}_0 = \lambda\mathbf{u}$, e per la ($c$)°, si ha:

$$d\mathbf{u}_0 = \lambda\, d\mathbf{u} + d\lambda\,.\,\mathbf{u} = \lambda \frac{d\mathbf{u}}{dP}\, dP + d\lambda\,.\,\mathbf{u} = \lambda \frac{d\mathbf{u}}{dP}\, \mathrm{K}\lambda\, dP_0 + d\lambda\,.\,\mathbf{u}\,,$$

dalla quale, per la (2), s'ottiene immediatamente:

$$(3) \qquad \frac{d\mathbf{u}_0}{dP_0} = \lambda \frac{d\mathbf{u}}{dP}\, \mathrm{K}\lambda + \mathrm{H}\,\{(\lambda\sigma - \sigma_0\lambda)\,\mathbf{u}\,,\,\mathbf{N}_0\}\,.$$

Applicando i due membri della (3) ad $\mathbf{N}_0 = \lambda\mathbf{N}$, e moltiplicando poi vettorialmente per $\mathbf{N}_0$, si ha:

$$(4) \qquad \frac{d\mathbf{u}_0}{dP_0}\mathbf{N}_0 = \lambda \frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{N} \quad , \quad \left(\frac{d\mathbf{u}_0}{dP_0}\mathbf{N}_0\right) \wedge \mathbf{N}_0 = \lambda\left[\left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{N}\right) \wedge \mathbf{N}\right].$$

Siccome λ è invertibile, le (4) esprimono che *i vettori* $\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{N}\,,\ \frac{d\mathbf{u}_0}{dP_0}\mathbf{N}_0$ *sono entrambi o nulli, o non nulli: se il primo è parallelo ad* **N**, *il secondo è parallelo ad* $\mathbf{N}_0$, *ed inversamente.*

La *condizione di parallelismo di* $\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{N}$ con **N** (che comprende l'annullamento del primo vettore) è dunque *un invariante di flessione.*

3. Dalle (3) si ottiene pure, facilmente,

$$(5) \qquad \begin{cases} \mathrm{I}_1 \dfrac{d\mathbf{u}_0}{dP_0} = \mathrm{I}_1 \dfrac{d\mathbf{u}}{dP}\,, \\[2ex] \mathrm{I}_2 \dfrac{d\mathbf{u}_0}{dP_0} = \mathrm{I}_2 \dfrac{d\mathbf{u}}{dP} - (\lambda\sigma - \sigma_0\lambda)\,\mathbf{u} \times \lambda \dfrac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{N}\,, \\[2ex] \mathrm{I}_3 \dfrac{d\mathbf{u}_0}{dP_0} = \mathrm{I}_3 \dfrac{d\mathbf{u}}{dP} - (\lambda\sigma - \sigma_0\lambda)\,\mathbf{u} \times \lambda \left(\mathrm{C}\dfrac{d\mathbf{u}}{dP}\right)\dfrac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{N}\,. \end{cases}$$

Infatti, la prima si ha subito operando sui due membri della (3) con I_1; operando invece con $\mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3$, si ha {*A. V.*, II, pag. 136 [10], [11]; vol. I, pag. 38 [5], pag. 49 [4]; e (d)°}:

$$\mathrm{I}_2 \frac{d\mathbf{u}_0}{dP_0} = \mathrm{I}_2 \frac{d\mathbf{u}}{dP} + (\lambda\sigma - \sigma_0\lambda)\,\mathbf{u} \times \mathrm{C}\left(\lambda \frac{d\mathbf{u}}{dP} \cdot \mathrm{K}\lambda\right)\mathbf{N}_0\,,$$

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_3 \frac{d\mathbf{u}_0}{dP_0} &= \mathrm{I}_3 \frac{d\mathbf{u}}{dP} + (\lambda\sigma - \sigma_0\lambda)\,\mathbf{u} \times \mathrm{R}\left(\lambda\mathrm{K} \frac{d\mathbf{u}}{dP} \cdot \mathrm{K}\lambda\right)\mathbf{N}_0 \\ &= \mathrm{I}_3 \frac{d\mathbf{u}}{dP} + (\lambda\sigma - \sigma_0\lambda)\,\mathbf{u} \times \lambda\mathrm{RK} \frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{N}\,, \end{aligned}$$

dalle quali seguono subito {*A. V.*, I, pag. 23 [5], pag. 38 [2]; e (*d*), n. 1, osserv.} le due ultime (5).

4. Osserviamo che quando $\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{N}$ è parallelo ad $\mathbf{N}$, i vettori $\lambda \frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{N}$, $\lambda\left(C\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right)\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{N}$ risultano, per le (4), paralleli ad $\mathbf{N}_0$; perciò (n. 1, osserv.)

$$\mathrm{I}_r \frac{d\mathbf{u}_0}{dP_0} = \mathrm{I}_r \frac{d\mathbf{u}}{dP} \quad (r = 1, 2, 3), \text{ per } \frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{N} \text{ parallelo ad } \mathbf{N}. \tag{6}$$

E dalle (3)-(6) segue che $\frac{d\mathbf{u}}{dP}$ *non è un invariante di flessione, mentre lo è sempre il suo invariante primo; e lo sono anche gli altri due invarianti purchè* $\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{N}$ *sia un vettore (nullo o) parallelo ad* $\mathbf{N}$.

Notiamo pure che, operando con 2V nella (3), si ha subito (*A. V.*, I, pag. 70 [1], pag. 44 [7], pag. 49 [4]):

$$\mathrm{rot}_{P_0} \mathbf{u}_0 = \lambda\, \mathrm{rot}_P \mathbf{u} - \mathbf{N}_0 \wedge (\lambda\sigma - \sigma_0 \lambda)\, \mathbf{u}. \tag{7}$$

5. Se φ è un numero funzione di P (e, quindi, anche di P_0) variabile in S, per la (*d*) si ha (*A. V.*, I, pag. 90 [2']) $\lambda\, \mathrm{grad}_P \varphi = \mathrm{grad}_{P_0} \varphi$; e poichè (*Fond.*, n. 11) $\mathrm{Grad}_P \varphi = \mathrm{grad}_P \varphi - \mathbf{N} \times \mathrm{grad}_P \varphi . \mathbf{N}$, operando con λ nei due membri si ha:

$$\lambda\, \mathrm{Grad}_P \varphi = \mathrm{Grad}_{P_0} \varphi. \tag{8}$$

Dalla (8), e per le (*c*), (5), segue subito che i numeri

$$(\mathrm{Grad}_P \varphi)^2 \quad , \quad \mathrm{I}_1 \frac{d\, \mathrm{Grad}_P \varphi}{dP} = \mathrm{div}\, \mathrm{Grad}_P \varphi, \tag{9}$$

sono *invarianti di flessione*, qualunque sia φ; mentre l' invariante secondo e terzo di $\frac{d\, \mathrm{Grad}_P \varphi}{dP}$ lo sono soltanto sotto le condizioni indicate per le (6) (¹).

6. Siano O un punto e $\mathbf{k}$ un vettore unitario, entrambi indipendenti da P (cioè costanti). È utile considerare i numeri ben noti (*Gr.*, n. 6)

$$z = \mathbf{k} \times (P - O) \quad , \quad \varrho = \tfrac{1}{2}(P - O)^2 \quad , \quad w = (P - O) \times \mathbf{N}, \tag{10}$$

(¹) Sotto tali condizioni, $\mathrm{I}_2 \frac{d\, \mathrm{Grad}_P \varphi}{dP}$ è l'ordinario $\Delta_{22}\varphi$; inoltre gli elementi (9) corrispondono a $\Delta_1\varphi$, $\Delta_2\varphi$, tutti però calcolati rispetto alla prima forma differenziale $(dP)^2$. Dalle (9) e dall'espressione della *curvatura geodetica* in P alla linea $\varphi = \mathrm{cost}$ [*Fond.*, n. 23 (3)] risulta subito che tale curvatura *non varia con la flessione.*

di significato geometrico preciso e semplice, e dipendenti inoltre esclusivamente da $O, P, \mathbf{N}, \mathbf{k}$, e, quindi, *assoluti*.

Sottintendendo l'indice P a Grad, è già noto (*Gr.*, n. 6) che si ha:

$$(11) \quad \text{Grad}\, z = \mathbf{k} - \mathbf{k} \times \mathbf{N} . \mathbf{N} , \qquad (12) \quad \text{Grad}\, \varrho = (P - O) - w\mathbf{N} ,$$

$$(13) \qquad \frac{d \,\text{Grad}\, z}{dP} = - \mathbf{k} \times \mathbf{N} . \sigma - \mathrm{H}(\sigma \mathbf{k} , \mathbf{N}) .$$

Inoltre, poichè, differenziando la 3ª delle (10), per le (a) si ha:

$$dw = \mathbf{N} \times dP + \sigma\, dP \times (P - O) = [\mathbf{N} + \sigma(P - O)] \times dP ,$$

differenziando la (12), si ottiene immediatamente:

$$(14) \qquad \frac{d\,\text{Grad}\, \varrho}{dP} = 1 - w\sigma - \mathrm{H}\,\{\mathbf{N} + \sigma(P - O) , \mathbf{N}\} \text{ (}^1\text{)}.$$

Operando con I_1 nelle (13) e (14), si hanno subito le note formule [*Gr.*, n. 6 (13), (21)]:

$$(15) \qquad \mathrm{I}_1 \frac{d\,\text{Grad}\, z}{dP} = \text{div Grad}\, z = - \mathbf{k} \times \mathbf{N} . \mathrm{I}_1 \sigma , \quad \text{(di Beltrami)},$$

$$(16) \qquad \mathrm{I}_1 \frac{d\,\text{Grad}\, \varrho}{dP} = \text{div Grad}\, \varrho = 2 - w . \mathrm{I}_1 \sigma .$$

Se operiamo invece con I_2, si ha:

$$(17) \qquad \mathrm{I}_2 \frac{d\,\text{Grad}\, z}{dP} = [1 - (\text{Grad}\, z)^2] . \mathrm{I}_2 \sigma ,$$

$$(18) \qquad \mathrm{I}_1 \frac{d\,\text{Grad}\, \varrho}{dP} - \mathrm{I}_2 \frac{d\,\text{Grad}\, \varrho}{dP} = 1 + [(\text{Grad}\, \varrho)^2 - 2\varrho] . \mathrm{I}_2 \sigma \text{ (}^2\text{)} ,$$

la cui dimostrazione, sotto forma assoluta, è notevole per la sua semplicità. Basta infatti applicare regole più volte citate, osservando che, per le (11), (12), (10), è

$$(\text{Grad}\, z)^2 = 1 - (\mathbf{k} \times \mathbf{N})^2 \quad , \quad (\text{Grad}\, \varrho)^2 = 2\varrho + w^2 - 2w^2 = 2\varrho - w^2 ,$$

[1] Per dP sempre normale ad $\mathbf{N}$, il termine $-\mathrm{H}(\mathbf{N}, \mathbf{N})$ della (14) può essere trascurato; non però quando convenga considerare dP variabile fuori del piano tangente in P. A seconda della forma che si sceglie per la (14), i calcoli seguenti subiscono lievi modificazioni; i risultati coincidono.

[2] Le (15), (16), (17), (18) corrispondono alle ordinarie formule espresse col tachigrafo Δ:

$$\Delta_2 z = - HZ \quad , \quad \Delta_2 \varrho = 2 - wH ,$$
$$\Delta_{22} z = (1 - \Delta_1 z) K \quad , \quad \Delta_2 \varrho - \Delta_{22} \varrho = 1 + (\Delta_1 \varrho - 2\varrho) K .$$

per ottenere successivamente, dalla (14) (*A. V.*, II, pag. 136 [10]; vol. I, pag. 46 [8]; *Fond.*, n. 5),

$$I_2 \frac{d\,\mathrm{Grad}\,z}{dP} = (\mathbf{k}\times\mathbf{N})^2 . I_2\sigma + \sigma\mathbf{k}\times C(\mathbf{k}\times\mathbf{N}.\sigma)\mathbf{N}$$
$$= (\mathbf{k}\times\mathbf{N})^2 . I_2\sigma = [1-(\mathrm{Grad}\,z)^2] . I_2\sigma ;$$

$$I_2 \frac{d\,\mathrm{Grad}\,\varrho}{dP} = I_2(1-w\sigma) - [\mathbf{N}+\sigma(P-O)]\times C(1-w\sigma)\mathbf{N}$$
$$= I_2(1-w\sigma) - [\mathbf{N}+\sigma(P-O)]\times(2-wI_1\sigma)\mathbf{N}$$
$$= I_2(1-w\sigma) - 2 + wI_1\sigma =$$
$$= 3 - 2wI_1\sigma + w^2 I_2\sigma - 2 + wI_1\sigma$$
$$= (2-wI_1\sigma) + w^2 I_2\sigma - 1 =$$
$$= I_1 \frac{d\,\mathrm{Grad}\,\varrho}{dP} + [2\varrho - (\mathrm{Grad}\,\varrho)^2] . I_2\sigma - 1 .$$

Si può infine notare che dalle (13) e (14) risulta subito (*Fond.*, n. 5):

$$\frac{d\,\mathrm{Grad}\,z}{dP}\mathbf{N} = 0 \quad , \quad \frac{d\,\mathrm{Grad}\,\varrho}{dP}\mathbf{N} = 0 ; \tag{19}$$

le quali, per il n. 4, provano che *tutti e tre gli invarianti di ciascuna delle omografie* $\frac{d\,\mathrm{Grad}\,z}{dP}$, $\frac{d\,\mathrm{Grad}\,\varrho}{dP}$ *non variano per la flessione della superficie.*

Alcune applicazioni.

7. Nelle semplici formule assolute precedenti sono del tutto scomparse le cinque coordinate ordinarie (x, y, z, u, v), i sei coefficienti (E, F, G, D, D', D'') delle due forme differenziali quadratiche fondamentali $(dP)^2$, $-dP\times d\mathbf{N}$, i simboli di Christoffel, le derivate covarianti, i tachigrafi Δ; sono cioè eliminati gli elementi algebrici, inevitabili intermediari fra le coordinate (non necessarie) e gli enti geometrici, per lasciare il posto a questi stessi enti e ad operatori pure geometrici, quali sono le omografie vettoriali. Si comprende facilmente che, facendo uso delle formule assolute ora esposte, vengono eliminati i laboriosi e non brevi calcoli che occorrono ordinariamente nelle questioni relative alla flessione [1]. Ma gioverà portarne un esempio.

[1] Si ha così la riprova della potenza di questi metodi assoluti, che non solo hanno apportato, in breve tempo ed in tanti campi, grandi semplificazioni nella deduzione dei risultati classici, o dei risultati nuovi recenti, ma si sono pure dimostrati strumenti efficacissimi per completare tali risultati e stabilirne dei nuovi. Cfr., ad es., Burali-Forti per la *Geometria differenziale*, Marcolongo per l'*Elettrodinamica*, Burgatti per l'*Elasticità*,

Esaminiamo il primo problema di Calò, identico al problema A) di Bianchi [1], indicando con M_0 un punto fisso e con ϱ il semiquadrato della distanza di P_0 da M_0.

Il problema di Calò è individuato dalle condizioni:

$$(\alpha) \qquad (dP)^2 = (dP_0)^2 \quad , \quad [\mathbf{k} \times (P - O)]^2 = (P_0 - M_0)^2 ;$$

e per il problema A) di Bianchi, oltre alle (α), si ha una *terza* condizione che esprime come la normale PM, condotta da P al piano $O|\mathbf{k}$, sia trasportata, con la flessione di S in S_0, nel segmento P_0M_0; cioè $\mathbf{k}$ abbia, rispetto al piano tangente in P, eguale orientamento di $P_0 - M_0$ rispetto al piano tangente in P_0. Ora, che *questa terza condizione sia conseguenza della* (α) *si dimostra subito*, senza risolvere i due problemi e constatare l'identità dei risultati (Bianchi, loc. cit., § 1-11).

Differenziando la seconda delle (α) e dividendo per z (n. 6), si ha:

$$\mathbf{k} \times dP = \frac{P_0 - M_0}{z} \times dP_0 ,$$

la quale, per essere $\mathbf{k}$ e $(P_0 - M_0)/z$ vettori unitarî, e dP, dP_0 vettori di egual modulo [per la 1ª delle (α)], esprime appunto la terza condizione indicata.

8. Si trova pure facilmente l'*equazione differenziale di* S, nell'ipotesi

$$(\beta) \qquad 2\varrho_0 = z^2 .$$

Scritta perciò la (18) per P_0, ϱ_0; tenuto conto delle (19), (6), (8); ponendo $z^2/2$ al posto di ϱ_0 e P al posto di P_0, ed eliminando $\mathrm{I}_2\sigma = \mathrm{I}_2\sigma_0$ (teorema di Gauss) con la (17), si ha:

$$(\mathrm{I}) \qquad \mathrm{I}_1 \frac{d(z \,\mathrm{Grad}\, z)}{dP} - \mathrm{I}_2 \frac{d(z \,\mathrm{Grad}\, z)}{dP} = 1 - z^2 \mathrm{I}_2 \frac{d \,\mathrm{Grad}\, z}{dP} ,$$

che è una prima forma assoluta dell'equazione differenziale (di 2° ordine) di S.

Boggio per l'*Idrodinamica*, Bottasso per l'*Astatica*, ecc. E ne risulta ancora quanto sia vacua l'opinione di certo autore, che rivolgendosi di recente ai giovani analisti vettoriali italiani, vuol ridurre il calcolo *omografico assoluto* e le DERIVATE RISPETTO AD UN PUNTO (eterno nodo della questione!) alle funzioni lineari di Hamilton, alle matrici cubiche di Cayley e Sylvester, alle dyadics (e dyads) di Gibbs.

[1] B. Calò, *Risoluzione di alcuni problemi sull'applicabilità delle superficie* [Ann. di matem. (3ª), IV, 1900, pp. 124-130]; L. Bianchi, *Alcune ricerche sul rotolamento di superficie applicabili* (Rendic. Circ. matem. di Palermo, tomo XXXVIII, 2° sem. 1914, pp. 1-42).

Osservando che [*A. V.*, I, pag. 77 [4]]

$$\frac{d(z \operatorname{Grad} z)}{dP} = z \frac{d \operatorname{Grad} z}{dP} + \mathrm{H}(\operatorname{Grad} z , \operatorname{Grad} z),$$

e calcolando i due invarianti I_1, I_2. la (I) diventa:

$$\text{(II)} \qquad z \operatorname{div} \operatorname{Grad} z + (\operatorname{Grad} z)^2 - z \operatorname{Grad} z \times \mathrm{C} \frac{d \operatorname{Grad} z}{dP} \operatorname{Grad} z = 1,$$

che è un'altra forma dell'equazione differenziale di S.

Ponendo infine, al posto di Grad z, il valore (11), dopo facili riduzioni si ha:

$$\text{(III)} \qquad \mathrm{I}_1 \sigma . (\mathbf{k} \times \mathbf{N})^2 + \mathbf{k} \times \sigma \mathbf{k} + \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{N}}{z} = 0,$$

che è appunto la forma assoluta della (22) di Bianchi (loc. cit., pag. 14), la quale, ridotta direttamente, dà

$$-\mathrm{I}_1 \sigma . (\mathbf{k} \wedge \mathbf{N})^2 + \mathbf{k} \times \sigma \mathbf{k} + \mathrm{I}_1 \sigma + \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{N}}{z} = 0,$$

riducibile subito alla (III).

Alla (III) si dà pure facilmente la forma

$$\text{(IV)} \qquad \mathrm{I}_1 \sigma - \operatorname{Grad} z \times \mathrm{C} \sigma \operatorname{Grad} z + \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{N}}{z} = 0,$$

notevole perchè riduce l'equazione differenziale di S alla forma semplicissima

$$\mathrm{I}_1 \sigma + \mathbf{k} \times \mathbf{N}/z = 0,$$

quando si ponga come condizione che le linee di livello di S ($z = \text{cost}$) debbano essere assintotiche di S [cfr. *Fond.*, pag. 26 (3)]. Resterà da discutere quando tal condizione è soddisfatta.

9. In modo analogo si trova l'equazione differenziale di S_0, dopo aver provato che

$$\text{(20)} \qquad \mathrm{I}_1 \sigma_0 = \mathrm{I}_1 \sigma + \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{N}}{z} + \frac{1}{z \mathbf{k} \times \mathbf{N}},$$

formula che si ottiene facilmente senza bisogno di conoscere l'equazione differenziale di S.

Infatti, osservando che $w_0 = (P_0 - M_0) \times \mathbf{N}_0 = z\lambda \mathbf{k} \times \lambda \mathbf{N} = z \mathbf{k} \times \mathbf{N}$, scritta la (16) per ϱ_0, P_0, e fatto il cambiamento precedente, si ha:

$$\mathrm{I}_1 \frac{d(z \operatorname{Grad} z)}{dP} = 2 - z \mathbf{k} \times \mathbf{N} . \mathrm{I}_1 \sigma_0,$$

e quindi, per formule precedenti,

$$z \mathbf{k} \times \mathbf{N} . \mathrm{I}_1 \sigma_0 = 2 + z \mathbf{k} \times \mathbf{N} . \mathrm{I}_1 \sigma - 1 + (\mathbf{k} \times \mathbf{N})^2,$$

da cui segue subito la (20).

Anche per gli altri problemi di Calò si può subito dimostrare l'identità con i corrispondenti di Bianchi, e si ottengono facilmente le equazioni differenziali di S ed S_0; e non è dubbio che, sviluppando i calcoli, debbano presentarsi, in modo semplice, nuove proprietà. Inoltre, se, rotolando S_0 su S, ad S_0 si collega rigidamente una retta r, le proprietà della congruenza descritta da r devono potersi ottenere, con calcoli semplicissimi, tenendo conto di quanto ha fatto il compianto M. Pieri in uno dei suoi ultimi interessanti lavori [1].

Matematica. — *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e, in particolare, fra i punti di una curva di genere due.* Nota di Carlo Rosati, presentata dal Socio E. Bertini [2].

Nella classica rappresentazione di Hurwitz di una corrispondenza algebrica fra i punti di una curva C di genere p, ad ogni corrispondenza T viene associato un gruppo di $4p^2$ numeri interi $h_{ik}\, g_{ik}\, \mathrm{H}_{ik}\, \mathrm{G}_{ik}$ $(i\,, k = 1\,, 2 \ldots p)$, e le condizioni per l'esistenza di T vengono espresse da p^2 relazioni quadratiche fra i periodi a_{ik} dei p integrali normali di prima specie della curva; i coefficienti di queste, che diremo *relazioni di Hurwitz per la* T, sono poi i suddetti interi (*caratteristici* di T).

In un lavoro di prossima pubblicazione ho dato una semplice interpretazione geometrica delle p^2 relazioni di Hurwitz e ne ho tratto alcuni risultati relativi ad una curva C_p di genere p e, in particolare, ad una curva di genere due, dei quali credo opportuno esporre qui l'enunciato.

1. Ad ogni corrispondenza T, cui spetti il determinante $\begin{vmatrix} h_{ik} & g_{ik} \\ \mathrm{H}_{ik} & \mathrm{G}_{ik} \end{vmatrix}$, si associ l'omografia *razionale* Ω di un S_{2p-1} definita dalle formule

$$\begin{aligned} \varrho x'_i &= h_{i1}\, x_1 + \cdots + h_{ip}\, x_p + \mathrm{H}_{i1}\, x_{p+1} + \cdots + \mathrm{H}_{ip}\, x_{2p} \\ \varrho x'_{p+i} &= g_{i1}\, x_1 + \cdots + g_{ip}\, x_p + \mathrm{G}_{i1}\, x_{p+1} + \cdots + \mathrm{G}_{ip}\, x_{2p} \quad (i = 1\,, 2\,, \ldots p)\,, \end{aligned}$$

e si consideri nello stesso S_{2p-1} l'$\mathrm{S}_{p-1} = \alpha$ intersezione dei p iperpiani che hanno per coordinate i periodi dei p integrali normali di 1ª specie della curva.

Le p^2 relazioni di Hurwitz esprimono allora che l'omografia razionale Ω trasforma in sè lo spazio α.

2. Diciamo *speciale* una corrispondenza che ha per immagine un'omografia singolare. Tali corrispondenze esistono soltanto nel caso in cui la curva

[1] M. Pieri, *Sulla rappresentazione vettoriale delle congruenze di raggi* (Rendic. Circ. matem. di Palermo, tomo XXXIII, 1° sem. 1912, pp. 217-246).

[2] Pervenuta all'Accademia il 2 agosto 1915.

possegga sistemi regolari di integrali di 1ª specie riducibili. Si dimostra infatti che:

Il determinante $\begin{vmatrix} h & g \\ H & G \end{vmatrix}$ *di una corrispondenza* T *ha sempre per caratteristica un numero pari* $2q$. *Quando è* $0 < q < p$, *alla* T *vengono associati due sistemi regolari* ∞^{p-q-1} ∞^{q-1}, *tra loro indipendenti, di integrali di 1ª specie riducibili.*

Gli integrali del primo danno somma costante nei punti del gruppo omologo per la T *di un punto* x, *variabile sulla curva; il secondo è generato dalla somma dei valori che un integrale variabile della curva ha nei punti del gruppo suddetto.*

Inversamente:

Dati due sistemi regolari riducibili complementari, esistono sulla curva corrispondenze speciali, alle quali i sistemi medesimi sono associati.

Il numero delle corrispondenze speciali, di specie p-q, *indipendenti, cui sono associati due dati sistemi riducibili complementari* ∞^{p-q-1} ∞^{q-1} *non può oltrepassare* $2q^2$.

3. È noto (¹) che il numero base μ della totalità delle corrispondenze di C è uguale alla somma dei numeri μ_1 e μ_2 delle corrispondenze indipendenti che sono rispettivamente *equivalenti* o *residue* delle loro inverse. Diremo *simmetriche* quelle della prima specie, *emisimmetriche* quelle della seconda.

Per caratterizzare le omografie immagini delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche, si consideri in S_{2p-1} il sistema nullo Δ definito dalle formule

$$\sigma\xi_i = -x_{p+i} \qquad \sigma\xi_{p+i} = x_i \qquad (i = 1, 2, \dots p),$$

e si moltiplichi per esso l'omografia Ω immagine di T: nasce una reciprocità razionale $R = \Omega\Delta$, trasformante in sè lo spazio α, che diremo pure immagine di T. Orbene:

Le reciprocità immagini delle corrispondenze simmetriche sono sistemi nulli, quelle immagini delle emissimmetriche sono polarità.

Dal che segue facilmente:

I numeri base μ_1 *e* μ_2 *delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche non possono oltrepassare* p^2.

4. I sistemi regolari riducibili associati ad una corrispondenza speciale simm.ª o emisimm.ª sono tali che l'uno di essi resta dall'altro individuato. Sicchè può dirsi che una corrispondenza simm.ª od emisimm.ª speciale di specie p-q *appartiene* ad un sistema regolare riducibile ∞^{q-1}. *Dato, inver-*

(¹) Rosati, *Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica.* Questi Rendiconti, vol. XXII (1913).

samente, un sistema regolare riducibile, ad esso appartengono sempre corrispondenze speciali simmetriche. In ogni caso si ha:

I numeri delle corrispondenze speciali simm.e ed emisimm.e indipendenti che appartengono ad un dato sistema regolare riducibile ∞^{q-1} *non possono oltrepassare* q^2.

5. Per le curve C di genere due, ricorrendo alla rappresentazione di Klein dello spazio rigato sopra una quadrica Φ di S_5, e utilizzando alcune proprietà degli spazî fondamentali di una omografia involutoria razionale, si giunge alla determinazione completa dei numeri $\mu_1 \mu_2$. Chiamando, per brevità, S_{k-1} *di corrispondenze* la totalità delle corrispondenze che dipendono da k corrispondenze indipendenti, si ha:

I numeri base μ_1 *e* μ_2 *delle corrispondenze simm.e ed emisimm.e sopra una curva* C *di genere due possono acquistare i valori seguenti*:

1°) $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$. *La base è costituita dall'* S_0 *delle corrispondenze a valenza.*

2°) $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 0$. *La base è costituita da un'* S_1 *di corrispondenze simm.e (ogni corrispondenza sulla curva è allora equivalente alla inversa). L'* S_1, *o non contiene corrispondenze speciali, ovvero contiene due* S_0 *di corrispondenze speciali. Quest'ultimo caso avviene quando la curva possiede due integrali ellittici, nessuno dei quali a moltiplicazione complessa.*

3°) $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$. *La base è costituita da un'* S_1 *di corrispondenze simm.e, contenente due* S_0 *di corrispondenze speciali, e da un* S_0 *di corrispondenze speciali emisimm.e. La curva possiede, in questo caso, due integrali ellittici, dei quali uno è a moltiplicazione complessa.*

4°) $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 2$. *La base è costituita da un'* S_1 *di corrispondenze simm.e e da un'* S_1 *di emisimm.e. I due* S_1, *o non contengono corrispondenze speciali, ovvero contengono ciascuno due* S_0 *di corrispondenze speciali. Quest'ultimo caso avviene quando la curva possiede due integrali ellittici, entrambi a mottiplicazione complessa.*

5°) $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 1$. *La base è costituita da un'* S_2 *di corrispondenze simm.e e da un'* S_0 *di emisimm.e non speciali. L'* S_2 *delle corrispondenze simm.e, o non contiene corrispondenze speciali, ovvero contiene infiniti* S_0 *di corrispondenze speciali. Quest'ultimo caso avviene, se la curvapos siede infiniti integrali ellittici, nessuno dei quali a moltiplicazione complessa.*

6°) $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 4$. *La base è costituita da un'* S_3 *di corrispondenze simm.e e da un'* S_3 *di emisimm.e. Tanto l'uno che l'altro dei due* S_3 *contengono infiniti* S_0 *di eorrispondenze speciali, e la curva possiede infiniti integrali ellittici tutti a moltiplicazione complessa.*

Osservazione. Poichè dall'ipotesi $\mu_1 = 1$ discende $\mu_2 = 0$, abbiamo il risultato:

Sopra una curva di genere due, priva di corrispondenze singolari simmetriche, ogni corrispondenza è dotata di valenza.

Matematica. — *Sulla risolubilità dell'equazione integrale di 1ª specie.* Nota di Attilio Vergerio, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

1. Mi ero proposto la ricerca di una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di soluzioni nell'equazione integrale di 1ª specie, che fosse indipendente dalla conoscenza degli autovalori e delle corrispondenti autofunzioni del nucleo dell'equazione data. Tale ricerca però non mi era riuscita se non in due casi particolari, i quali si trovano esposti in due Note pubblicate in questi Rendiconti [2].

Qui ci proponiamo di esporre una nuova condizione più larga, che abbraccia le precedenti come casi particolari; la quale, se da un lato non permette di affermare che la ricerca propostaci sia completamente esaurita, rappresenta però, dall'altro, un passo in avanti.

Per brevità, indicheremo con K e K_n rispettivamente i nuclei $K(st)$ e

$$K_n(st) = \int_a^b K_{n-j}(sr)\, K_j(rt)\, dr \qquad (j = 1, 2, 3, \dots n-1)$$

nei casi in cui tale notazione non può generare equivoci.

2. Abbiasi l'equazione di 1ª specie, a nucleo qualunque purchè integrabile e finito,

$$g(s) = \int_a^b K(st)\, h(t)\, dt\,. \tag{1}$$

Consideriamo l'identità, scritta con notazione abbreviata,

$$K_3(K_2^2 - K\,K_3) = K_2(K_2\,K_3 - K\,K_4) + K(K_2\,K_4 - K_3^2)\,; \tag{2}$$

e supponiamo che la differenza

$$K_2^2 - K\,K_3 \tag{3}$$

non sia identicamente nulla; cioè non si annulli che per un numero finito di coppie di valori per s e t.

[1] Pervenuta all'Accademia il 6 agosto 1915.

[2] Vergerio, *Sull'equazione integrale di 1ª specie*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, seduta dell'8 novembre 1914; *Una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di soluzioni nell'equazione integrale di 1ª specie*, ibid., seduta del 6 giugno 1915.

Potremo allora asserire che l' uguaglianza

$$K_3 = \frac{K_2 K_3 - K K_4}{K_2^2 - K K_3} K_2 + \frac{K_2 K_4 - K_3^2}{K_2^2 - K K_3} K, \tag{4}$$

ottenuta dividendo i membri della (2) per la differenza (3), sussisterà per tutte le coppie di valori delle variabili s e t, eccettuate tutt'al più quelle coppie eventuali che annullano il denominatore comune dei due rapporti.

3. Ciò premesso, suppongasi che i due rapporti si riducano a due costanti (finite), che indicheremo rispettivamente con α e β; e che queste siano ambedue diverse da zero [1].

La (4) allora si può mettere sotto la forma:

$$K_3(st) = \alpha K_2(st) + \beta K(st), \tag{5}$$

da cui si ha

$$K(st) = \frac{1}{\beta} K_3(st) - \frac{\alpha}{\beta} K_2(st).$$

Supponiamo che la (1) ammetta la soluzione $h(t)$. Allora, moltiplicando i membri della precedente uguaglianza per $h(t)\,dt$ ed integrando, dovrà necessariamente aversi

$$g(s) = \frac{1}{\beta} g_2(s) - \frac{\alpha}{\beta} g_1(s). \tag{6}$$

La (6) è quindi condizione *necessaria*; essa è poi anche *sufficiente*. Infatti alla (6) può darsi la forma

$$g(s) = \int_a^b K(st)\left[\frac{1}{\beta} g_1(t) - \frac{\alpha}{\beta} g(t)\right] dt,$$

dalla quale si deduce che la (1) ammette la soluzione

$$h(t) = \frac{1}{\beta} g_1(t) - \frac{\alpha}{\beta} g(t). \tag{7}$$

Possiamo quindi affermare che, *se i rapporti*

$$\frac{K_2 K_3 - K K_4}{K_2^2 - K K_3} \quad ; \quad \frac{K_2 K_4 - K_3^2}{K_2^2 - K K_3}$$

si riducono a due costanti finite e non nulle [2] α *e* β, *condizione necessaria e sufficiente affinchè la* (1) *ammetta soluzione è che la* $g(s)$ *si*

[1] Affinchè nessuna delle costanti α, β sia nulla, è *necessario* che le costanti γ_n, relative a $K(st)$, non siano tutte eguali tra loro.

[2] Se una delle due costanti α e β è nulla, le costanti γ_n sono tutte eguali tra loro; ricadiamo perciò nel caso considerato nella seconda delle Note citate.

possa ammettere sotto la forma (6); *in tale caso, la* (7) *sarà una soluzione dell'equazione data.*

4. Il teorema continua evidentemente a sussistere anche se α e β sono funzioni della sola s. Esso poi si estende facilmente al caso in cui il nucleo $K(st)$ sia esprimibile linearmente mediante un numero finito p di nuclei iterati: si possa cioè mettere sotto la forma:

$$K = a_2 K_2 + a_3 K_3 + \cdots + a_p K_p , \tag{8}$$

dove le a sono delle costanti, o tutt'al più delle funzioni della sola s.

Il teorema perciò è senz'altro estensibile ai nuclei elementari

$$\sum_{r=1}^{n} \varphi_r(s)\, \psi_r(t)$$

pei quali, com'è noto [1]. esiste sempre un numero p tale, che ogni nucleo iterato d'ordine $\geqq p$, è una combinazione lineare a coefficienti costanti, dei nuclei $K_2, K_3, \ldots K_{p-1}$ e può porsi quindi sotto la forma (8).

5. È degno di nota il fatto che, se $K(st)$ soddisfa alle condizioni per esso poste al n. 3, l'equazione

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(st)\, \varphi(t)\, dt$$

non può sussistere che per tutt'al più due soli valori di λ.

Moltiplicando invero ambo i membri della (5) per $\varphi(t)\,dt$ ed integrando, si ha:

$$\frac{\varphi(s)}{\lambda^3} = \alpha \frac{\varphi(s)}{\lambda^2} + \beta \frac{\varphi(s)}{\lambda} ,$$

cioè

$$\beta\lambda^2 + \alpha\lambda - 1 = 0 ;$$

λ quindi non può assumere più di due valori distinti.

Nel caso che $K(st)$ sia un nucleo simmetrico, uno di questi due valori dovrà necessariamente essere l'uno dei due seguenti: $\frac{+1}{\sqrt{\gamma}}, \frac{-1}{\sqrt{\gamma}}$; essendo,

[1] L. Sinigallia, *Sulle funzioni permutabili di seconda specie,* Rend. della R. Acc. dei Lincei, seduta del 15 dicembre 1912.

com'è noto, $\left|\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right|$ il minimo modulo degli autovalori di un nucleo simmetrico [1].

6. Una proprietà, del tutto analoga alla precedente, è posseduta dai nuclei simmetrici le cui costanti γ_n siano tutte eguali tra loro.

Infatti, se λ è un autovalore e $\varphi(s)$ una corrispondente autofunzione di un tale nucleo, sarà

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b \mathrm{K}(st)\,\varphi(t)\,dt\,; \tag{9}$$

dalla quale, mediante moltiplicazione per $\mathrm{K}(sr)\,dr$ ed integrazione, dopo aver cambiato in essa s in r, si ottiene

$$\varphi(s) = \lambda^2 \int_a^b \mathrm{K}_2(st)\,\varphi(t)\,dt$$

$$\varphi(s) = \lambda^3 \int_a^b \mathrm{K}_3(st)\,\varphi(t)\,dt\,.$$

E poichè $\frac{\mathrm{K}_3(st)}{\gamma} = \mathrm{K}(st)$ [2], l'ultima uguaglianza potrà scriversi:

$$\varphi(s) = \lambda^3\gamma \int_a^b \mathrm{K}(st)\,\varphi(t)\,;$$

la quale, confrontata colla (9), ci dà

$$\lambda^2\gamma = 1\,.$$

Gli autovalori di $\mathrm{K}(st)$, dovendo soddisfare a la precedente uguaglianza, non potranno essere dunque diversi da $\pm\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$.

7. Vogliamo da ultimo mostrare come, nel caso di $\mathrm{K}(st)$ simmetrico, si possa con facilità conoscere il valore della costante $\gamma = \lim_{n=\infty} \gamma_n$, la cui ricerca riesce molto lunga e laboriosa, anche nei casi [come il seguente: $\mathrm{K}(st) = s + t$] in cui il nucleo ha forma semplicissima, quando ci si voglia servire della conoscenza dei valori delle γ_n.

[1] Si sa, infatti, che

$$\lambda^2 = \lim_{n=\infty} \frac{\mathrm{U}_{2n}}{\mathrm{U}_{2n+2}} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\gamma_n} = \frac{1}{\gamma}$$

è il minimo autovalore del nucleo $\mathrm{K}_2(st)$ e che quindi $\left|\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right|$ sarà quello di $\mathrm{K}(st)$, in valore assoluto. Cfr. Vivanti, *Sui nuclei simmetrizzabili*, Rend. del R. Ist. lomb. di scienze e lettere, vol. XLVIII, fasc. 2-3, nota a pp. 121-122.

[2] Cfr. la seconda delle Note citate.

A tale scopo, ci proponiamo di mostrare la relazione molto semplice, che lega tra loro le costanti α, β e γ.

Riprendiamo la relazione

$$K_3(st) = \alpha K_2(st) + \beta K(st);$$

e, dopo aver in essa mutato s in r, moltiplichiamone i membri per $K_{n-1}(sr)$ ed integriamo da a a b. Otterremo

$$K_{n-2}(st) = \alpha K_{n-1}(st) + \beta K_n(st),$$

ed anche

$$K_{n+2}(st) - \beta K_n(st) = \alpha K_{n+1}(st).$$

Si elevi al quadrato e si eseguisca la doppia integrazione, rispetto alle due variabili s e t.

Ricordando che

$$\int_a^b \int_a^b K_{n+2}(st) K_n(st)\, ds\, dt = \int_a^b \int_a^b K_n(st)\, ds\, dt \int_a^b K_{n+1}(sr) K(rt)\, dr =$$

$$= \int_a^b \int_a^b K_{n+1}(sr)\, ds\, dr \int_a^b K_n(st) K(rt)\, dt =$$

$$= \int_a^b \int_a^b [K_{n+1}(sr)]^2 ds\, dr = U_{2n+2},$$

avremo

$$U_{2n+4} - 2\beta U_{2n+2} + \beta^2 U_{2n} = \alpha^2 U_{2n+2}.$$

Ed ancora, dividendo ambo i membri per U_{2n} e tenendo presente l'uguaglianza $\frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} = \gamma_n$,

$$\gamma_n \gamma_{n+1} - 2\beta \gamma_n + \beta^2 = \alpha^2 \gamma_n.$$

Infine passando al limite per $n = \infty$, si ha

$$\gamma^2 - (\alpha^2 + 2\beta)\gamma + \beta^2 = 0,$$

che è la relazione cercata; dalla quale si ricava

$$\gamma = \frac{\alpha + 2\beta \pm \alpha \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2},$$

dove bisognerà naturalmente prendere quello dei due segni $\pm$ che rende positivo γ.

Nel caso, poi, che si avessero due valori positivi, per discernere quale dei due dev'essere scelto basta ricordare che, nel nostro caso, deve sussistere la relazione

$$U_2 > \gamma > \gamma_1.$$

Infatti dovendo, in ogni caso, aversi (1)

$$\lim_{n=\infty} \frac{U_{2n}}{\gamma^n} = U \geq 1 \quad ; \quad \frac{U_{2n+2}}{\gamma^{n+1}} \leq \frac{U_{2n}}{\gamma^n} ,$$

dovrà essere

$$U_2 \geq \gamma .$$

Il segno di uguaglianza però, nel nostro caso, dev'essere escluso.

Invero, se fosse $U_2 = \gamma$, dovrebbe essere, qualunque sia n, $U_{2n} = \gamma^n$; e, per conseguenza, le costanti $\gamma_n = \frac{U_{2n+2}}{U_{2n}}$ dovrebbero essere tutte eguali tra loro. Ora ciò non è possibile, perchè allora sarebbe

$$\frac{K_3(st)}{\gamma} = K(st) ;$$

cioè $\alpha = 0$, contro il supposto.

Analogamente, dovendo essere $\gamma_{n-1} \leq \gamma_n$, sarà necessariamente $\gamma_1 < \gamma$.

Fisica. — *Dispositivo semplice per la radiostereoscopia* (2). Nota di G. C. Trabacchi, presentata dal Socio V. Volterra (3).

È noto che, fra i varî metodi proposti per la ricerca di elementi estranei nell'interno del corpo umano per mezzo dei raggi X, è di indiscutibile efficacia la *stereoradiografia*, ma le operazioni necessarie per ottenerla, non sono così rapide come servirebbe in certi casi urgenti per cui sarebbe utile potervi supplire qualche volta con la *stereoradioscopia*.

Gli apparecchi complicati e costosi finora necessarî per ottenere la stereoscopia allo schermo fluorescente ne hanno talmente impedito la diffusione che, a quanto mi risulta, pochi dei nostri radiologi ne conoscono l'esistenza e forse nessuno l'ha veduta realizzata.

Avendo ottenuto ottimi risultati con un dispositivo molto semplice ne propongo l'uso, ritenendo che con esso potrà essere messo a portata di tutti un mezzo di studio assai utile.

Si immaginino (fig. 1) due rocchetti poco differenti i cui primarî R_1 ed R_2 siano disposti in parallelo e alimentati da corrente alternata in X, Y. In ciascuno dei due circuiti sia inserito un interruttore sincrono elettrolitico (4),

(1) Schmidt, *Entwicklung willkürlicher Functionen nach Systemen vorgerschriebener*. Inaugural-Dissertation, Göttingen 1905, § 11.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio fisico dell'Istituto De Merode in Roma.

(3) Pervenuta all'Accademia il 14 agosto 1915.

(4) Ved. Rend. Accad. Lincei, 2° sem. (1915).

in modo però che, mentre, percorrendo uno dei circuiti, si passa, nell'interruttore I_1, dalla punta alla lamina, nell'altro I_2 si passa dalla lamina alla punta.

Collegando i due secondarî S_1 ed S_2 a due tubi T_1 e T_2 capaci di produrre i raggi X, ne risulterà che le emissioni di raggi non saranno contemporanee, perchè, mentre un tubo utilizza una metà di ciascun periodo, il secondo utilizza l'altra.

Esaminando infatti la luce destata su uno schermo fluorescente dai due tubi, si riscontra, con un apparecchio stroboscopico, che i tubi brillano alternativamente e ad intervalli uguali a un semiperiodo.

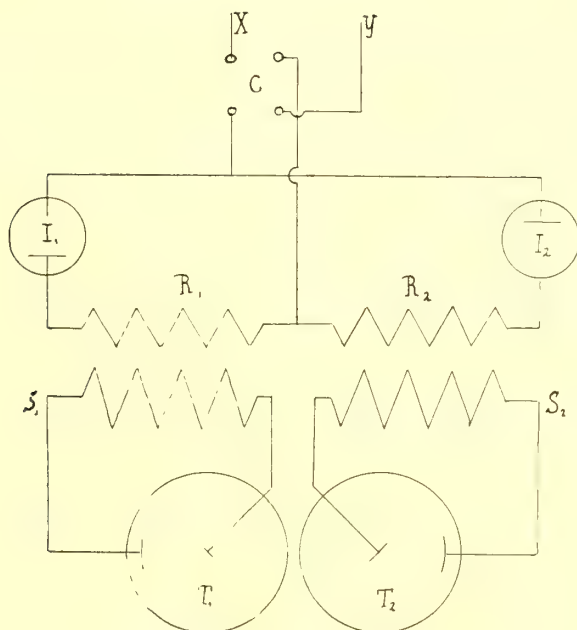



Fig. 1.

Si consideri ora un disco (fig. 2), sul quale siano praticati lungo una circonferenza quattro fori A_1, A_2, A_3, A_4, ed altri quattro (m_1, m_2, m_3, m_4) spostati rispetto ai primi come mostra la figura, lungo un'altra circonferenza concentrica alla prima e il cui raggio differisca dal primo della distanza media degli occhi (63 $^{m}/_{m}$).

Suppôniamo di far ruotare tale disco in modo che i fori passino successivamente avanti agli occhi di un osservatore (gli A..., ad es., avanti al sinistro; gli *m*... avanti al destro). Ne consegue che i due occhi vedranno alternativamente: e se il disco è mosso da un motore sincrono con la corrente che passa nei rocchetti e munito di otto poli, la visione dei due occhi avverrà ad intervalli di un semiperiodo.

Se dei due tubi precedentemente descritti noi ci serviamo per proiettare da due convenienti punti sullo schermo fluorescente l'ombra di un corpo

e guardiamo la duplice immagine attraverso il disco forato ruotante, abbiamo la completa visione in rilievo con tutti i ben noti vantaggi.

Le ombre, infatti, di elementi appartenenti a piani diversi non si confondono sullo schermo, ma appariscono separate nello spazio, permettendo di vedere dei particolari che nella radioscopia ordinaria sfuggono facilmente.

Il commutatore C permette di scambiare la fase dei due tubi in modo che mentre ad una posizione corrisponde la visione anteriore del soggetto studiato, all'altra corrisponde la visione posteriore: così l'osservatore senza muoversi e senza muovere il soggetto ha la possibilità di vedere da due

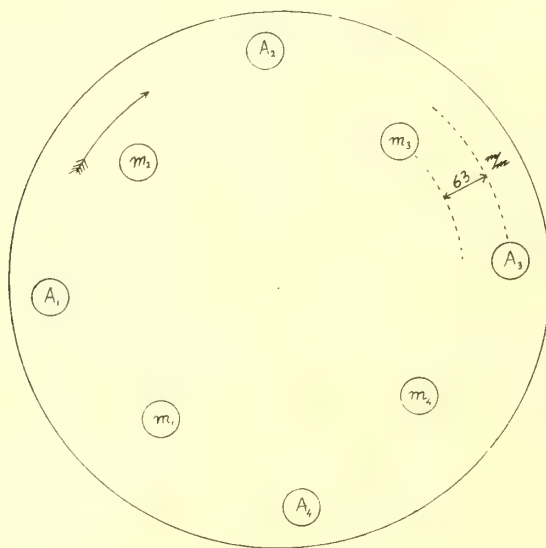



Fig. 2.

punti opposti; poichè il cambiamento può farsi rapidamente e con grande facilità se ne può trarre notevole vantaggio nel giudicare la posizione di un corpo estraneo in casi difficili.

È ovvio che, usando interruttori meccanici che potrebbero essere messi in funzione dallo stesso motore che porta il disco forato, si potrebbe ottenere la stessa visione stereoscopica, sia con la corrente alternata, sia con la continua; ma l'uso dell'interruttore elettrolitico e della corrente alternata rende il sistema così semplice che può essere con grande facilità realizzato con gli apparecchi esistenti in qualunque gabinetto o laboratorio di radiologia.

È chiaro che, se i poli del motore non sono otto come in quello da me usato, i fori non saranno quattro per serie, ma tanti quante sono le coppie di poli.

Siccome il motore deve portare il solo carico del disco forato, esso può essere piccolissimo in modo che motore e disco possono essere facilmente

montati su qualunque criptoscopio portatile senza aumentarne troppo il peso e diminuirne la comodità.

Se si temesse che un motore troppo piccolo non fosse capace di conservare il sincronismo si potrebbe collegare un motore di dimensioni maggiori al disco ruotante mediante una trasmissione meccanica il che alleggerirebbe anche notevolmente il criptoscopio.

Quei radiologi che volessero usare il dispositivo descritto potrebbero procurarsi due rocchetti uguali, che potrebbero poi essere accoppiati (coi primarî e i secondarî in serie o in parallelo secondo la necessità) per radiografia e terapia. Uno separato servirebbe per la radioscopia semplice.

Fisica terrestre. — *Di una rara osservazione sismica.* Nota di V. Monti, presentata dal Socio A. Battelli [1].

Sono rarissimi i casi in cui, in occasione di terremoto, si è potuto nettamente accertare un transitorio e rapido mutamento nella veduta di cui normalmente si gode da qualche determinata località.

Debbo al cortese interessamento dell'avv. Cancani-Montani la conoscenza di un caso del genere, perfettamente documentato, avvenuto a Roma or fa qualche anno. Se soltanto ora mi accade di pubblicarne la notizia, ciò si deve ad un prolungato smarrimento delle carte ove stavano le informazioni avute in proposito.

Il 10 aprile 1911, ad ore 10 $^3/_4$ circa, fu avvertita a Roma una non forte scossa, d'origine laziale. Al momento del terremoto due operai, certi Ferrazza Domenico da Cappadocia, maestro muratore, e Lombardi Giuseppe da Sora, manovale, trovavansi sul tetto del palazzo Borghese, sulla piazza omonima, occupati nel lavoro di certo ristauro, vicini l'uno all'altro e rivolti verso la parte di monte Mario. Dal punto ove essi si trovavano non si scorgeva che una piccola parte del quartiere dei *Prati di Castello*, rimanendone la parte maggiore celata dietro interposte costruzioni.

Pochi minuti dopo avvenuta la scossa, riferì il Ferrazza che egli ed il suo compagno erano stati ad un tratto sorpresi dal movimento del tetto; che, prima pure di comprendere di che si trattasse, si eran presi per mano l'un l'altro ed avevano sollevato gli occhi dal lavoro; che in quel momento era loro apparso, per un tempo brevissimo, tutto intiero il quartiere dei Prati, dal piano stradale in su, per sparire subito dopo ai loro sguardi; che essi non erano stati presi da spavento durante il fenomeno, ma avevano continuato a percepire tutto quanto li circondava.

Pare perciò da escludere ogni sospetto di allucinazione.

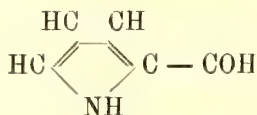
(1) Pervenuta all'Accademia il 9 agosto 1915.

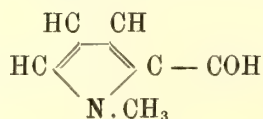
Chimica. — *Derivati formilici ed aldeidici di pirroli e indoli* [1]. Nota del dott. Luigi Alessandri, presentata dal Socio A. Angeli [2].

Le ricerche, le quali formano l'oggetto della presente Nota, sono una estensione di quelle, che lo scorso anno ho iniziate, per consiglio del prof. Angeli, allo scopo di sottoporre ad uno studio più approfondito e più generale le aldeidi della serie del pirrolo. A tal fine ho dovuto prima di tutto portare un perfezionamento ai metodi che servono alla loro preparazione, giacchè i processi consigliati conducevano in qualche caso a rendimenti così scarsi da rendere pressochè inaccessibili alcuni termini.

Ancora nel luglio dello scorso anno [3] ho dimostrato come dai composti alogenati del magnesio-pirrolo, scoperti da B. Oddo, è possibile di ottenere, in modo sollecito e con rendimento molto migliore in confronto degli altri metodi conosciuti, l'α-pirrolaldeide di E. Bamberger e G. Djierdjan [4]. A tal riguardo fo notare come alquanto più tardi, e precisamente nel fascicolo dei Berliner Berichte pubblicato il 26 settembre 1914, W. Tschelinzeff ed A. Terentjeff [5] hanno proposto lo stesso mio metodo per la preparazione della medesima aldeide.

Come è noto, mentre la cosiddetta aldeide α-pirrolica

HC CH
HC⟨ ⟩C — COH
NH

non presenta molte delle reazioni comuni alle vere aldeidi, e fra altro non addiziona il residuo = NOH della biossiammoniaca per formare il corrispondente acido idrossammico, l'aldeide N-metil-α-pirrolica

HC CH
HC⟨ ⟩C — COH
N . CH_3

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica farmaceutica del R. Istituto di studî superiori di Firenze.

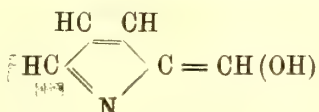
[2] Pervenuta all'Accademia il 9 agosto 1915.

[3] Questi Rendiconti, vol. XXIII (1914), 2° sem., pag. 65.

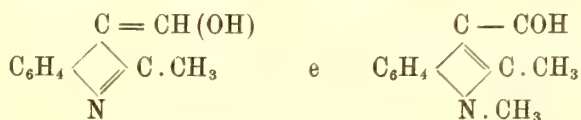
[4] Berl. Ber. 33 (1900), pag. 536.

[5] Berl. Ber. 47 (1914), pag. 2652.

dà invece anche questa caratteristica reazione, verificata finora solo qualitativamente a causa della rarità e dell'instabilità del prodotto [1]. Inoltre, siccome nella medesima occasione venne accertato, pure qualitativamente, che, al contrario dell'aldeide N-metilata, l'aldeide α-pirrolica fornisce un sale sodico, si ritornò a proporre per quest'ultima la struttura di composto ossimetilenico

$$\begin{array}{c} HC\;\;CH \\ HC \langle \;\; \rangle C = CH(OH) \\ N \end{array}$$

la quale spiega molto meglio le anomalie riscontrate.

Non altrettanto significativo riuscì lo studio comparato del comportamento dei corrispondenti derivati α-metilindolici:

$$\begin{array}{c} C = CH(OH) \\ C_6H_4 \langle \;\; \rangle C.CH_3 \\ N \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} C - COH \\ C_6H_4 \langle \;\; \rangle C.CH_3 \\ N.CH_3 \end{array}$$

Infatti mentre da un lato l'aldeide α-metilindolica non dette origine in nessun modo ad acido idrossammico, dall'altro lato dall'aldeide N-metil-α-metilindolica, per quanto si variassero le condizioni d'esperienza, si riuscì ad ottenere soltanto traccie d'un sale di rame, che si colorava in violetto con percloruro di ferro: tal risultato attribuimmo allora con ragione al fatto che si tratta d'un'aldeide ortobisostituita [2]. Ed in realtà, anche altre esperienze comparative, da me eseguite sui due derivati (condensazioni con fenilidrossilammina, con acetofenone; azione di potassa alcoolica e di acido nitroso), fornirono solo i prodotti di partenza in massima parte inalterati.

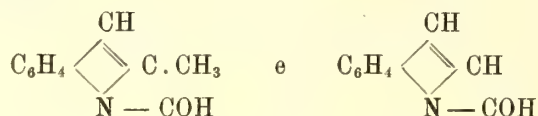
Col fine di prepararmi l'aldeide β-indolica, per la quale era da aspettarsi che le reazioni avessero luogo più facilmente e con buoni rendimenti, risultando così veramente significative, e poichè, a detta di Ellinger, il rendimento in tale aldeide nell'azione di cloroformio e potassa sull'indolo è assai scarso [3], ho voluto provare se, partendo dai composti alogenati dei magnesio-indoli, fosse stato possibile, per azione dei formiati alchilici, d'ottenere le aldeidi con buon rendimento. Ma in tal modo tanto l'α-metilindolo (da cui, come più accessibile, cominciai la ricerca) quanto l'indolo stesso mi fornirono bensì assai piccole quantità delle β-aldeidi, ma i prodotti principali delle reazioni furono rispettivamente un composto cristallino p. f. 76°,5

[1] A. Angeli e L. Alessandri, questi Rendiconti, vol. XXIII (1914), 2° sem., pag. 93.

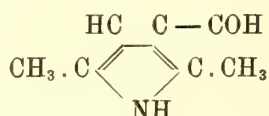
[2] Anche le aldeidi apiolica ed asarilica, fra altre, ortosostituite, non dànno acidi idrossammici.

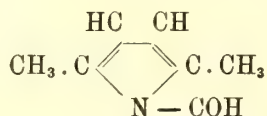
[3] Berl. Ber. 39 (1906), pag. 2515.

ed un olio che solo a temperatura molto bassa cristallizza, isomeri delle rispettive aldeidi e che, bolliti con alcali caustico diluito, dettero α-metilindolo e indolo, ed entrambi anche acido formico. Si tratta evidentemente dei derivati formilici

$$C_6H_4 \langle \begin{array}{c} CH \\ \\ N - COH \end{array} \rangle C.CH_3 \quad e \quad C_6H_4 \langle \begin{array}{c} CH \\ \\ N - COH \end{array} \rangle CH$$

Allora ho rivolto le mie ricerche ai derivati pirrolici. L'aldeide $\alpha\alpha$-dimetilpirrolica era già stata preparata da G. Plancher ed U. Ponti per azione di cloroformio e potassa su quel pirrolo, mentre non poterono aver buoni resultati applicando la medesima reazione all'$\alpha\beta$-dimetilpirrolo ([1]).

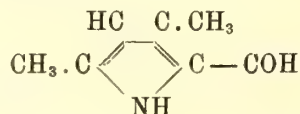
Per azione di formiati alcoolici sui composti alogenati di questi magnesio-pirroli ho ottenuto: dall'$\alpha\alpha$-dimetilpirrolo, con scarso rendimento, l'aldeide di Plancher (p. f. 142-143°)

$$\begin{array}{c} HC \quad C - COH \\ CH_3.C \langle \quad \rangle C.CH_3 \\ NH \end{array}$$

ed in maggior quantità il derivato formilico, non ancora conosciuto, che fonde a 35°,

$$\begin{array}{c} HC \quad CH \\ CH_3.C \langle \quad \rangle C.CH_3 \\ N - COH \end{array}$$

dall'$\alpha\beta$-dimetilpirrolo, con discreto rendimento, la nuova aldeide (l'ossima ha p. f. 131°):

$$C_4H_2N.(CH_3)_2.COH\,,$$

che assomiglia molto nell'aspetto all'α-pirrolaldeide, fonde a 89° e per ossidazione con permanganato potassico in soluzione acetonica fornisce l'acido 2-4.dimetilpirrol-5.carbonico già conosciuto ([2]), per cui non v'è dubbio le spetti la struttura di α-aldeide:

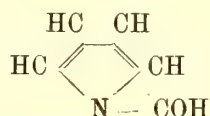
$$\begin{array}{c} HC \quad C.CH_3 \\ CH_3.C \langle \quad \rangle C - COH \\ NH \end{array}$$

([1]) Questi Rendiconti, vol. XVIII (1909), 2° sem., pag. 469.
([2]) Gazz. chim. ital., vol. XIX (1889), pag. 88.

Ambedue queste aldeidi, riscaldate sotto forma di sale sodico secco in tubo chiuso a 100° con una molecola di ioduro di metile, dettero i rispettivi derivati metilici, i quali, per analogia a quanto fu accertato per l'aldeide N-metil-α-metilindolica, preparata in condizioni analoghe [1], sono da ritenersi sostituiti all'azoto.

Dall'$\alpha\alpha$-dimetilpirrolaldeide ebbi un tal derivato con buon rendimento e potei purificarlo ed analizzarlo: ha p. f. 96°, e con biossiammoniaca fornì, soltanto in certe condizioni, una colorazione rosso-ciliegia col percloruro di ferro.

Dall'$\alpha\beta$-dimetilpirrolaldeide ottenni, con scarso rendimento, oleoso, il metilderivato, che tentai di purificare per distillazione e del quale non ho potuto analizzare se non l'ossima (p. f. 145°). Tale N-metilderivato reagì solo in parte con biossiammoniaca, dando poi col percloruro di ferro una colorazione rosso-mattone.

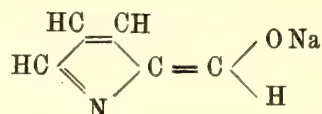
Rimandando ad altro tempo un più esteso studio di queste sostanze ancora non troppo accessibili, volli completare le ricerche comparative iniziate sopra l'α-pirrolaldeide ed il suo derivato N-metilico. A tale scopo ho ripetuto con maggiori quantità di prodotti e più d'una volta la preparazione, da me proposta, dell'α-pirrolaldeide dallo ioduro di pirrol-magnesio e formiato alcoolico, e l'ho ottenuta con discreto rendimento e molto pura. Però, a parer mio, è da completare lo studio della reazione per quanto riguarda il prodotto liquido indicato da Tschelinzeff e Terentjeff [2] come una mescolanza di pirrolo e formiato alchilico, che rimarrebbero inalterati, giacchè è assai probabile, per analogia con quanto ho constatato nei casi soprariferiti, che contenga l'N-formil-pirrolo

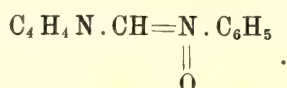
```
    HC    CH
HC  <      >  CH
       N — COH
```

Tale liquido ha invero punto d'ebollizione ed altre proprietà fisiche molto vicine a quelle del pirrolo, ed è verosimile ne contenga: ma da alcune osservazioni mi risulta che possiede anche notevoli caratteri chimici differenziali, oltre ad un contenuto d'azoto quasi coincidente con quello calcolato per il derivato formilico. Inoltre la formazione d'un tal derivato spiegherebbe come gli autori citati, pur migliorando con molta diligenza e perizia le condizioni d'esperienza, non sien riusciti a migliorare il rendimento oltre un certo limite.

Ho preparato il sale sodico di questa α-pirrolaldeide in stato di purezza: all'analisi dette una percentuale di sodio coincidente con quella cal-

(1) Loc. cit., questi Rendiconti, vol. XXIII (1914), 2° sem., pag. 93.
(2) Loc. cit., Berl. Ber. 47 (1914), pag. 2652.

colata per la formula C_5H_4NONa, e questo conferma che si tratta di un vero sale, cui non si può assegnar struttura diversa da quella proposta

$$\begin{array}{l} \quad HC{=}CH \\ HC\langle \qquad \rangle C = C\langle {}^{ONa}_{H} \\ \qquad\;\; N \end{array}$$

La medesima α-pirrolaldeide si condensa con fenilidrossilammina, e la sostanza che si forma (p. f. 120°) è instabile alla luce solare, come gli altri eteri N-fenilici delle ossime [1]: per l'analisi le compete la composizione corrispondente appunto alla struttura:

$$C_4H_4N.CH{=}\underset{\underset{O}{\|}}{N}.C_6H_5 \quad .$$

Allo scopo di prepararmi l'N-metil-α-pirrolaldeide, descritta da E. Fischer come alterabilissima [2], sospettando che tale instabilità fosse inerente al metodo di preparazione seguìto (azione di solfato di metile sulla soluzione alcalina dell'aldeide), cui forse non fu fatto succedere un adatto modo di purificazione, mi son giovato anche per questa aldeide, del metodo che già, come ho indicato, m'aveva dato buoni risultati per le altre aldeidi. Ho fatto agir cioè lo ioduro di metile sul sale sodico secco dell'aldeide, avendo cura speciale che rimanesse un lievissimo eccesso di metilato sodico, dopo il riscaldamento a 100° in tubo chiuso, vale a dire a reazione finita.

Ottenni così un olio assai stabile anche allo stato greggio, più ancora se distillato a pressione ridotta, tanto che dopo più d'un mese ha mantenuto inalterati i caratteri fisici e chimici, assumendo appena una leggera colorazione rosso-bruna, sebbene conservato all'aria in tubetto chiuso con sughero. Per quanto in tutti i suoi caratteri corrisponda al prodotto ottenuto da Fischer, onde non rimanesse alcun dubbio sulla sua identità con esso, ne preparai il fenilidrazone, che fuse nettamente a 123° (non corretto) ed aveva tutti i caratteri del medesimo derivato di Fischer. Ho voluto poi prepararne anche un altro derivato più stabile [3] e caratteristico, cioè l'azina, che ha p. f. 120° ed all'analisi mostrò d'avere la composizione $(C_6H_7N):N\cdot N:(C_6H_7N)$. Infine anche l'N-metil-α-pirrolaldeide da me preparata reagisce facilmente con biossiammonica e dà quindi, col percloruro di ferro, la caratteristica colorazione viola-azzurra già descritta; ma a causa

[1] Cfr. questi Rendiconti, vol. XXIV (1915), 1° sem., pag. 64; e precedenti Note, ivi citate.

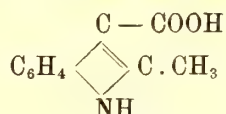
[2] Berliner Berichte 46 (1913), pag. 2508.

[3] A proposito della instabilità dei fenilidrazoni, cfr. M. Busch e W. Dietz, Centralblatt, 1915, I, pag. 194.

della piccola quantità di prodotto disponibile, non sono riuscito ancora ad ottener libero l'acido idrossammico.

Del resto le difficoltà incontrate nell' isolare gli acidi idrossammici di queste N-metilaldeidi pirroliche, seppure essi, specialmente nel caso dei pirroli polisostituiti, si formano realmente, devono essere inerenti alle particolari proprietà di tali derivati idrossammici contenenti azoto a funzione basica.

Ho accennato sopra che in soluzione acetonica l'ossidazione con permanganato potassico mi ha permesso di passare dalla 2-4-dimetilpirrolaldeide all'acido 2-4-dimetilpirrol-5-carbonico: ho constatato che anche l'α-metilindolaldeide, nelle stesse condizioni d' esperienza, dà con buon rendimento l'acido 2-metilindol-3-carbonico, identico in tutto a quello già conosciuto [1]

$$C_6H_4 \langle \overset{C - COOH}{\underset{NH}{\diamond}} \rangle C.CH_3$$

Plancher invece, operando in soluzione acquosa alcalina, da tale aldeide non potè ottenere se non acido acetilantranilico [2] Si può dunque affermare fin da ora, che questo metodo di ossidazione si presta a realizzare il passaggio da tali composti aldeidici agli acidi corrispondenti, in modo più generale [3].

Accennerò infine che, per azione del nitrato d'etile sullo ioduro di α-metilindol-magnesio, ho ottenuto con discreto rendimento il 3-nitro-2-metilindolo, identico, per le proprietà e l'analisi, al derivato medesimo ottenuto da A. Angeli e F. Angelico [4] per azione pure di nitrato d'etile sopra l'α-metilindolo in presenza di sodio. Tenuto conto dei resultati soprariferiti, avuti nell'azione dei formiati alchilici, non è escluso affatto che si ottenga insieme anche un derivato N-sostituito: ricerche ulteriori in proposito chiariranno la questione.

Terminando questo cenno riassuntivo, compio il gradito dovere di ringraziare il laureando sig. Mario Passerini per il valido e diligente aiuto prestatomi nell'esecuzione di queste esperienze, che verranno descritte dettagliatamente nella Gazzetta chimica italiana.

(1) Berliner Berichte XXI (1888), pag. 1926; e Gazz. chim. ital. XXII (1892), 2°, pag. 20.

(2) Questi Rendiconti, vol. XVI (1907), 1° sem., pag. 130.

(3) Invero Ellinger (loc. cit.) ottenne acido β-indolcarbonico da β-indolaldeide in soluzione acquosa alcalina.

(4) Questi Rendiconti, vol. XXII (1903), 1° sem., pag. 345.

Chimica. — *Ricerche sul gruppo dei tellururi di bismuto* [1]. Nota di M. Amadori, presentata dal Socio G. Ciamician [2].

Accanto al solfuro di bismuto $Bi_2 S_3$ rombico (bismutina), al seleniuro $Bi_2 Se_3$ rombico (guanaiuatite), ed al tellururo $Bi_2 Te_3$ romboedrico (tetradimite) esistono in natura e presentano uno speciale interesse un gruppo di minerali di forma romboedrica costituiti di bismuto e di tellurio insieme a zolfo e talora a selenio.

Con il nome *tetradimite* si indica, infatti, oltre al comune tellururo puro di bismuto, $Bi_2 Te_3$, quei minerali che accanto al tellururo contengono una quantità variabile di corrispondente solfuro, $Bi_2 S_3$, giungendo nella composizione ad una quantità massima all'incirca del rapporto 1 S : 2 Te. Questa composizione è abbastanza comune nei minerali naturali, e corrisponderebbe a quella di un composto $2 Bi_2 Te_3 . Bi_2 S_3$.

Lo zolfo ed il tellurio si accompagnano al bismuto anche nella *grunlingite* la cui composizione si avvicina alla formula 3 Bi S . Bi Te.

La *joseite* oltre al bismuto, tellurio e solfo contiene una rilevante quantità di selenio ed ha una composizione prossima alla formula $Bi_3 Te (S, Se)$.

La natura di questi minerali non è ben nota, ed il problema si presenta assai interessante soprattutto in ciò che riguarda le tetradimiti,

Infatti, mentre Berzelius [3] ritenne l'esistenza di un tellururo $Bi_2 Te_3$, e di un solfotellururo $Bi_2 S_3 . 2 Bi_2 Te_3$, Rose [4] e Rammelsberg [5] considerarono il tellururo puro e gli altri minerali di composizione mista come miscele isomorfe delle forme romboedriche degli elementi Bi, Te, S e Se.

Genth [6], ammettendo l'esistenza di un composto del tipo $Bi_2 M_3$, diede alle tetradimiti e alla joseite una composizione variabile secondo la formula $Bi_2 (Te, Se, S, Bi)_3$. Questo autore avrebbe osservato forme cristalline rombiche di tetradimite.

Muthmann e Schröder [7] attribuirono alle tetradimiti da loro studiate la costituzione $2 Bi_2 Te_3 . Bi_2 S_3$; alla grunlingite la costituzione 3 Bi S . Bi Te.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Padova, diretto dal prof. G. Bruni.

[2] Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1915.

[3] Pogg. Ann. (1824), I, 271.

[4] Gibb. Ann. *72*, 196 (1822).

[5] Mineralch. (1860), 4; (1875), 4; (1895), 4.

[6] Zeit. f. Kryst. *12*, 487 (1887); Am. Journ. Sc. *40*, 114 (1890).

[7] Zeit f. Kryst. *29*, 144 (1898).

Anche il Groth [1] considerò da principio il tellururo come una miscela isomorfa di bismuto e di tellurio; in seguito riconobbe la possibilità dell'esistenza del tellururo e del composto solfotellururo, entrambi di forma romboedrica, non escludendo, in base ai dati di Genth, la possibilità che tellururo e solfotellururo possano cristallizzare in forma rombica, isomorfi al seleniuro ed al solfuro; caratteri cristallini assai prossimi alla tetradimite attribuì alla joseite, $Bi_3\,Te\,(S.Se)$ e alla grunlingite, $Bi_4\,S_3\,Te$. Ultimamente [2] il Groth ammette potersi trattare per la grunlingite di soluzioni solide di $Bi\,Te$ e $Bi\,S$; per le tetradimiti conferma l'esistenza del composto $2\,Bi_2\,Te_3 \, . \, Bi_2\,S_3$, di forma romboedrica, mentre ritiene che non si possa fare alcuna precisa affermazione sulla forma cristallina del tellururo puro: egli si augura nuove ricerche su questo gruppo di minerali, la cui natura non è ben definita.

Il Dana [3] attribuisce alle varie tetradimiti, $Bi_2\,(Te, S)_3$, forma cristallina romboedrica e ne distingue due varietà: l'una che non contiene solfuro $Bi_2\,Te_3$, l'altra che contiene solfuro $2\,Bi_2\,Te_3 \, . \, Bi_2\,S_3$; alla joeseite, di composizione dubbia, e alla grunlingite, $Bi\,(Te, S)$, attribuisce caratteri cristallini simili a quelli delle tetradimiti.

L'Hintze [4] pure riunisce in un sol gruppo le diverse specie di tetradimite, la joseite e la grunlingite, non essendo possibile, come afferma, una precisa classificazione.

Quantunque appaia di per sè da rigettare l'ipotesi considerante la tetradimite come miscela isomorfa degli elementi, ricorderò che anche recenti studî termici, come vedremo più avanti, hanno dimostrato che nessun rapporto di isomorfismo esiste tra bismuto da una parte e solfo, selenio, tellurio dall'altra. In tutti e tre i casi si nota invece la formazione di un composto del tipo $Bi_2\,M_3$ ($M = S, Se, Te$); questo composto è dello stesso tipo di quelli che si trovano in natura, nella bismutina, nella guanaiuatite, nelle tetradimiti.

A questo proposito è opportuno fin d'ora osservare che non si ha alcun accenno a formazione di composti del tipo $Bi\,M$ o del tipo $Bi_3\,M_2$, i quali sarebbero i presunti componenti binarî della grunlingite e della joseite: ciò non esclude *a priori* la possibilità che i composti ternarii corrispondenti si possano formare nel sistema ternario.

Per quanto riguarda il comportamento reciproco dei solfuri, seleniuri e tellururi in genere ricorderò che mentre tra i due primi esiste generalmente isomorfismo perfetto, tra essi ed il tellururo l'isomorfismo ha luogo in rapporti assai limitati. Nel caso dei derivati del bismuto, ciò potrebbe

(1) Tabell. Uebersicht (1874), 8, 73; (1882), 12; (1889), 14; (1898), 18.
(2) Chemische Krystall. I, 143, 150 (1906).
(3) System of Mineralogy *1892*, 39; First Appendix *1899*, 31.
(4) Handbuch der Mineralogie, I, 402 (1899).

presumersi ad esempio anche dalla stessa forma cristallina che è rombica per il solfuro ed il seleniuro, romboedrica per il tellururo.

Le tetradimiti che accanto al tellururo contengono il solfuro, potrebbero essere ritenute costituite da miscele isomorfe di tellururo con solfuro dovute ad un isodimorfismo dei componenti: certo i limiti di miscibilità appaiono troppo lati.

Più verosimile sarebbe ritenere l'esistenza di un composto tra solfuro e tellururo di bismuto $2\,Bi_2\,Te_3\,.\,Bi_2\,S_3$: questa composizione infatti, è quella che più comunemente si incontra nei solfotellururi naturali.

Ammessa l'ipotesi della formazione del composto $2\,Bi_2\,Te_3\,.\,Bi_2\,S_3$ dobbiamo chiederci in quale relazione esso si trova con componenti ed in special modo con il tellururo, e di quale natura sieno quei minerali di composizione intermedia al tellururo ed al composto. Se si vogliono considerare come miscele isomorfe non potrebbero esserlo tra tellururo e solfuro, ma tra tellururo e composto.

Passando alla grunlingite e alla joseite si deve notare che questi minerali si scostano nella loro composizione dalle tetradimiti e si avvicinano a quella di altri presunti composti; tuttavia, come generalmente vien fatto osservare, essi hanno caratteri cristallini assai prossimi a quelli delle tetradimiti. Per la grunlingite e per la joseite dovremmo in parte ripetere quanto abbiamo osservato per le tetradimiti: nell'isomorfismo che in genere si nota tra solfuri e seleniuri si può avere per la joseite una spiegazione della parziale sostituzione tra solfo e selenio.

Per cercare di risolvere le questioni che abbiamo posto, ho istituito una serie di ricerche tendenti a stabilire la natura di questi minerali e le loro possibili condizioni di formazione.

Per circostanze ovvie, indipendenti dalla mia volontà, ho dovuto interrompere il lavoro iniziato, ma credo opportuno non tardare a far conoscere alcuni risultati ottenuti esponendo in questa Nota ciò che riguarda la formazione della tetradimite dai componenti $Bi_2\,Te_3$ - $Bi_2\,S_3$ per solidificazione ed i rapporti di isomorfismo fra solfuro e tellururo.

Altre ricerche riguardanti buona parte del sistema ternario Bi-Te-S ho portato a termine: mi riserbo di pubblicare queste ricerche insieme ad altre sullo stesso argomento.

La formazione dei due componenti della tetradimite alla solidificazione venne già studiata in ricerche termiche e micrografiche.

Mönkemeyer [1] per il sistema bismuto-tellurio stabilì la formazione del composto $Bi_2\,Te_3$ caratterizzato da un massimo nella curva di solidificazione: la temperatura di cristallizzazione fu determinata a 573.

[1] Zeit. f. an. Chem. *46*, 419 (1905).

Aten (1) per il sistema bismuto-solfo non riuscì ad uno studio completo, perchè per le temperature elevate che si devono raggiungere per la fusione lo zolfo in parte subblima. Dal bismuto puro potè giungere a una concentrazione di 52,5 % S (inizio cristallizzazione: 760°). Le sue ricerche termiche e micrografiche mostrano però che, quantunque non si possa raggiungere la formazione e la cristallizzazione del composto $Bi_2 S_3$ puro, si può ritenere che esso si formi e si separi dalle miscele fuse studiate; la temperatura di cristallizzazione del solfuro puro è superiore a 800°. La parte del sistema solfo-solfuro non venne studiata per la sublimazione dello zolfo prima della fusione delle miscele.

Ricerche da me eseguite e non ancora pubblicate sul sistema bismuto-selenio provano anche per questo la formazione del composto $Bi_2 Se_3$ che cristallizza puro, caratterizzato da un massimo, a 690°.

Mentre la solubilità fra tellururo e tellurio allo stato fluido è completa, la solubilità fra seleniuro e selenio è limitata per modo che si ha formazione di due strati liquidi. È verosimile che ciò avvenga anche tra solfuro e solfo: questo comportamento è infatti abbastanza comune per i seleniuri e solfuri metallici. La temperatura che si deve raggiungere per portare a fusione entrambi gli strati liquidi e la facile distillazione dello zolfo impedirebbero di studiare anche parzialmente quella parte del sistema zolfo-bismuto che si riferisce allo zolfo-solfuro di bismuto.

Il tellururo di bismuto adoperato in queste ricerche veniva preparato per fusione dei due elementi e cristallizzava a 575°.

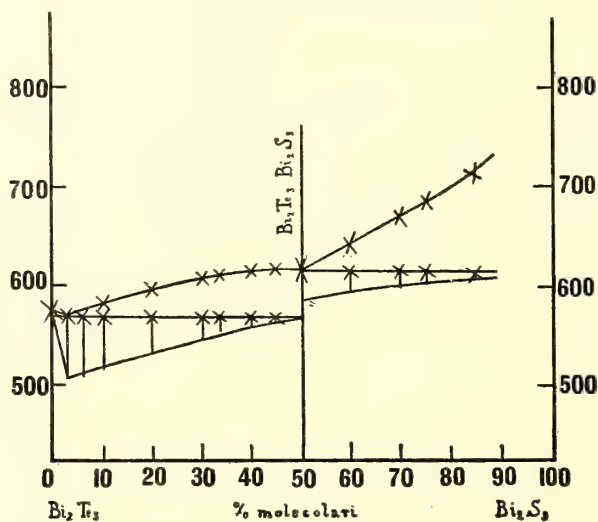
Il solfuro di bismuto veniva ottenuto mescolando i due elementi nel rapporto voluto; venne anche impiegato il trisolfuro ottenuto per precipitazione.

Il solfuro di bismuto puro non fu portato a fusione per la accennata scomposizione che subisce. Lo studio del sistema solfuro-tellururo fu però possibile per concentrazioni da 0 a 85 % solfuro senza avere una decomposizione tale da influire sui risultati delle esperienze. Anche l'analisi delle masse fuse e solidificate provò che l'alterazione non ha luogo in modo apprezzabile.

Le miscele vennero fuse in provette di vetro in corrente di gas azoto. La massa adoperata era di 25 gr.

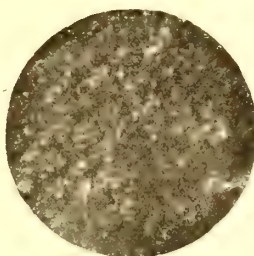
(1) Zeit. f. an. Chem. *47*, 387 (1905).

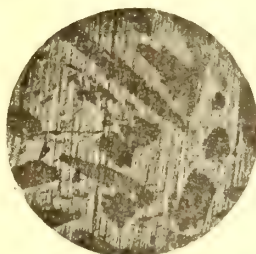
TABELLA.

°/₀ peso Bi_2S_3	°/₀ molec. Bi_2S_3	Inizio di cristallizza-zione	Arresto eutettico	
			Temperatura	Durata per 25 gr.
0	0	575°	—	—
1.94	3	—	570°	370″
3.93	6	?	570	350
6.65	10	584	570	290
13.83	20	598	570	200
21.57	30	610	570	130
24.30	33.3	612	570	70
29.96	40	614	570	50
34.43	45	615	570	20
39.10	50	615	—	—
49.04	60	642	614	170
59.96	70	670	614	120
65.82	75	685	614	90
78.43	85	712	612	50
100	100	?	—	—

Le ricerche termiche provono la formazione di un composto in rapporti equimolecolari fra il tellururo ed il solfuro di bismuto: $Bi_2Te_3 \cdot Bi_2S_3$.

I
90 °/₀ mol. Bi_2Te_3
10 °/₀ mol. Bi_2S_3
Ingrandimento: 35 diam.

II
66.66 °/₀ mol. Bi_2Te_3
33.33 °/₀ mol. Bi_2S_3
Ingrandimento: 35 diam.

III
55 °/₀ mol. Bi_2Te_3
45 °/₀ mol. Bi_2S_3
Ingrandimento: 35 diam.

IV
50 °/₀ mol. Bi_2Te_3
50 °/₀ mol. Bi_2S_3
Ingrandimento: 70 diam.

V
40 °/₀ mol. Bi_2Te_3
60 °/₀ mol. Bi_2S_3
Ingrandimento: 35 diam.

VI
15 °/₀ mol. Bi_2Te_3
85 °/₀ mol. Bi_2S_3
Ingrandimento: 35 diam.

La temperatura di solidificazione del composto è 615°: esso forma con il tellururo un miscuglio eutettico che ha la composizione di circa 3 % mol. Bi_2S_3 e solidifica a 570°; con il solfuro forma un miscuglio eutettico che ha una composizione ed una temperatura di solidificazione assai prossima alla propria. L'eutettico composto-tellururo si estende all'incirca fino ai componenti. L'eutettico composto-solfuro si estende dal composto verso il solfuro; nell'ultimo tratto lo studio del sistema non fu compiuto per la scomposizione del solfuro nelle miscele; è tuttavia presumibile dalle durate dell'arresto eutettico che questi si approssimi assai al solfuro.

Nessun'altra variazione termica si osservò nel raffreddamento fino a 200° sì da presupporre un qualche fenomeno in seno alla massa solidificata, come ad esempio trasformazioni, scomposizione o formazione di altro composto.

Le ricerche micrografiche fatte sulle masse solidificate confermano quanto risulta dalle ricerche termiche ed è stato sopra esposto.

I masselli non si prestano molto bene ad essere levigati, perchè assai teneri e facilmente sfaldabili: caratteristica questa comune anche ai minerali naturali. L'intacco fu eseguito con soluzioni di cloruro ferrico in acido cloridrico aumentandone le concentrazione con l'aumento in contenuto di solfuro nelle miscele.

L'aspetto delle leghe così intaccate è assai evidente anche ad occhio nudo o con piccolo ingrandimento con lente. L'ingrandimento delle micrografie a luce riflessa di cui è dato l'aspetto fotografico nella tavola finale è di 70 diametri per la micrografia del composto, di 35 diametri per le rimanenti.

La micrografia della miscela a 50 % mol. ha un aspetto omogeneo di cristalli di $Bi_2Te_3 . Bi_2S_3$. Nelle micrografie a 10, 33.33, 45 mol. Bi_2S_3 si nota il deposito primario del composto accanto al deposito eutettico composto-tellururo. Le micrografie a 60, 85 % mol. Bi_2S_3 mostrano il deposito primario del solfuro, e il deposito eutettico composto-solfuro.

Conclusioni.

Le ricerche termiche e micrografiche sulle miscele di tellururo e di solfuro mostrano che tra il tellururo Bi_2Te_3 ed il solfuro Bi_2S_3 non si hanno rapporti di isomorfismo, ma formazione di un composto $Bi_2Te_3 . Bi_2S_3$: pure tra questo composto ed i componenti non esistono rapporti di isomorfismo. Nelle condizioni di esperienza seguite non si ha alcun accenno a formazione di un composto $2 Bi_2Te_3 . Bi_2S_3$ o di cristalli misti in genere, che si possa presumere dello stesso tipo delle tetradimiti naturali.

Chimica. — *Sul dosamento del tiofene nel benzolo* (1). Nota di V. Paolini e B. Silbermann, presentata dal Corrispondente A. Peratoner (2).

La capacità dei sali di mercurio di sostituire direttamente l'idrogeno legato ad atomi di carbonio venne scoperta da Volhard (3) che studiò in questo senso anche il tiofene. Agitando questa sostanza con soluzione di sublimato (in presenza di acetato sodico), egli ottenne due composti, per sostituzione di uno o di due atomi di idrogeno del tiofene mediante —Hg Cl; ma non potè separare quantitativamente, come composto mercurico, il tiofene contenuto negli olii di catrame e nel benzolo commerciale, e ciò probabilmente a causa della debole idrolizzazione del cloruro mercurico nell'acqua (4).

Meglio si prestano invece sali mercurici, quali acetato, solfato o nitrato, che l'acqua decompone profondamente. Così Denigès (5) aveva già proposto la reazione col solfato pel dosamento del tiofene nel benzolo, avendo ottenuto, a seconda del solvente adoperato (acqua o acetone), due differenti combinazioni che riteneva prodotti di addizione del tiofene con solfato basico di mercurio, ma che, secondo Dimroth, sarebbero da considerarsi piuttosto quali prodotti di sostituzione del mercurio.

L'impiego dell'acetato mercurico, consigliato dal Dimroth per la facilità e rapidità della reazione, che si effettua facendo bollire a ricadere per 1/2 ora il benzolo in esame con la soluzione acquosa del sale, passò nella letteratura come metodo di Dimroth pel dosamento del tiofene, calcolandosi le percentuali di quest'ultimo secondo la formula attribuita dall'autore al composto mercurico ottenuto $C_4H_2S(HgO \,.\, CO \,.\, CH_3)Hg \,.\, OH$, di un dimercuri-ossi-acetato di tiofene: e ciò tanto più, in quanto un controllo del metodo, eseguito da Liebermann e Pleus (6) con 3 miscugli di benzolo-tiofene a composizione nota, aveva fornito valori soddisfacenti.

Ma Schwalbe (7), esaminando, secondo tale metodo, con grande accuratezza un certo numero di diverse qualità di benzolo, non riuscì ad ottenere risultati coincidenti, giungendo invece a precipitati, dai quali calcolando in

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 1° agosto 1915.

(3) Volhard, Annalen, *267*, 172.

(4) Dimroth, Berichte, *32*, 758.

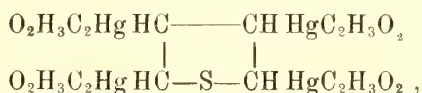
(5) Denigès, Compt. rend. *120*, 628 e 781; Bull. Soc. chim., *15*, 1064.

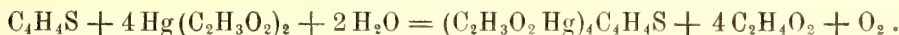
(6) Liebermann e Pleus, Berichte, *37*, 2463.

(7) Schwalbe, Berichte *38*, 2208.

base alla formula di Dimroth, la quantità di tiofene superava di circa 40 % i valori teorici. Determinando poi nel prodotto di Dimroth la percentuale di zolfo (analisi omessa dal Dimroth) e trovandovene 2,7 - 2,8 % invece del 5,73 % richiesto, Schwalbe mise in dubbio l'esattezza della formula di Dimroth e altresì quella delle ricerche di Liebermann e Pleus, ma ad alcun'altra conclusione non potè giungere pel dosamento del tiofene.

Nè più fortunato è stato a questo riguardo uno di noi (Paolini), quando, alcuni anni or sono [1], sul tiofene ha fatto agire una soluzione acquosa *satura*, *a freddo*, di acetato mercurico. Al prodotto ottenuto, in apparenza identico a quello di Dimroth, e che forniva dati analitici notevolmente approssimati a quelli richiesti da un tetramercuri-derivato, venne attribuita la formula

$$\begin{array}{l} O_2H_3C_2Hg\,HC\text{———}CH\,HgC_2H_3O_2 \\ \qquad\qquad\quad | \qquad\quad | \\ O_2H_3C_2Hg\,HC\text{—}S\text{—}CH\,HgC_2H_3O_2\ , \end{array}$$

ammettendosi una soluzione dei doppî legami, secondo l'equazione, data tuttavia con riserva e solamente in via di probabilità:

$$C_4H_4S + 4\,Hg(C_2H_3O_2)_2 + 2\,H_2O = (C_2H_3O_2\,Hg)_4C_4H_4S + 4\,C_2H_4O_2 + O_2\,.$$

L'ossigeno liberato avrebbe poi ossidato una parte del tiofene disponibile, giustificandosi così il rendimento oltremodo basso in composto tiofenmercurico (intorno al 50 %), senza che però potesse isolarsi un supposto prodotto di ossidazione dalla rimanente soluzione acquosa. Di fronte all'incertezza di questi risultati, la quistione del dosamento del tiofene dovevasi considerare come ancora aperta.

Avendo noi ora ripreso queste ricerche, riteniamo di essere giunti alla risoluzione del problema.

***

In primo luogo era nostro intendimento di passare dal composto mercurico, da uno di noi precedentemente ottenuto, ad un derivato tetrajodurato che per l'alta percentuale di jodio e per la supposta assenza dei doppî legami avrebbe fatto intravedere una importante azione terapeutica. Per tale trasformazione ci siamo avvalsi dell'osservazione fatta da Dimroth [2] a proposito delle sue ricerche sui prodotti di sostituzione aromatici del mercurio, che cioè il residuo —Hg Alog., unito alla molecola organica, si lascia rimpiazzare con somma facilità da alogeno.

Il nostro composto tiofen-mercuri-acetico è stato quindi dapprima trasformato, nel modo precedentemente descritto [3], in derivato cloromercurico

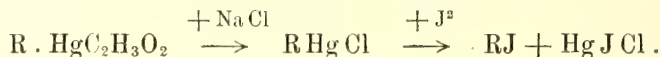
[1] Paolini, Gazzetta Chimica, *37*, I, 58.

[2] Dimroth, Berichte, *35*, 2033.

[3] Paolini, Gazzetta chimica, *47*, I, 58.

per azione della soluzione di cloruro sodico, e questo poi agitato, in forma di polvere finissima, a freddo con soluzione di jodio in joduro potassico.

La sostituzione di jodio avviene subito e assai blandamente, secondo lo schema

$$R \, . \, HgC_2H_3O_2 \xrightarrow{+NaCl} RHgCl \xrightarrow{+J^2} RJ + HgJCl \, .$$

Ma con nostra sorpresa osservammo che la quantità di jodio consumata era costantemente inferiore a quella calcolata per un tetramercuriderivato; così ad es. bastavano 5 gr. di jodio (di fronte a gr. 7 preveduti) per la trasformazione completa di 7 gr. del composto cloromercurico in jododerivato del tiofene. Epperò quest'ultimo si è appalesato quale mescolanza di due corpi distinti, dei quali uno è il diiodotiofene, noto da parecchio tempo e preparato da Volhard [1], fondente a 40°,5 e presentante anche le altre proprietà del prodotto di Volhard (forma cristallina, odore, solubilità ecc.); l'altro è il tetrajodotiofene, finora non descritto, dal punto di fusione 198°. La separazione dei due composti è stata fatta mediante acido acetico glaciale caldo che asporta tutto il dijodotiofene. Abbiamo avuto un rendimento di circa 70 °/₀ di dijodo- e circa 30 °/₀ di tetrajodo-tiofene.

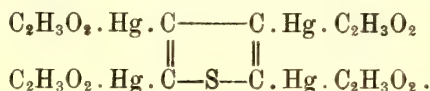
Dato il modo blando e rapido in cui procedono le reazioni dal composto tiofen-mercuri-acetico sino agli jodotiofeni, talchè non è ammissibile neppure l'eliminazione di jodio dal tetrajodotiofene già formato, per spiegare la formazione del dijododerivato, la più ovvia interpretazione del nostro risultato è quella di considerare già il precipitato mercuri-acetico come un miscuglio di prodotti bi- e tetrasostituiti dell'acetato mercurico, e cioè col mercurio legato direttamente al carbonio del nucleo tiofenico a legami *inalterati*, non già di idroderivati, la cui genesi richiederebbe la soluzione dei doppî legami. Non è improbabile che le proporzioni di questi due composti nel precipitato che si ottiene, quando si operi sul tiofene con la soluzione acquosa dell'acetato mercurico, siano variabili, potendo prevalere o l'uno o l'altro a seconda delle condizioni di temperatura, di concentrazione ecc. A questo almeno accennerebbero i divergenti risultati di esperienze e di analisi fatte a parecchi anni di distanza. Certo si è che il prodotto ora sperimentato, essendo formato da circa 70 °/₀ di bimercuri-aceto-tiofene, di fronte a soli 30 °/₀ del tetramercurio-aceto-derivato, contiene quasi tutto il tiofene adoperato, per cui non è sostenibile l'ipotesi, precedentemente invocata, di una parziale ossidazione di questa sostanza di partenza, per chiarire un rendimento che sembrava troppo basso in composto tetramercurico esclusivamente.

Comunque sia, abbiamo potuto dimostrare che, variando la condizione di esperienza e principalmente cambiando solvente, si elimina l'inconveniente

[1] Volhard, Annalen, *267*, 172.

cennato di ricavare un miscuglio, pervenendosi invece alla preparazione del puro derivato tetra-mercuri-acetico.

Tetramercuriacetato di tiofene

$$\begin{array}{c} C_2H_3O_2 . Hg . C \text{———} C . Hg . C_2H_3O_2 \\ \| \quad\quad \| \\ C_2H_3O_2 . Hg . C\text{—}S\text{—}C . Hg . C_2H_3O_2 . \end{array}$$

Grammi 9,5 (un po' più del calcolato) di ossido mercurico si sciolgono in 15 cc. di acido acetico glaciale; si filtra e si aggiunge al filtrato, ancora caldo, una soluzione di gr. 0,84 di tiofene (1/100 di mol.) in 5 cc. di acido acetico. La soluzione limpida viene ora riscaldata per 1/4 d'ora sul bagno maria bollente, e poi lasciata in riposo per alcune ore, durante le quali si va formando un abbondante precipitato bianco. Aggiungendo indi l'ugual volume d'acqua e filtrando, il precipitato si lava con acqua sino a reazione negativa del mercurio nel filtrato; disseccato, pesa gr. 11, onde il rendimento risulta del 98 %.

Questo composto è insolubile in tutti i solventi, tranne nell'acido acetico glaciale, in cui, a caldo, si discioglie nel rapporto di circa 1:5.

Solfo (Carius): Sostanza gr. 0,6614. Solfato di bario raccolto gr. 0,1320.

Trovato: 2,86 %
Calcolato: 2,86 %

Il tetramercuriacetato di tiofene così ottenuto è affatto esente dal composto dimercuri-acetico, dappoichè, trasformandolo dapprima, secondo Paolini, in composto cloromercurico, se ne può ricavare quantitativamente il tetrajodotiofene.

Tetrajodotiofene C_4J_4S.

Grammi 10 di tetramercuricloruro di tiofene secco, e finamente stacciato, si agitano a freddo con una soluzione di gr. 10 di jodio e gr. 20 di joduro potassico in acqua, sino a decolorazione di tutto lo jodio. Il tetrajodotiofene separato si raccoglie, si lava sul filtro con soluzione di joduro potassico, poi con acqua, e si dissecca infine in essicatore. Pesa gr. 5,5, invece del calcolato 5,8.

Cristallizza dal tetracloruro di carbonio (1:40) in polvere cristallina che fonde a 198°. Ha colore leggermente giallognolo, ma non odore nè sapore. Si scioglie difficilmente in tetracloruro di carbonio, facilmente nel solfuro di carbonio, mentre è insolubile in tutti gli altri solventi.

Analisi: gr. 0,1936 di sostanza diedero gr. 0,3070 di AgJ.

Jodio trovato: 85,74 %
calcolato: 86,06 %

Peso molecolare, in CCl_4: gr. 0,4954 in gr. 39,2 di CCl_4 innalzarono il punto d'ebollizione di 0,1°.

Trovato: 606
Calcolato: 588

Di fronte a questi fatti osservati, ci siamo di nuovo occupati della determinazione quantitativa del tiofene nel benzolo, ed abbiamo elaborato il seguente

Metodo pel dosamento del tiofene

che, provato con varî miscugli artificiali di benzolo-tiofene, ha dato eccellenti risultati distinguendosi per semplicità e rapidità.

Dopo avere dapprima disciolto un po' più della quantità calcolata di ossido mercurico nel peso doppio di acido acetico glaciale, si raffredda, lasciando pur depositare l'acetato mercurico. Indi si aggiunge il benzolo, in esame pel dosamento del tiofene, e si riscalda sul b. m. all'ebollizione, a ricadere, per circa 15 minuti. Il precipitato formato, costituito solamente da tetramercuriacetato di tiofene, si raccoglie dopo raffreddamento del benzolo, si lava più volte con etere, si asciuga a 100° e si pesa.

Dosamenti di controllo:

1) Da 100 gr. di benzolo all'1 °/₀ di tiofene:
precipitato mercurico gr. 12,8, corrispondenti a gr. 0,96 di tiofene.

2) Da 100 gr. di benzolo al 0,5 °/₀ di tiofene:

a) composto mercurico gr. 5,6 corrispondenti a 0,42 di tiofene;
b) » » » 6,0 » » 0,46 » »

3) Da 100 gr. di benzolo al 0,1 °/₀ di tiofene:
precipitato gr. 1,32, corrispondenti a gr. 0,1 di tiofene;

4) Da 100 gr. di benzolo al 0,05 °/₀ di tiofene:
precipitato gr. 0,6, corrispondenti a gr. 0,045 di tiofene.

Zimologia. — *Intorno alla Willia Saturnus Klocker.* Nota del prof. VITTORIO PEGLION, presentata dal Socio G. CIAMICIAN [1].

Nel procedere ad indagini circa la microflora del terreno ortivo annesso alla scuola agraria di Bologna, ho isolato un lievito i cui caratteri morfologici corrispondono a quelli assegnati dal Klocker [2] a *Willia Saturnus*.

Com'è noto, questo caratteristico saccaromicete fu trovato dal Klocker in un campione di terreno proveniente dall'Himalaja. Lo stesso Klocker ritrovò in seguito questa specie, od una specie molto affine in campioni di terreno raccolti in Danimarca ed in Italia; non sembra però che di questa ultima siano stati rilevati i caratteri morfo-biologici atti ad identificare, o meno, questa forma europea colla forma asiatica i cui caratteri servirono al Klocker per definire la nuova specie di lievito. Scopo di questa mia breve Nota è appunto il rilevare alcune differenze di ordine biologico che si avvertono tra il comportamento di *W. Saturnus* tipica e la forma isolata dal terreno dell'orto di questa scuola.

Questo lievito si è costantemente sviluppato in soluzioni al 10 °/₀ di saccarosio, acidificate con acido lattico (2 °/₀₀), in cui si seminavano poche goccie di acqua di lavatura di detto terreno. Dopo 48 ore di permanenza in termostato a 25° la superficie libera del liquido è ricoperta da un velo candido continuo e liscio dapprima, ma che rapidamente s'increspa, indi si disloca, intorbidando il liquido di coltura. Al 4° giorno il liquido stesso è in preda ad un energico processo fermentativo, che dà origine ad un gradevolissimo profumo di essenza di mela.

Ho preparato colture pure seguendo il classico metodo di Hansen ed utilizzando per l'isolamento un infuso di frumento germinato e gelatinizzato: si ottengono colonie dapprima punctiformi ed isodiametriche finchè incluse nello spessore dello strato di gelatina; raggiunta la superficie libera del substrato esse tendono ad espandersi ed a lobarsi, assumendo un aspetto farinoso; coll'invecchiare, le colonie stesse diventano di color bianco-sporco.

I caratteri morfologici corrispondono perfettamente a quelli assegnati dal Klocker a *W. Saturnus*: le cellule vegetative sferoidali od ovate (4-6 μ dm.) si moltiplicano per gemmazione soprattutto nelle soluzioni nutritizie zuccherate; coltivato su fette di carota o trasportato su cono di gesso, nelle opportune condizioni di temperatura ed umidità, questo lievito spori-

[1] Pervenuta all'Accademia il 26 luglio 1915.

[2] Klocker A., Centralblatt f. Bakt., 1902, pag. 129; id., Lafar Handb. d. techn. Mykol., IV band, pag. 188.

fica rapidamente: le cellule-asco contengono da 1-4 spore, limoniformi e munite di un caratteristico anello sporgente in corrispondenza dell'asse maggiore della spora. Le spore stesse misurano in media $3 \times 2 \mu$.

Per quanto riguarda le proprietà fisioloigche di *W. Saturnus* il Klocker si limita ad accennare che esso fa fermentare il destrosio, il fruttosio ed il saccarosio, previa inversione di quest'ultimo, mentre è inattiva verso lattosio, maltosio ed arabinosio; e che durante la fermentazione si ha formazione di un etere (etere acetico?). Secondo il Lindner [1] questo lievito coltivato in un mosto di densità pari a 14° Balling, dà origine a debole fermentazione e formazione di schiuma; dopo 46 giorni si constata la formazione di 1 °/₀ di alcool; dopo 1 anno e $\frac{1}{2}$ l'alcool formato è scomparso.

Sotto questo punto di vista il lievito, isolato da me, si distacca profondamente dalla specie tipica del Klocker, quale viene prospettata da questi rilievi funzionali, tanto da doversi considerare per lo meno come una varietà, fisiologicamente molto più attiva.

Ho eseguito numerose prove di fermentazione di mosto artificiale al 10 °/₀ di saccarosio: la *Willia* forma dapprima il caratteristico velo bianco che invade l'intera superficie libera del liquido vivendo acrobicamente; indi si sviluppa anaerobicamente, determinando viva fermentazione del liquido: questa perdura attiva e con abbondante svolgimento di anidride carbonica per 4-5 giorni. Agitando il liquido in guisa da distribuire uniformemente nella massa le cellule di lievito e lasciandolo quindi in riposo nel termostato a 25°, dopo 10-12 ore, durante le quali il fenomeno fermentativo ha ripreso, parte del lievito si deposita sul fondo e parte vien trasportato a galla formando un anello od un ferro di cavallo di schiuma regolarmente disposto alla superficie del liquido, e che si rinnova non appena il liquido agitato sia lasciato in riposo.

Queste prove di fermentazione dimostrano che il lievito in parola è un fermento alcoolico discretamente attivo, in specie se si paragona da questo lato con ciò che il Lindner ha osservato studiando la *W. Saturnus* tipica. Una prova di fermentazione con soluzione di saccarosio (10 °/₀) neutra, addizionata con tracce di sali minerali e con peptone (2 °/₀₀) durata 10 giorni ha fornito all'analisi i seguenti resultati:

Alcool (in peso)	4,44 °/₀
Glicerina	0,173 °/₀.

Una serie di prove, fatte in vista di determinare l'influenza esercitata dalle diverse forme di alimento azotato, ha dimostrato che questo lievito si adatta ad utilizzare tanto l'azoto organico (peptone ed asparagina) quanto l'azoto ammoniacale. Infatti una soluzione di saccarosio al 10 °/₀ fu divisa

[1] Lindner, Mikrosk. Betriebskontr. in der Gar. gew. V aufl.

in tre parti, addizionate rispettivamente: I) con peptone (2 °/₀₀); II) asparagina (2 °/₀₀); III) solfato ammonico, oltre a tracce di sali minerali e seminate nelle stesse condizioni con una medesima coltura pura di *Willia*; dopo 12 giorni di permanenza in termostato a 25°, l'analisi dei liquidi rivelò le seguenti percentuali di alcool (in peso):

I)	4,19
II)	4,25
III)	2,78

A malgrado di queste varianti nella composizione del substrato, si verifica costantemente, non appena la fermentazione è avviata, la formazione di un delicato, gradevolissimo profumo che ricorda non già l'etere acetico, ma bensì l'essenza di mela; non posso per ora almeno, fornire altri ragguagli in proposito, poichè le attuali contingenze non hanno permesso di procedere ad indagini più approfondite sulla biochimica di questo caratteristico lievito, che anche da questo studio sommario mi sembra doversi ritenere come una varietà fisiologica della specie scoperta dal Klocker.

Fisiologia. — *Ricerche sugli effetti dell'alimentazione maidica. Di alcune modificazioni nel metabolismo di cavie sottoposte ad alimentazione esclusiva di mais, di frumento o di erbe* [1]. Nota VIII di S. Baglioni, presentata dal Socio L. Luciani [2].

In continuazione delle ricerche sull'alimentazione maidica nell uomo e negli animali, dopo aver stabilito gli effetti di questa dieta nei ratti (Note VI e VII) mi proposi estendere le esperienze alla cavia, animale quasi esclusivamente erbivoro.

Scelsi pertanto sei cavie sane e normali, di cui quattro adulte e due in via di sviluppo, di sesso diverso, che precedentemente erano state alimentate con erbe di varia spece. Ognuna fu rinchiusa entro una gabbia usata per le precedenti ricerche di ricambio materiale dei ratti [3], che permetteva di misurare esattamente la quantità di cibo assunto giornalmente e di raccogliere separatamente le fecce e l'urina. Tre ne alimentai con farina di mais impastata, a freddo, con altrettanta quantità, oppure con una quantità doppia d'acqua condotta; una continuai ad alimentare con erbe, e due final-

[1] Ricerche eseguite nel Laboratorio fisiologico di Roma.
[2] Pervenuta all'Accademia il 3 agosto 1915.
[3] Questi Rendiconti, vol. XXII, 2° sem., pag. 721 (1913).

mente con farina di frumento impastata con altrettanta quantità d'acqua, oppure con pane imbevuto d'acqua. Ogni mattina pesavo la quantità di cibo consumato nelle 24 ore precedenti, pesavo l'animale, preparavo e pesavo il nuovo alimento, raccoglievo le fecce e l'urina. Le fecce pesavo semplicemente appena raccolte: dell'urina determinavo la quantità, il peso specifico e il grado della reazione, titolandone su cinque cc., filtrati e diluiti con dieci d'acqua, l'alcalinità (o eventualmente l'acidità) mediante soluzione $n/10$ di acido ossalico (o eventualmente di soda). Come indicatore mi servii dell'acido rosolico, e spesso, per controllo, della fenolftaleina. Nei giorni in cui, per la scarsezza del liquido, non potevo esaminare l'urina, la lasciavo nel cilindro per farla unire a quella del dì successivo. Abbondante aggiunta di cloroformio ne impediva la fermentazione ammoniacale.

Gli animali erano tenuti in una camera ampia, ben aereata e ben illuminata, la cui temperatura in media oscillò tra 18-25° C. (mesi di giugno e luglio 1915).

Oltremodo scarse sono le nostre nozioni sull'alimentazione, sulla secrezione urinaria e sul metabolismo, in genere, della cavia. Ecco quanto al riguardo ho potuto attingere all'articolo *Cobaye*, redatto da Ch. Livon, nel dizionario del Richet ([1]). Irregolarissimo è il regime alimentare quotidiano. La cavia è un animale molto impressionabile; la minima causa turba le sue funzioni respiratorie, circolatorie e, molto probabilmente, digestive, poichè non si potrebbero spiegare altrimenti le notevoli variazioni che si osservano da un giorno all'altro; basta, infatti, cambiare l'animale di gabbia o lasciarlo solo, per vedere la sua razione giornaliera subire un fortissimo turbamento. Alimentando tre serie di cavie, di cui la prima era costituita di maschi di 300-400 gr., la seconda di maschi di 700-800 gr. e la terza di femmine gravide di 1000 g. circa, con cavolo, frumento e avena, Livon vide che in media consumavano al giorno

1ª serie	♂	di circa 340 gr.,	90 gr. di cavolo	e 13 gr.	di frumento e avena
2ª »	♂	» 762 »	149 » »	» 24 »	» »
3ª »	♀	» 1005 »	122 » »	» 27 »	» »

Sulla secrezione urinaria possediamo i dati dell'Alezais ([2]) il quale, alimentando due caviotti adulti, di circa 730 gr., con cavolo e frumento, vide che eliminavano in media 60 cc. d'urina al giorno (oscillante tra i due estremi di 85 e 32 cc.), ossia circa 7 cc. per 100 gr. di peso del corpo. Era un liquido

([1]) Tome III, pp. 863-948 (1898).

([2]) Alezais, *De l'urine du cobaye*, Compt. rend. de la Soc. de Biolog., *48*, pp. 213-214 (1896); ibidem, *49*, pp. 413-414 (1897).

alcalino, giallo-latteo all'emissione, che diveniva giallastro dopo che, col riposo, si erano depositati sali, e imbruniva col tempo al contatto dell'aria. Talora, senza causa apparente, era colorata in rosso scuro, come se fosse ematurica; nei giorni seguenti ritornava però lattea. La sua densità media era di 1026, che scendeva a 1024 dopo il deposito dei sali; le cifre estreme 1021 e 1032 corrispondevano alla variazioni estreme della quantità. È molto ricca di sostanze solide, di urea, di acido fosforico ecc. Confrontando i valori medî generali dell'urea, eliminata coll'urina, dall'uomo, dal coniglio e dalla cavia, si trovano i seguenti rapporti: 4.5 - 9 - 12. Ciò indica la forte intensità dei processi catabolici della cavia.

Secondo Chossat [1], la durata della vita della cavia sottoposta al digiuno assoluto è, in media, di 6 giorni. Anche G. Swirski [2] trovò una durata simile, impedendo agli animali digiunanti di rimangiare le fecce.

Nessuna notizia ho potuto trovare sulle modificazioni che subisce la secrezione urinaria di quest'animale nelle varie alimentazioni o nel digiuno. Del coniglio (e, in genere, degli erbivori) si sa, però, che, nel digiuno, l'urina diventa acida [3]; ordinariamente si crede che la morte, relativamente rapida, di questi animali in inanizione, sia conseguenza in gran parte appunto dell'acidosi, che si svolge nei loro liquidi interni, pel consumo dei proprî tessuti e per la mancanza del normale alimento ricco di sali alcalini.

Nelle seguenti tabelle I-VI ho riassunto i risultati delle mie esperienze, riserbandomi, nella prossima Nota, di metterne in rilievo il valore discutendo le cause del cosiddetto maidismo sperimentale della cavia.

(1) E. Bardier, *Inanition*; Richets, *Dict. d. Physiol.*, tom. IX (1913).

(2) G. Swirski, *Ueber die Resorption und Ausscheidung des Eisens im Darmcanale des Meerschweinchens*, Pflügers Arch., *74*, pp. 466-510 (1899).

(3) Cfr. ad es. L. Pincussohn, *Physikalische Chemie des Harns*, C. Oppenheimers Handb. d. Bioch., III, *1*, pp. 684-708 (1910).

Tabella I.

Cavia I. ♂ — *Peso del corpo* 570 gr. *Alimento* 50 gr. di farina di mais + 50 cc. d'acqua.

Giorni	Peso del corpo gr.	Cibo assunto gr.	Fecce gr.	Urina				*Osservazioni*
				Quantità cc.	Densità	Reazione		
						alcalina cc. acido ossalico N/10	acida cc. soda N/10	
1	575	59	0.75	26		(ros.)* 16		Urina torbida. Reaz. Heller negativa.
2	585	54	4.0	14		» 11		Fecce normali.
3	565	19	1.3	14				Fecce secche.
4	540	22	1.6	20	1032	» 8		Reaz. Heller negativa.
5	520	22	2	14				Fecce giallastre secche.
6	487	14	2	22	1030		(ros.) 6	Fecce umide, con membrane mucose.
7	475	15	0.4	10				Fecce secche.
8	460	19	0.6	10	1036		» 4	Mangia con appetito. Urina chiara, gialla Heller, debolmente positiva.
9	450	18	0.6	6				Urina fortemente acida alla carta di tornasole. Fecce piccole.

Si alimenta con 330 gr. di trifoglio fresco, che mangia con appetito:

Giorni	Peso del corpo gr.	Cibo assunto gr.	Fecce gr.	Quantità cc.	Densità	alcalina	acida	Osservazioni
10	465	165	54	24		(ros.) 12.5		Urina scura torbida. Fecce grosse, umide, nere.

Si alimenta con 250 gr. di erbe di orto (rosolaccio):

Giorni	Peso del corpo gr.	Cibo assunto gr.	Fecce gr.	Quantità cc.	Densità	alcalina	acida	Osservazioni
11	470	151	31	86	1030	(ros.) 40 (fen.) 6.8		Urina torbida scura. Fecce grosse, umide, nere. Heller, debolmente positiva.

Si torna ad alimentare con farina di mais e acqua in parti uguali:

Giorni	Peso del corpo gr.	Cibo assunto gr.	Fecce gr.	Quantità cc.	Densità	alcalina	acida	Osservazioni
12	435	21	3	30		(ros.) 4.8 (fen.) 0.8		Urina torbida gialla. Heller, negativa. Fecce grosse, scure, dure.
13	405	16	1.3	24				Urina debolmente alcalina (tornasole). Fecce secche giallastre.
14	370	21	0.7	18	1033	(ros.) 1.6	(fen.) 2.0	Fecce durissime, giallo-brune. Heller, negativa. Mangia con grandissimo appetito.
15	365	18	3.5	12			(ros.) 1.8	Urina acida al tornasole. Fecce secche giallastre. Muore.

* L'indicazione (ros.) significa che la titolazione fu fatta coll'acido rosolico come indicatore; (fen.) significa che fu fatta invece colla fenolftaleina.

Sezione: *Stomaco*, ripieno di gas, vuoto di cibo, con liquido debolmente acido (tornasole); *tenue*, congesto e pieno di gas; *crasso*, pieno di fecce e gas; *cieco*, ripieno di poltiglia giallastra, commista a grosse bolle gasose: peso, 52 gr., 5 gr. di detta poltiglia stempero con 30 cc. di H_2O e filtro. Il filtrato ha reazione acida alla carta di tornasole e, titolato colla fenolftaleina, ha grado di acidità di 0.5. La reazione dell'amido (iodio) è negativa nella poltiglia. *Reni*, congesti; *vescica*, ripiena d'urina acidissima (tornasole). *Cistifellea*, rigurgitante di bile.

Tabella II.

Cavia II. ♀ — *Peso* 465 gr. *Alimento*, 50 gr. di farina di frumento fine + 50 cc. d'acqua.

Giorni	Peso del corpo gr.	Cibo assunto gr.	Fecce gr.	Urina				Osservazioni
				Quantità cc.	Densità	Reazione		
						alcalina cc. acido ossalico N/10	acida cc. soda N/10	
1	488	70	3	36		(ros.) 27		Fecce secche biancastre. Urina torbida. Heller, negativa.
2	464	0	2	11		» 5.5		Heller, negativa. Ha rifiutato il cibo, che si trova lievitato.
3	425	0	2	25				Urina chiara. Idem.
4	405	4	0.6	12	1032	» 2.1		Si dà solo farina senz'acqua. Heller, positiva.
5	390	0	0.4	5				Si dà pane di grano, secco, imbevuto con altrettanta quantità di acqua. Mangia subito con appetito.
6	370	11	6	18				Idem.
7	355	6	0.05	11	1022	» 2.0		Urina chiara. Heller, positiva. Morte.

Sezione: *Stomaco*, contenente poltiglia fluida, bruno-giallastra, debolmente alcalina (tornasole); *tenue* e *retto*, ripieni di gas fetido; *cieco*, pieno di massa poltacea bruno-giallastra, di cui una parte stempero con altrettanta acqua (il liquido filtrato ha evidente reazione acida alla carta di tornasole). Amido (iodio) assente. *Reni*, ingrossati, iperemici.

Tabella III.

Cavia III. — *Peso iniziale,* 435 gr. *Alimento,* erbe di orto di varia specie (rosolaccio trifoglio, lattuga e cavolo).

Giorni	Peso del corpo gr.	Cibo assunto gr.	Fecce gr.	Urina				Osservazioni
				Quantità cc.	Densità	Reazione: alcalina cc. acido ossalico N/10	Reazione: acida cc. soda N/10	
1	435	217	33	112	1021	(ros.) 88		Rosolaccio. Urina torbida lattea. Heller, negativa. Fecce grosse, nere.
2	425	206	30	110	1020	» 50		Idem. Idem. Idem. Idem.
3	420	215	34	126		» 126		Idem. Idem. Idem. Idem.
4	428	158	38	66	1024	» 79		Idem. Idem. Idem. Fecce molli.
5	420	217	35	110	1022	» 99		Idem. Idem. Idem. Idem.
6	406	248	48	144	1014	» 115		Erbe un po' bagnate. Idem. Idem. Idem.
7	415	195	55	52	1025	» 62		Rosolaccio. Idem Idem. Idem.
8	410	197	46	68	1025	» 44		Idem. Idem. Idem. Idem.
9	410	208	47	94	1020	» 52		Rosolaccio e trifoglio. Idem. Idem. Idem.
10	400	200	45	88	1018	(ros.) 63 (fen.) 15		Idem. Urina scura torbida. Fecce umide.
11	395	197	39	92	1022	(ros.) 75 (fen.) 11		Idem. Idem. Idem.
12	385	198	45	74	1027	(ros.) 89 (fen.) 57		Idem Idem. Idem.
13	365	230	28	210	1011	(ros.) 189 (fen.) 42		Lattuga Urina chiara poco torbida. Fecce umide.
14	370	172	20	44	1030	(ros.) 75 (fen.) 26		Rosolaccio. Urina scura torbida. Heller positiva. Fecce molli.
15	360	216	48	100	1017	(ros.) 20		Idem. Idem. Fecce molli.
16	380	185	25	92	1022	(ros.) 81		Cavolo e lattuga. Idem. Idem.
17	375	209	20	190	1012	(ros.) 114 (fen.) 38		Lattuga. Urina chiara. Fecce molli.
18	360	178	35	28	1030	(ros.) 34 (fen.) 8		Trifoglio. Urina scura torbida. Fecce secche.
19	360	128	30	36	1037	(ros.) 42 (fen.) 29		Idem. Idem. Idem.
20	365	192	28	100	1023	(ros.) 88 (fen.) 24		Cavolo. Fecce umide.
21	340	147	18	100	1018	(ros.) 42 (fen.) 4		Idem. Idem.
22	305	217	0.8	190	1012	(ros.) 111 (fen.) 60		Lattuga. Morte.

Sezione: *Stomaco,* contenente mediocre quantità di liquido chiaro filante giallo-verdognolo, fortemente alcalino (tornasole); *tenue,* vuoto, congesto, senza gas; *cieco,* ripieno di poltiglia densa granulosa giallo-bruna, a reazione neutra (tornasole); *crasso* e *retto,* pieni di fecce; *reni,* normali; *cistifellea,* rigonfia di bile chiara giallo-verde; *vescica,* ripiena di urina fortemente alcalina.

Tabella IV.

Cavia IV. ♀ — *Peso*, 640 gr. subito dopo aver mangiato abbondantemente erbe. Dopo tre giorni di digiuno, si *alimenta* con 25 gr. farina di mais impastata, a freddo, con 50 cc. d'acqua.

Giorni	Peso del corpo gr.	Cibo assunto gr.	Fecce gr.	Urina				Osservazioni
				Quantità cc.	Densità	Reazione		
						alcalina cc. acido ossalico N/10	acida cc. soda N/10	
1	570	0	6.0	40		(ros.) 30		Fecce secche. Urina scura torbida. Heller, negativa.
2	540	0	0.5	24				Urina chiara debolmente acida (tornasole). Perde pelo.
3	520	0	0.0	14	1028	» 1.6		Urina chiara. Heller, negativa.
4	535	37	0.0	14				Mangia con appetito.
5	510	22	0.0	18	1022	» 1.3		Urina chiara.
6	510	35	0.0	20				Idem debolmente acida (tornasole).
7	500	42	0.0	26	1018		(ros.) 5.6	Idem fortem. acida (tornasole). Heller, positiva.
8	500	42	0.1	38	1018		» 4.5 (fen.) 15.0	Urina giallo-paglierina chiara. Idem
9	490	42	0.1	26				Urina chiara, fortem. acida (tornasole).
10	495	51	0.0	28	1020		(ros.) 9.0 (fen.) 21.0	Urina chiara limpida, come sopra. Heller, positiva.
11	490	46	0.3	38				Idem.
12	470	35	4.0	20	1017		(ros.) 2.4 (fen.) 4.8	Idem. Fecce piccole, giallastre, secche.
13	465	43	1.7	38				Idem. Idem.
14	450	37	1.1	15	1015	» 3.6	» 1.5	Idem Heller, positiva. Fecce piccole secche.
15	450	38	1.7	18				
16	450	35	0.3	20	1025	» 4.0	» 2.4	Idem.
17	442	33	1.1	25				Idem. Fecce nere piccolissime, simili a quelle dei topi.
18	435	41	1.1	17	1020	» 6.5	» 1.4	Urina chiara. Fecce piccole, in parte umide.
19	430	41	4.1	26				Idem. Fecce piccole umide.
20	420	41	0.0	22	1016	» 8.2	» 0.0	
21	420	39	3.0	26				
22	420	45	0.4	24	1016	» 8.6 (fen.) 3.0		Idem. Heller, debolmente positiva.
23	410	42	6.5	22				Urina rosso-scura. Fecce grosse molli.
24	398	42	6.3	18	1018	(ros.) 1.8	» 2.5	Urina rosso-scura (mescolata a fecce ?). Heller, positiva. Fecce grosse umide.
25	395	44	11.0	10				Idem. Fecce quasi diarroiche.
26	392	50	4.5	12	1015	» 3.8	» 0.0	Idem. Idem.
27	385	48	3.5	14				Idem. Idem.
28	375	46		14	1016	» 7.0 (fen.) 2.3		Idem. Fecce diarroiche.
29	370	55	6.0	18				Idem. Idem.
30	355	42	2.0	12				Idem. Idem.
31	350	38		16				Idem. Fecce diarroiche, pochissime.
32	335	16	2.0	18	1018	(ros.) 17.0		Urina scura (mescolata a fecce ?). Fecce diarroiche. Morte.

Sezione: *Pediculosi. Stomaco*, vuoto; *tenue*, vuoto, congesto; *cieco*, pochissimo disteso, contenente poltiglia giallo-scura, commista a gas, di reazione acida; *vescica*, congesta; *reni*, normali.

Tabella V.

Cavia V. — *Peso*, 184 gr. *Alimento*, pane di frumento 15 gr. inzuppato con 30 cc. d'acqua.

Giorni	Peso del corpo gr.	Cibo assunto gr.	Fecce gr.	Urina				Osservazioni
				Quantità cc	Densità	Reazione		
						alcalina cc. acido ossalico N/10	acida cc. soda N/10	
1	175	7	0	5				Pane solo, senz'acqua. Urina alcalina (tornasole).
2	182	25	0	8				Pane con acqua. Urina debolmente acida (tornasole). Appetito,
3	185	30	0	5				Idem. Idem. Idem.
4	183	25	0	9				Idem. Idem Idem.
5	190	21	0	7	1028	(ros.) 0.3	(fen.) 0.6	Idem. Heller, negativa.
6	180	22	0	12				Idem. Urina debolm. acida (tornasole).
7	179	0	1.3	5			(fen.) 1.4	Urina acida anche all'acido rosolico. Fecce secche piccolissime. Heller, positiva. Morte.

Sezione: *Pediculosi*. *Stomaco*, vuoto; *cieco*, mediocremente pieno di poltiglia bruna e gas; reazione della poltiglia alla carta di tornasole, debolmente acida.

Tabella VI.

Cavia VI. ♂ — *Peso iniziale*, 212 gr. *Alimento*, farina di mais 20 gr. + 40 cc. d'acqua.

Giorni	Peso del corpo gr.	Cibo assunto gr.	Fecce gr.	Quantità cc	Densità	alcalina	acida	Osservazioni
1	225	46	0.0	20				Urina chiara, giallo-paglierina. Reazione (tornasole) anfotera.
2	232	42	0.20	14	1020	(ros) 1.5	(fen.) 1.2	Urina chiara. Heller, negativa. Fecce piccole, secche.
3	230	40	0.0	22				Idem.
4	228	33	0.0	14	1020	» 2.8	» 2.5	Idem.
5	223	39	1.6	22				
6	212	36	2.0	18	1015	» 6.3 (fen.) 1.0		Idem.
7	206	36	2.3	16				Idem. Fecce nere piccolissime, secche.
8	211	33	0.1	12	1018	(ros.) 9.5 (fen.) 3.6		Idem. Idem.
9	207	36	0.5	10				
10	212	35	0.1	14	1016	(ros.) 11.0 (fen.) 4.0		Idem. Idem.
11	210	34	0.0	16				Idem.
12	202	31	1.5	10	1020	(ros.) 6.2 (fen.) 1.6		Idem. Fecce piccole molli.
13	202	41	0.7	16				Idem. Fecce piccoliss., secche. Appetito.
14	200	39	0.5	12				Idem. Idem. Idem.
15	193	34	2.0	10				Idem. Idem. Idem.
16	194	36	2.5	6	1018	(ros.) 6.0		Idem. Idem. Idem.
17	196	40	2.0	12				Idem. Idem. Idem.
18	195	35	2.0	12		» 8.0		Idem. Idem. Idem.
19	192	37	2.7	12		» 9.0		Idem. Fecce in parte molli.
20	192	37	1.0	0				
21	187	30	2.0	4				Urina rosso-scura (mescolata a fecce ?). Fecce grosse umide.
22	185	28	2.5	4				Idem. Fecce quasi diarroiche
23	170	34	6.0	5				Urina scuro-nerastra (commista a fecce ?). Fecce diarroiche.
24	169	0	0	2				Morte.

Sezione: *Pediculosi*. *Stomaco*, vuoto; *tenue*, fortemente iperemico, ripieno di poltiglia giallognola; *cieco* e *retto*, enormemente rigonfi di poltiglia gialla e gas, a reazione neutra. Pareti fortemente iperemiche; *reni* e *surreni*, normali; *vescica*, idem, vuota.

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-XXIV. (1892-1915). Fasc. 4°. Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XXIV. (1892-1915). Fasc. 1-2.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-XI. Fasc. 3.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

RENDICONTI — Agosto 1915.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie, sino al 15 agosto 1915.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 16 settembre 1915.* **N. 5.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXIV°. — Fascicolo 5°

2° SEMESTRE.

Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie sino al 5 settembre **1915.**

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI
pervenute all'Accademia durante le ferie del 1915.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Matematica. — *Sulle superficie le cui linee di curvatura di un sistema tagliano sotto angolo costante le generatrici dei coni che le proiettano da un punto fisso.* Nota del Socio Luigi Bianchi [1].

1. Da recenti studî sui sistemi tripli di superficie ortogonali, di cui è apparso un primo saggio nel fascicolo 10° (1° semestre) di questi Rendiconti [2], sono stato condotto a considerare, in particolare, una classe di superficie definita dalla seguente proprietà delle linee di curvatura di un sistema: *queste linee di curvatura tagliano tutte, sotto il medesimo angolo costante* σ (*non retto*), *le generatrici dei coni che le proiettano da un punto fisso* O *dello spazio.*

Le superficie così definite, esclusa un'ovvia classe particolare di cui ora subito diremo, vengono a dipendere, in modo geometrico notevole. dalle superficie pseudosferiche.

La classe particolare accennata, che nel seguito intenderemo di escludere, è data da quelle superficie Σ le cui normali in ogni punto P sono inclinate dell'angolo costante $\frac{\pi}{2} - \sigma$ sul raggio vettore OP che va dal punto

(1) Pervenuta all'Accademia il 26 agosto 1915.

(2) *Sopra una classe di sistemi tripli di superficie ortogonali* (seduta del 16 maggio 1915).

fisso al piede della normale P. Ciò equivale manifestamente a dire che tutte le sfere col centro in O segano la superficie Σ sotto quest'angolo costante, onde segue che le linee d'intersezione di queste sfere con Σ sono linee di curvatura di Σ; per ciò Σ è intanto una superficie *modanata*, la cui sviluppabile direttrice è un cono col vertice in O (ved. *Lezioni di geometria differenziale*, vol. II, § 319). Di più le linee di curvatura dell'altro sistema sono tracciate nei piani tangenti di questo cono, e, incontrando ivi le rette del fascio col centro in O sotto l'angolo costante σ, sono *spirali logaritmiche* (eguali) col polo in O. Viceversa, ogni superficie modanata a direttrice conica, il cui profilo piano generatore sia una spirale logaritmica col polo nel vertice del cono, è una superficie Σ della classe richiesta.

Se prendiamo il punto fisso O come origine delle coordinate cartesiane, e scriviamo l'equazione di queste superficie modanate Σ sotto la forma ordinaria $z = z(x, y)$, è chiaro che le superficie Σ sono tutte e sole le superficie integrali della equazione a derivate parziali del primo ordine

$$\frac{px + qy - z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \operatorname{sen} \sigma, \tag{1}$$

poichè questa esprime appunto che la normale alla superficie è inclinata dell'angolo $\frac{\pi}{2} - \sigma$ sul raggio vettore che va al piede della normale.

Dalle considerazioni seguenti intenderemo escluso questo caso ovvio di superficie della classe richiesta, dove i coni proiettanti, su cui le dette linee di curvatura sono *lossodromiche* sotto l'angolo σ, si riducono a piani.

2. Per una superficie qualunque S, si scrive subito l'equazione differenziale di quelle linee, tracciate su S, la cui tangente in ogni punto P è inclinata dell'angolo costante σ sul raggio vettore OP. Essa è manifestamente

$$\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \cos \sigma,$$

ovvero, se poniamo per brevità $\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$,

$$\left\{\begin{aligned} &\{(x + pz)^2 - \varrho^2 \cos^2\sigma(1 + p^2)\}\, dx^2 + \\ &+ 2\{(x + pz)(y + qz) - \varrho^2 \cos^2\sigma\, pq\}\, dx\, dy + \\ &+ \{(y + qz)^2 - \varrho^2 \cos^2\sigma(1 + q^2)\}\, dy^2 = 0 . \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Per le superficie generali da noi cercate, queste linee debbono coincidere con un sistema di linee di curvatura di S, per il che occorre e basta

che l'equazione (2) di secondo grado nel rapporto $\frac{dx}{dy}$ abbia una radice a comune coll'analoga per le linee di curvatura

$$(2^*) \qquad \{(1+p^2)s-pqr\}\,dx^2+\{(1+p^2)t-(1+q^2)r\}\,dx\,dy+ \\ +\{pqt-(1+q^2)s\}\,dy^2=0\,.$$

Eguagliando a zero la risultante delle due equazioni di secondo grado (2), (2*), si ha dunque *l'equazione a derivate parziali del secondo ordine caratteristica per le superficie richieste.* Risulterà, dalle ricerche seguenti, che l'integrazione di questa equazione (che non importa scrivere esplicitamente) equivale a quella della equazione per le superficie pseudosferiche. È poi evidente che l'equazione del 1° ordine (1) fornisce un integrale *particolare* dell'equazione stessa.

Non lascieremo di osservare che nel caso limite, ove il punto fisso O si respinga all'infinito, in una determinata direzione, l'integrazione della corrispondente equazione del 2° ordine si effettua subito geometricamente. In questo caso le superficie integrali, come risulta dalle proprietà della rappresentazione sferica, sono tutte e sole le superficie modanate la cui sviluppabile direttrice ha i piani tangenti inclinati dell'angolo costante σ sulla detta direzione, restando arbitrario il profilo piano generatore [1].

3. Per ricercare le superficie S dotate della proprietà prescritta ci serviremo delle formole per la rappresentazione sferica: cosa che possiamo fare senza omettere alcun caso, perchè, come facilmente si vede, nessuna sviluppabile trovasi fra le superficie richieste.

Indichiamo con

$$(3) \qquad ds'^2=e\,du^2+g\,dv^2$$

il quadrato dell'elemento lineare nella rappresentazione, sicchè intanto i coefficienti e, g dovranno soddisfare all'equazione

$$(4) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\right)+\sqrt{eg}=0\,,$$

che dà la condizione necessaria e sufficiente perchè l'elemento lineare (3) appartenga alla sfera di raggio $=1$.

[1] Si consideri che le immagini delle linee di curvatura inclinate di un angolo costante sopra la direzione fissa sono eliche sferiche congruenti per rotaziono attorno al diametro della sfera che ha quella direzione, e le loro traiettorie sono circoli massimi i cui piani inviluppano un cono di rotazione. Di qui le proprietà segnalate nel testo.

Indichiamo, al solito, con (X_i, Y_i, Z_i) $i = 1, 2, 3$ i coseni di direzione dei tre spigoli del triedro principale, e cioè con

X_1, Y_1, Z_1 i coseni della tangente alla $v = \text{cost}$
X_2, Y_2, Z_2 " " $u = \text{cost}$
X_3, Y_3, Z_3 " della normale alla sfera.

Questi soddisfano, come si sa, alle equazioni del quadro seguente:

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}X_2 - \sqrt{e}\,X_3 \quad , \quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}X_2 \\ &\frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}X_1 \quad , \quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}X_1 - \sqrt{g}\,X_3 \\ &\frac{\partial X_3}{\partial u} = \sqrt{e}\,X_1 \quad , \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = \sqrt{g}\,X_2 , \end{aligned} \right.$$

colle analoghe per Y e Z. Determiniamo poi la nostra superficie S in coordinate tangenziali prendendo per incognite le tre distanze (algebriche) W_1, W_2, W_3 dell'origine O dalle tre facce del triedro principale col vertice nel punto (x, y, z) di S; precisamente poniamo

$$W_1 = SxX_1 \quad , \quad W_2 = SxX_2 \quad , \quad W_3 = SxX_3 .$$

Come risulta derivando, le tre funzioni W_1, W_2, W_3 debbono soddisfare al sistema differenziale

$$(\mathrm{I})\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial W_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}W_2 \quad , \quad \frac{\partial W_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}W_1 , \\ &\frac{\partial W_3}{\partial u} = \sqrt{e}\,W_1 \quad , \quad \frac{\partial W_3}{\partial v} = \sqrt{g}\,W_2 . \end{aligned} \right.$$

Viceversa, se (W_1, W_2, W_3) è una terna qualunque di soluzioni delle (I), si ha una corrispondente superficie S coll'assegnata immagine sferica, data dalle formole

$$(6)\qquad x = W_1X_1 + W_2X_2 + W_3X_3 ,$$

colle analoghe per y, z.

Ora, venendo alla nostra ipotesi, supponiamo che sulla S le linee di curvatura di un sistema, p. es. le $u = \text{cost}$, abbiano in ogni loro punto P

la tangente inclinata dell'angolo fisso σ sul raggio vettore OP. Siccome X_2, Y_2, Z_2 sono i coseni di direzione della detta tangente, mentre quelli del raggio vettore OP, essendo

$$x^2 + y^2 + z^2 = W_1^2 + W_2^2 + W_3^2,$$

possono scriversi

$$\frac{x}{\sqrt{W_1^2 + W_2^2 + W_3^2}} \quad , \quad \frac{y}{\sqrt{W_1^2 + W_2^2 + W_3^2}} \quad , \quad \frac{z}{\sqrt{W_1^2 + W_2^2 + W_3^2}} ,$$

la nostra ipotesi si traduce nell'equazione

$$\frac{x X_2 + y Y_2 + z Z_2}{\sqrt{W_1^2 + W_2^2 + W_3^2}} = \frac{W_2}{\sqrt{W_1^2 + W_2^2 + W_3^2}} = \cos\sigma ,$$

ossia

$$W_1^2 + W_3^2 = \mathrm{tg}^2\sigma \, W_2^2 . \tag{7}$$

Viceversa, se le funzioni W_1, W_2, W_3 soddisfano alle equazioni differenziali (I), ed a questa (7) in termini finiti, la superficie S, data dalle (6), apparterrà alla classe richiesta. Il nostro problema si riduce dunque ad esaminare per quali forme particolari dell'elemento lineare sferico (3) ammette soluzioni il sistema che si ottiene aggregando alle (I) l'equazione in termini finiti (7).

4. Per questa ricerca procediamo, come insegnano i metodi generali, formando le conseguenze differenziali della (7) che si aggregheranno al sistema (I). Derivando la (7) rapporto ad u, v, ed osservando le (I), troviamo:

$$\left\{\begin{aligned} & W_1 \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial u} + \sqrt{e}\, W_3 - \mathrm{tg}^2\sigma \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} W_2 \right\} = 0 \\ & W_2 \left\{ -\mathrm{tg}^2\sigma \frac{\partial W_2}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} W_1 + \sqrt{g}\, W_3 \right\} = 0 . \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Ora, i casi, in cui si annullasse W_1 o W_2, sono da escludersi: il secondo, perchè incompatibile colla (7); il primo, perchè condurrebbe appunto alle superficie modanate del n. 1 [1], caso che trascuriamo. Ed allora, soppri-

[1] Se $W_1 = 0$, per la (7) si può fare $W_3 = \mathrm{tg}\,\sigma W_2$, e le (I) dànno

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} = 0 \quad , \quad \frac{\partial W_2}{\partial u} = 0 \quad , \quad \frac{\partial W_2}{\partial v} = \sqrt{g} \cot\sigma \, W_2 .$$

La prima di queste dice che le linee $u = \mathrm{cost}$ sulla sfera sono circoli massimi (geodetiche), onde si può fare $g = 1$, e resta

$$W_1 = 0 \quad , \quad W_2 = C e^{v \cot\sigma} \quad , \quad W_3 = C \,\mathrm{tg}\,\sigma\, e^{v \cot\sigma} \,(C \text{ cost}),$$

formole che, come subito si vede, corrispondono alle superficie modanate del n. 1.

mendo dalle (8) i fattori W_1, W_2, ed aggregando alle (I) le equazioni così ottenute, otteniamo per le funzioni incognite W_1, W_2, W_3 il sistema seguente:

$$
\text{(II)} \quad \left\{
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial W_1}{\partial u} = \operatorname{tg}^2\sigma \dfrac{1}{\sqrt{g}} \dfrac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} W_2 - \sqrt{e}\, W_3 \quad , & \dfrac{\partial W_1}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{e}} \dfrac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} W_2 \\[2ex]
\dfrac{\partial W_2}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{g}} \dfrac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} W_1 \quad , & \dfrac{\partial W_2}{\partial v} = \cot^2\sigma \left\{ \dfrac{1}{\sqrt{e}} \dfrac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} W_1 + \sqrt{g}\, W_3 \right\} \\[2ex]
\dfrac{\partial W_3}{\partial u} = \sqrt{e}\, W_1 \quad , & \dfrac{\partial W_3}{\partial v} = \sqrt{g}\, W_2 .
\end{array}
\right.
$$

Questo è un sistema lineare omogeneo ai differenziali totali in W_1, W_2, W_3; e se costruiamo le relative condizioni d'integrabilità, troviamo che esse si riducono all'unica seguente:

$$
(9) \qquad \operatorname{tg}^2\sigma \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}\right) + \sqrt{eg} .
$$

Se supponiamo che i coefficienti e, g dell'elemento lineare sferico (3) soddisfino, insieme alla (4), anche alla (9), il sistema differenziale (II) è completamente integrabile, sicchè l'integrale generale (W_1, W_2, W_3) dipende da tre costanti arbitrarie, potendosi fissare ad arbitrio, per un sistema iniziale $u = u_0$, $v = v_0$ delle variabili, i valori di W_1, W_2, W_3, ciò che fissa la terna integrale. Ma di più si vede che il sistema differenziale (II) ammette l'integrale quadratico

$$
W_1^2 + W_3^2 - \operatorname{tg}^2\sigma W_2^2 = \text{cost} ,
$$

e basta quindi prendere i valori iniziali di W_1, W_2, W_3 in guisa ch si annulli la costante del secondo membro, dopo di che risulterà soddisfatta la (7), e le formole (6) daranno una superficie S della classe cercata.

5. Il nostro problema è, così, ricondotto essenzialmente alla ricerca di quelle forme (3) dell'elemento lineare sferico, i cui coefficienti e, g soddisfanno insieme alla (4) ed alla (9), ossia alle due equazioni

$$
\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v}\right) = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}\right) + \sqrt{eg} = 0 ,
$$

ovvero

$$
\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v}\right) = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial u}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}\right)^2 + g\right\} = 0 .
$$

Queste, integrate, dànno

$$
\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} = U \quad , \quad \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}\right)^2 + g = V ,
$$

dove U è funzione di u soltanto, e V di v soltanto; e poichè, cangiando i parametri u, v, si viene a moltiplicare U per una funzione arbitraria di u, e V per una funzione arbitraria (positiva) di v, possiamo disporre dei parametri in guisa da rendere $U = V = 1$, dopo di che avremo

$$\text{(10)} \qquad \sqrt{g} = \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} \quad , \quad \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}\right)^2 + g = 1 .$$

La forma di questa seconda suggerisce l'introduzione di un angolo ausiliario colle posizioni

$$\sqrt{g} = \operatorname{sen} \omega \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} = \cos \omega .$$

onde risulta

$$\sqrt{g} = \frac{\partial \omega}{\partial u} ,$$

e la prima delle (10) si traduce nell'equazione a derivate parziali per ω

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \, \partial v} = \operatorname{sen} \omega .$$

Questa è la notissima equazione da cui dipende la ricerca della superficie pseudosferiche. E viceversa, se ω è una soluzione della (III), assumendo

$$\sqrt{e} = \frac{\partial \omega}{\partial u} \quad , \quad \sqrt{g} = \operatorname{sen} \omega ,$$

l'elemento lineare

$$\text{(11)} \qquad ds'^2 = \left(\frac{\partial \omega}{\partial u}\right)^2 du^2 + \operatorname{sen}^2 \omega \, dv^2$$

appartiene alla sfera di raggio $= 1$; ed avendosi

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} = \cos \omega \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} = 1 ,$$

tutte le condizioni sono soddisfatte. Pertanto ad ogni soluzione ω della (III) corrispondono ∞^2 superficie S le cui linee di curvatura $u = \text{cost}$, proiettate dall'origine, sono lossodromiche, sotto l'angolo fisso arbitrario σ, dei coni proiettanti. Esse si ottengono integrando il sistema differenziale completamente integrabile corrispondente a (II):

$$\text{(A)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial u} &= \operatorname{tg}^2 \sigma W_2 - \frac{\partial \omega}{\partial u} W_3 \quad , & \frac{\partial W_1}{\partial v} &= \cos \omega W_2 \\ \frac{\partial W_2}{\partial u} &= W_1 \quad , & \frac{\partial W_2}{\partial v} &= \cot^2 \sigma (\cos \omega W_1 + \operatorname{sen} \omega W_3) \\ \frac{\partial W_3}{\partial u} &= \frac{\partial \omega}{\partial u} W_1 \quad , & \frac{\partial W_3}{\partial v} &= \operatorname{sen} \omega W_2 , \end{aligned} \right.$$

scegliendo una terna integrale (W_1, W_2, W_3) che soddisfi *inizialmente* alla (7), e quindi anche per tutti i valori di u, v (n. 4). Sostituiti i valori di una tale terna nelle formole (6), si ha così una delle nostre superficie S, coll'assegnata rappresentazione sferica (11), le quali vengono in effetto a dipendere da due costanti arbitrarie. Si osservi, per altro, che una di esse è puramente moltiplicativa in W_1, W_2, W_3, e non è quindi altro, per le (6), se non una *costante d'omotetia*.

6. Conviene, ora, che interpretiamo geometricamente i risultati ottenuti, per la qual cosa cominciamo dallo scrivere il sistema differenziale (5), cui soddisfano i nove coseni (X_i, Y_i, Z_i) nel caso attuale dell'elemento lineare sferico (11), e cioè

$$
(12)\quad \left\{
\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -X_2 - \dfrac{\partial \omega}{\partial u} X_3 & , & \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \cos\omega\, X_2 \\[2ex]
\dfrac{\partial X_2}{\partial u} = X_1 & , & \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\cos\omega\, X_1 - \operatorname{sen}\omega\, X_3 \\[2ex]
\dfrac{\partial X_3}{\partial u} = \dfrac{\partial \omega}{\partial u} & , & \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = \operatorname{sen}\omega\, X_2
\end{array}
\right.
$$

Segue, da queste, che si ha

$$
\frac{\partial^2 X_2}{\partial u\, \partial v} = \cos\omega \,.\, X_2 \,,
$$

cioè le tre funzioni

$$
\xi = X_2 \quad , \quad \eta = Y_2 \quad , \quad \zeta = Z_2 \,,
$$

sono soluzioni dell'equazione di Moutard

$$
\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u\, \partial v} = \cos\omega \,.\, \Theta
$$

legate dall'identità quadratica

$$
\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \,.
$$

Per le formole di Lelieuvre relative alle asintotiche (*Lezioni*, vol. I, § 77), vi corrisponde quindi una superficie pseudosferica S_0 di raggio $= 1$, le cui coordinate x_0, y_0, z_0 di un punto mobile si calcolano per quadrature dalle formole (Lelieuvre):

$$
\frac{\partial x_0}{\partial u} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial Y_2}{\partial u} & \dfrac{\partial Z_2}{\partial u} \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \quad , \quad \frac{\partial x_0}{\partial v} = \begin{vmatrix} Y_2 & Z_2 \\ \dfrac{\partial Y_2}{\partial v} & \dfrac{\partial Z_2}{\partial v} \end{vmatrix} \,,
$$

le quali, osservando le (12), si trasformano subito nelle altre

$$\frac{\partial x_0}{\partial u} = X_3 \quad , \quad \frac{\partial x_0}{\partial v} = \cos\omega X_3 - \operatorname{sen}\omega X_1 \,. \tag{13}$$

Per l'elemento lineare sferico ds_0 della superficie pseudosferica S_0, riferita alle asintotiche (u, v), risulta di qui la ben nota forma

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\omega\, du\, dv + dv^2 \,. \tag{14}$$

Si osservi, di più, che, per le prime (13), X_3, Y_3, Z_3 sono i coseni di direzione della tangente all'asintotica $v =$ cost su S_0, e si ha, per la (11),

$$dX_3^2 + dY_3^2 + dZ_3^2 = \left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)^2 du^2 + \operatorname{sen}^2\omega\, dv^2 \,.$$

Ne concludiamo quindi:

La forma (11) *dell'elemento lineare sferico, con* ω *soluzione della* (III), *si ottiene, nel modo più generale, considerando la congruenza delle tangenti alle asintotiche di un sistema di una superficie pseudosferica* S_0 *e prendendo nella rappresentazione sferica della congruenza il sistema sferico* (*ortogonale* u, v) *che corrisponde alle asintotiche dei due sistemi.*

7. Ora esaminiamo meglio la dipendenza geometrica delle nostre superficie S dalle pseudosferiche S_0, partendo dall'osservazione che X_2, Y_2, Z_2 sono, ad un tempo, i coseni di direzione della tangente alla linea di curvatura $u =$ cost sopra S e della normale alla superficie pseudosferica S_0. Pertanto, nella congruenza della tangente alle $u =$ cost su S, l'immagine sferica (u, v) delle sviluppabili è quella delle asintotiche della pseudosferica S_0, e per ciò la congruenza stessa non è che una *congruenza di Guichard* (ved. *Lezioni*, vol I, § 151). Le sue sviluppabili (u, v) tagliano cioè non solo la prima falda focale S, ma anche la seconda, che diremo S′, lungo le linee di curvatura. Questo confermeremo ora subito col calcolo diretto, e di più dimostreremo che questa seconda falda S′ è, alla sua volta, una superficie della medesima classe: con questo, però, che *le sue linee di curvatura lossodromiche dei coni proiettanti dall'origine sono quelle dell'altro sistema* $v =$ *cost*, *e l'angolo* σ *si cambia nel suo complemento* $\frac{\pi}{2} - \sigma$.

Prendiamo le formole (6), che definiscono S; e derivandole rapporto ad u, v, osservando le (A) e le (12), otterremo

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{\cos^2\sigma} W_2 . X_1 \,,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\sigma} (\cos\omega W_1 + \operatorname{sen}\omega W_3) . X_2 = \frac{1}{\cos^2\sigma} \frac{\partial W_2}{\partial v} \cdot X_2 \,;$$

indi, pel ds^2 della S,

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^4\sigma}\left\{ W_2^2\,du^2 + \left(\frac{\partial W_2}{\partial v}\right)^2 dv^2 \right\}. \tag{15}$$

Nella congruenza delle tangenti alle linee $u = \text{cost}$ sopra S, il primo fuoco F è il punto di contatto con S; e per l'ascissa ϱ del secondo fuoco F′ misurata sul raggio, che coincide col valore algebrico del raggio di curvatura geodetica delle $v = \text{cost}$, abbiamo dalla (15)

$$\varrho = -\frac{W_2}{\cos^2\sigma}.$$

Indicando dunque con x', y', z' le coordinate di F′, avremo le formole

$$x' = W_1 X_1 - \operatorname{tg}^2\sigma W_2 X_2 + W_3 X_3,$$

colle analoghe per y', z', che definiscono la seconda falda focale S′. Derivando rapporto ad u, v, abbiamo

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = -\frac{W_1}{\cos^2\sigma} X_2 \quad , \quad \frac{\partial x'}{\partial v} = \frac{W_2}{\cos^2\sigma}(\cos\omega X_1 + \operatorname{sen}\omega X_3),$$

e conseguentemente

$$ds'^2 = \frac{1}{\cos^4\sigma}\left\{ \left(\frac{\partial W_2}{\partial u}\right)^2 du^2 + W_2^2\,dv^2 \right\}. \tag{15'}$$

Indicando gli accenti quantità relative alla S′, si deduce inoltre, dalle formole, precedenti

$$X'_1 = X_2 \;,\; Y'_2 = \cos\omega X_1 + \operatorname{sen}\omega X_3 \;,\; X'_3 = \operatorname{sen}\omega X_1 - \cos\omega X_3,$$

e quindi

$$W'_1 = Sx'X'_1 = -\operatorname{tg}^2\sigma W_2 \quad , \quad W'_2 = Sx'X'_2 = \cos\omega W_1 + \operatorname{sen}\omega W_3,$$
$$W'_3 = Sx'X'_3 = \operatorname{sen}\omega W_1 + \cos\omega W_3.$$

Come si vede, le linee u, v sono linee di curvatura per la S′, e, a causa della (7), sussiste fra W'_1, W'_2, W'_3 la relazione quadratica

$$W'^2_2 + W'^2_3 = \cot^2\sigma W'^2_1.$$

Ma questa è la (7) stessa, scambiato u con v e cangiato σ nel complemento $\frac{\pi}{2} - \sigma$; onde risultano confermate le proprietà enunciate.

Compendiando i risultati ottenuti, abbiamo la proposizione seguente:

Nota una superficie S *della classe richiesta, se ne ha subito una seconda* S′ *costruendo la congruenza delle tangenti a quelle linee di cur-*

vatura di S *che sono lossodromiche, sotto l'angolo* σ, *dei coni che le proiettano dall'origine, e prendendo la seconda falda focale* S' *della congruenza stessa. Sopra la* S' *le linee di curvatura lossodromiche dei coni proiettanti dall'origine sono quelle del sistema opposto, e l'angolo d'inclinazione* σ *è cangiato nel suo complemento* $\frac{\pi}{2} - \sigma$.

8. La costruzione ora indicata dà in sostanza una trasformazione *involutoria* delle nostre superficie S, che vengono sempre a presentarsi a coppie associate (S , S'), sicchè le superficie di una stessa coppia sono le due falde focali di una speciale congruenza di Guichard e corrispondono ad una medesima superficie pseudosferica S_0, le normali di S essendo parallele alle tangenti delle asintotiche di un sistema di S_0, e quelle di S' alle tangenti delle asintotiche dell'altro sistema.

Ora osserviamo che si ottiene un'altra trasformazione involutoria semplicissima delle superficie S dall'inversione per raggi vettori reciproci rispetto all'origine. E infatti, siccome l'inversione conserva gli angoli e le linee di curvatura e lascia fisse le rette per l'origine, è evidente che sussiste il teorema:

Una superficie S, *le cui linee di curvatura di un sistema sono lossodromiche, sotto l'angolo costante* σ, *dei coni che le proiettano dall'origine* O, *si cangia per un' inversione rispetto all'origine in un'altra superficie* $\bar{S}$ *della medesima classe, e corrispondente allo stesso angolo* σ.

E qui non fa nemmeno eccezione il caso delle superficie modanate del n. 1, le quali per l'inversione si cangiano in altre tali superficie modanate.

Ritornando al caso generale, osserviamo che, mentre la superficie S corrispondeva ad una certa soluzione ω della (III), la sua trasformata $\bar{S}$ per raggi vettori reciproci corrisponderà ad una nuova soluzione $\bar{\omega}$, la quale si può subito calcolare dalle formole d' inversione.

Sembra così, a prima giunta, che questo risultato dia una nuova classe di trasformazioni delle superficie pseudosferiche. Ma una più attenta analisi dimostrerebbe che, in realtà, le trasformazioni così ottenute si riducono in sostanza alle trasformazioni di Bäcklund.

9. Si è ricondotta la determinazione delle superficie S a quella delle superficie pseudosferiche S_0, ed alla successiva integrazione del sistema differenziale (A). Che cosa possiamo dire rispetto alla integrazione di quest'ultimo sistema? Dimostreremo che: *l'integrazione del sistema differenziale* (A) *si può effettuare in termini finiti, appena si conoscano le linee geodetiche della superficie pseudosferica* S_0, *nel caso di* $\sigma = 45°$, *o quelle di una sua trasformata di Lie nel caso generale.*

Cominciando dall' indicato caso particolare di $\sigma = 45°$, già per sè molto

notevole, osserviamo che il sistema differenziale (A), essendo qui $\operatorname{tg}\sigma = 1$, diventa:

$$(A^*) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial W_1}{\partial u} = W_2 - \dfrac{\partial \omega}{\partial u} W_3 \quad , \quad \dfrac{\partial W_1}{\partial v} = \cos\omega \, . \, W_2 \\[2mm] \dfrac{\partial W_2}{\partial u} = W_1 \quad , \quad \dfrac{\partial W_2}{\partial v} = \cos\omega W_1 + \operatorname{sen}\omega W_3 \\[2mm] \dfrac{\partial W_3}{\partial u} = \dfrac{\partial \omega}{\partial u} W_1 \quad , \quad \dfrac{\partial W_3}{\partial v} = \operatorname{sen}\omega W_2 \, . \end{cases}$$

Ora, supposto di averne una terna integrale W_1, W_2, W_3, che soddisfi alla corrispondente condizione (7)

$$(16) \qquad W_1^2 + W_3^2 = W_2^2 ,$$

dimostriamo che

Sulla superficie pseudosferica S_0 *le linee* $W_2 = \text{cost}$ *formano un sistema di oricicli paralleli.*

Per questo cominciamo dal calcolare il parametro differenziale primo $\Delta_1 W_2$ della W_2 rispetto all'elemento lineare (14) della S_0, cioè

$$\Delta_1 W_2 = \frac{\left(\dfrac{\partial W_2}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial W_2}{\partial v}\right)^2 - 2\cos\omega \dfrac{\partial W_2}{\partial u}\dfrac{\partial W_2}{\partial v}}{\operatorname{sen}^2\omega} ,$$

e troveremo subito, dalle (A*) e dalla (16),

$$(17) \qquad \Delta_1 W_2 = W_2^2 .$$

Indi calcoliamo la curvatura geodetica $\dfrac{1}{\varrho_g}$ delle linee $W_2 = \text{cost}$ dalla formola di Bonnet

$$\frac{1}{\varrho_g} = \frac{1}{\operatorname{sen}\omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\cos\omega \dfrac{\partial W_2}{\partial v} - \dfrac{\partial W_2}{\partial u}}{\operatorname{sen}\omega \sqrt{\Delta_1 W_2}} \right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\cos\omega \dfrac{\partial W_2}{\partial u} - \dfrac{\partial W_2}{\partial v}}{\operatorname{sen}\omega \sqrt{\Delta_1 W_2}} \right) \right\} ,$$

ed avendo riguardo alle (A*), alla (16) ed alla (17), troveremo, dopo semplici riduzioni,

$$(18) \qquad \frac{1}{\varrho_g} = 1 .$$

Le formole (17), (18) dimostrano appunto che le $W_2 = \text{cost}$ formano sulla S_0 un sistema di oricicli paralleli. E allora se prendiamo sulla S_0 a linee coordinate (α, β) questi oricicli $\alpha = \text{cost}$, e le loro geodetiche ortogonali $\beta = \text{cost}$ (parallele nel senso non euclideo), daremo all'elemento lineare ds_0 la forma tipica parabolica

$$(19) \qquad ds_0^2 = d\alpha^2 + e^{2\alpha} d\beta^2 ,$$

dopo di che avremo, a meno di un fattore costante, $W_2 = e^\alpha$. E introducendo questo valore di W_2 nelle (A^*), avremo le formole definitive

$$W_1 = e^\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} \quad , \quad W_2 = e^\alpha \quad , \quad W_3 = e^\alpha \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \omega} \frac{\partial \alpha}{\partial v} - \cot \omega \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right) .$$

dove si osserverà che la relazione quadratica (16) fra W_1, W_2, W_3 non è altro che la ben nota relazione

$$\Delta_1 \alpha = 1 ,$$

a cui soddisfa l'arco α delle geodetiche $\beta =$ cost contato dall'oriciclo $\alpha = 0$.

10. Possiamo facilmente invertire i risultati precedenti e dimostrare:

La terna più generale (W_1, W_2, W_3) *di soluzioni del sistema* (A^*) *si ottiene riducendo l'elemento lineare della superficie pseudosferica* S_0 (*in uno degli* ∞^1 *modi possibili*) *alla forma tipica parabolica* (19), *ed assumendo quindi* W_1, W_2, W_3 *dati dalle formole* (20).

Tutto si riduce a verificare che W_1, W_2, W_3, calcolati dalle (20), soddisfano in effetto al sistema (A^*). Ora si sa che, se il ds_0^2, dato dalla (19), si trasforma in *coordinate curvilinee qualunque* in

$$ds_0^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 , \tag{21}$$

la funzione $\Phi = e^\alpha$ soddisfa alle equazioni del sistema di Weingarten (ved. *Lezioni*, vol. I, § 184)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= E\Phi \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= F\Phi \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} - \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= G\Phi , \end{aligned} \right.$$

i simboli di Christoffel riferendosi alla forma differenziale (21). Nel caso particolare della forma (14), si ha $E = G = 1$, $F = \cos \omega$, e le precedenti diventano

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} &= \cot \omega \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{1}{\operatorname{sen} \omega} \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \Phi \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} &= \cos \omega \, . \, \Phi \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} &= - \frac{1}{\operatorname{sen} \omega} \frac{\partial \omega}{\partial v} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \cot \omega \frac{\partial \omega}{\partial v} \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \Phi . \end{aligned} \right.$$

E siccome i valori (20) sono

$$W_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \quad , \quad W_2 = \Phi \quad , \quad W_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \cot\omega \frac{\partial \Phi}{\partial u} ,$$

le precedenti dimostrano che tutte le equazioni del sistema (A^*) risultano verificate, c. d. d.

11. Possiamo dare un'altra forma a questo risultato ricordando che le congruenze di Guichard, e quindi le superficie che ne formano le falde focali e le loro evolute (superficie di Voss), dipendono dalle *deformazioni infinitesime* delle superficie pseudosferiche. Nel caso attuale di $\sigma = 45^\circ$, la corrispondente soluzione della equazione alle deformazioni infinitesime

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \, \partial v} = \cos\omega \, . \, \Theta$$

è data da $W_2 = e^\alpha$, e corrisponde al movimento infinitesimo parabolico della S_0 in se medesima, nel quale gli oricicli $\alpha = \text{cost}$ strisciano in se stessi; onde concludiamo:

Le superficie S *della nostra classe, colle linee di curvatura di un sistema inclinate di 45° sulle generatrici dei coni che le proiettano dal punto fisso, corrispondono singolarmente ai movimenti parabolici infinitesimi in se stesse delle superficie pseudosferiche.*

Da questo caso particolare di $\sigma = 45^\circ$ passiamo al caso generale di σ qualunque, applicando le trasformazioni di Lie nel modo seguente:

Se nel sistema differenziale (A), con σ qualunque, cangiamo le funzioni incognite W_1, W_2, W_3, ponendo

$$W_1 = \operatorname{tg}\sigma W_1' \quad , \quad W_2 = W_2' \quad , \quad W_3 = \operatorname{tg}\sigma W_3' ,$$

e nello stesso tempo cangiamo i parametri u, v ponendo

$$u = u' \cot\sigma \quad , \quad v = v' \operatorname{tg}\sigma ,$$

il sistema (A) diventa precisamente il sistema (A^*) scritto per W_1', W_2', W_3', e pei nuovi parametri u', v'. Ma, per questo cangiamento di parametri, la soluzione $\varphi(u, v)$ della (III) si cangia nella nuova $\omega(u \operatorname{tg}\sigma , v \cot\sigma)$ precisamente colla trasformazione L_σ di Lie. Concludiamo quindi:

Per integrare il sistema differenziale (A), *con* σ *qualunque, basta conoscere della superficie pseudosferica* S_0 *la superficie derivata per trasformazione* L_σ *di Lie, e su questa le linee geodetiche.*

Se si parte da una superficie pseudosferica S_0 di cui siano note tutte le trasformate di Bäcklund e di Lie (p. es. dalla pseudosfera, o da un'eli-

coide del Dini), si sa che, nell'applicazione indefinitamente ripetuta dei processi di trasformazione, si conoscono delle nuove superficie, senza *alcuna integrazione*, le trasformate di Lie e di Bäcklund, e sopra di queste le linee geodetiche. E così anche la ricerca delle corrispondenti superficie, con linee di curvatura di un sistema lossodromiche, dei coni che le proiettano da un punto fisso, si compie senz'altro *in termini finiti.*

Meccanica. — *Forma mista di equazioni del moto, che conviene ad una particolare categoria di sistemi meccanici.* Nota del Socio T. Levi-Civita [1].

Nel dar forma esplicita alla regolarizzazione del problema piano dei tre corpi, secondo il criterio esposto in una Nota recente [2], ho riconosciuto l'opportunità di ricorrere ad un tipo misto di equazioni del moto, che può essere vantaggiosamente usato anche in altri casi. Questa circostanza e, sopra tutto, il desiderio di rendere più agile la Nota che dedicherò prossimamente alla esplicita regolarizzazione suddetta, mi consigliano di stabilire a parte alcune formule preparatorie e la conseguente deduzione delle equazioni miste. Tutto si riduce, come agevolmente si capisce, a combinazione appropriata dei procedimenti abituali; non priva tuttavia di qualche eleganza, e resa qua e là più spedita da concetti e notazioni di calcolo vettoriale.

1. — Richiamo d'una considerazione cinematica dovuta a Kirchhoff [3].

Sia C un corpo rigido girevole attorno ad un punto O. Si designino con $O\xi\eta\zeta$ gli assi cui viene riferita l'orientazione di C; con Ox_ν $(\nu=1,2,3)$ tre assi mobili solidali col corpo (costituenti al solito un triedro trirettangolo congruente ad $O\xi\eta\zeta$); con ω la velocità angolare (di C rispetto agli assi $O\xi\eta\zeta$).

Sia $\mathbf{f}$ un generico vettore *fisso* (rispetto al riferimento $O\xi\eta\zeta$). Al variare del tempo t, varia (in causa del moto di C) l'orientazione del vettore $\mathbf{f}$, rispetto agli assi $Ox_1x_2x_3$. Designeremo indifferentemente con $\dfrac{d\mathbf{f}}{dt}$, ovvero con $\dot{\mathbf{f}}$, la derivata di $\mathbf{f}$, presa in tale accezione. Essa dovrebbe chiamarsi

[1] Pervenuta all'Accademia il 19 agosto 1915.

[2] *Sulla regolarizzazione del problema piano dei tre corpi*, in questo stesso volume dei Rendiconti, pp. 61-75.

[3] Cfr. *Vorlesungen über mathematische Physik*, B. I, *Mechanik*, lezione V, § 3.

relativa, attribuendo invece la qualifica *assolute* alle derivate prese con referenza agli assi fissi $O\xi\eta\zeta$. *Nei paragrafi seguenti considereremo esclusivamente derivate della prima specie.*

Designando qui, per un momento, con $\frac{d^{(a)}}{dt}$ le derivate assolute, si ha manifestamente

$$\frac{d^{(a)}\mathbf{f}}{dt} = 0 .$$

Giova poi rammentare che, per un vettore $\mathbf{m}$ comunque variabile, sussiste la relazione generale

$$\frac{d^{(a)}\mathbf{m}}{dt} = \frac{d\mathbf{m}}{dt} + \omega \wedge \mathbf{m} . \tag{1}$$

Per $\mathbf{m}$ del tipo $\mathbf{f}$ (fisso rispetto agli assi $O\xi\eta\zeta$), se ne ricava

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \mathbf{f} \wedge \omega . \tag{2}$$

Ciò premesso, immaginiamo, ad ogni istante t, attribuito a C un arbitrario spostamento infinitesimo, a partire dalla posizione che ad esso compete nel moto considerato. La successione delle posizioni, in tal guisa modificate, dà luogo al così detto moto variato.

Sia ε (vettore) la rotazione elementare atta a realizzare lo spostamento attribuito a C nell'istante t. Un generico vettore $\mathbf{f}$ (fisso) subirà in conseguenza, rispetto al triedro mobile $Ox_1x_2x_3$, una variazione $\delta\mathbf{f}$ definita da

$$\delta\mathbf{f} = \mathbf{f} \wedge \varepsilon . \tag{3}$$

Nel passaggio dal moto originario al moto variato, anche la velocità angolare ω subirà un certo incremento $\delta\omega$, che si calcola subito in base alla stessa definizione di velocità angolare. Infatti, nel moto originario, la rotazione elementare, con cui C passa, dalla posizione che gli compete nell'istante t, alla posizione dell'istante $t + dt$, è espressa da $\omega\, dt$. Nel moto variato, fra le due orientazioni di C relative agli istanti t e $t + dt$, intercede un divario ulteriore di $d\varepsilon$: un tale incremento (verificantesi nel tempuscolo dt) va riferito agli assi fissi e si precisa quindi sotto la forma $\frac{d^{(a)}\varepsilon}{dt} dt$. Il suo rapporto a dt fornisce la cercata espressione di $\delta\omega$. Ne consegue, in base alla (1),

$$\delta\omega = \frac{d\varepsilon}{dt} + \omega \wedge \varepsilon . \tag{4}$$

2. — Definizione di una particolare categoria di sistemi olonomi.

Sia S un sistema olonomo a vincoli indipendenti dal tempo, dotato di $n+3$ gradi di libertà, specificati come segue. La configurazione del sistema è univocamente individuata da n parametri lagrangiani q_h $(h=1,2,\dots,n)$, in concorso coll'orientazione di un corpo rigido C liberamente girevole, il che importa tre ulteriori gradi di libertà.

La dipendenza dall'orientazione di C può, se si vuole, pensarsi direttamente realizzata a mezzo di tre parametri (per es., i tre angoli di Eulero), o, indirettamente, pel tramite di elementi geometrici sovrabbondanti, quali coseni direttori o vettori unitarî: ad es., i tre vettori fondamentali $\mathbf{u}_\nu$ $(\nu=1,2,3)$ corrispondenti agli assi del triedro $Ox_1x_2x_3$ solidale con C; od anche — ed è questo il criterio cui ci atterremo — pel tramite degli altri tre vettori fondamentali α, β, γ, che individuano il triedro fisso $O\xi\eta\zeta$ rispetto al corpo C.

Le componenti $\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu$ $(\nu=1,2,3)$ di tali vettori si identificano naturalmente coi nove coseni direttori. Le formule (di Poisson)

$$(2') \qquad \frac{d\alpha}{dt}=\alpha\wedge\omega \quad , \quad \frac{d\beta}{dt}=\beta\wedge\omega \quad , \quad \frac{d\gamma}{dt}=\gamma\wedge\omega$$

appariscono in conformità casi particolari della (2), e assicurano che le velocità dei punti del sistema S possono in definitiva risguardarsi quali funzioni lineari ed omogenee delle derivate $\dot q$ dei parametri q, e del vettore ω, o, se si vuole, delle sue tre componenti ω_ν secondo gli assi $Ox_1x_2x_3$.

La forza viva T di S si presenta, così, quale forma quadratica degli $n+3$ argomenti $\dot q_h, \omega_\nu$, i coefficienti potendo dipendere (in modo qualunque) dalle q_h e dall'orientazione di C: diciamo dalle q_h e dai vettori α, β, γ.

Nell'ipotesi che il sistema S sia sollecitato da forze conservative, la relativa funzione delle forze U potrà egualmente risguardarsi dipendente dalle q_h e da α, β, γ.

La funzione lagrangiana

$$\mathrm{L}=\mathrm{T}+\mathrm{U}$$

sarà così funzione di tali argomenti e delle $n+3$ caratteristiche cinetiche $\dot q_h, \omega_\nu$, che compariscono quadraticamente in T.

3. Spostamenti virtuali — Moto variato — Ipotesi complementare sulla dipendenza di L dall'orientazione di C — Espressione del δL.

Uno spostamento virtuale di S, ad un generico istante t, può ritenersi individuato dagli incrementi δq_h dei parametri q_h, in concorso (cfr. § 1) con una rotazione elementare ε, questa e quelli affatto arbitrarî.

Subordinatamente avremo, a norma della (3),

$$(3') \qquad \delta\alpha = \alpha \wedge \varepsilon \qquad \delta\beta = \beta \wedge \varepsilon \quad , \quad \delta\gamma = \gamma \wedge \varepsilon \, ,$$

e $\delta\omega$ definito dalla (4).

È inoltre chiaro che δL sarà necessariamente funzione lineare ed omogenea delle δq_h, $\delta \dot{q}_h$ e dei due vettori ε, $\delta\omega$, o, se si vuole, delle loro componenti ε_ν, $\delta\omega_\nu$ secondo gli assi $Ox_1x_2x_3$.

Dacchè δq_h, $\delta\dot{q}_h$, $\delta\omega_\nu$ sono variazioni di quantità q_h, $\dot{q}_h$, ω_ν, che effettivamente appariscono in L, i relativi coefficienti in δL coincidono colle derivate parziali $\frac{\partial L}{\partial q_h}$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}$, $\frac{\partial L}{\partial \omega_\nu}$; mentre i coefficienti e_ν delle ε_ν non sono direttamente esprimibili quali derivate di L, ma si desumono dall'incremento parziale che L subisce facendo variare l'orientazione C, ossia attribuendo gli incrementi (3') ai vettori α, β, γ. Avremo, comunque,

$$\delta L = \sum_1^n {}_h \left(\frac{\partial L}{\partial q_h} \delta q_h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \delta \dot{q}_h \right) + \sum_1^3 {}_\nu \left(\frac{\partial L}{\partial \omega_\nu} \delta\omega_\nu + e_\nu \varepsilon_\nu \right).$$

Per lo scopo che abbiamo in vista, giova fissare l'attenzione sul caso in cui L dipende dall'orientazione di C pel tramite d'uno solo dei tre vettori α, β, γ. *In conformità, ammetteremo da ora innanzi che* L *dipenda esclusivamente da* γ.

In tale ipotesi la variazione parziale

$$\partial L = \sum_1^3 {}_\nu \, e_\nu \varepsilon_\nu \, ,$$

dovuta alla rotazione elementare ε, si riduce manifestamente a

$$\partial L = \sum_1^3 {}_\nu \frac{\partial L}{\partial \gamma_\nu} \delta\gamma_\nu \; [1] ,$$

le $\delta\gamma_\nu$ essendo definite dalle (3').

[1] Va notato che, dall'essere ben determinata la dipendenza di L dal vettore γ, non risulta egualmente determinata l'espressione analitica di L in termini di $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$; e ciò in causa dell'identità $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$, la quale consente di attribuire all'espres-

Introducendo il vettore $\boldsymbol{\Gamma}$, che ha per componenti

$$\Gamma_\nu = \frac{\partial L}{\partial \gamma_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3) \tag{5}$$

rispetto agli assi $Ox_1 x_2 x_3$, si può scrivere

$$\partial L = \boldsymbol{\Gamma} \times \delta\gamma = \boldsymbol{\Gamma} \times (\gamma \wedge \varepsilon) = \varepsilon \times (\boldsymbol{\Gamma} \wedge \gamma).$$

Le e_ν del caso generale si identificano pertanto, nell'adottata ipotesi, colle componenti del prodotto vettoriale

$$\boldsymbol{\Gamma} \wedge \gamma \ (^1).$$

Introducendo un secondo vettore Ω, definito dalle componenti

$$\Omega_\nu = \frac{\partial L}{\partial \omega_\nu} = \frac{\partial T}{\partial \omega_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3), \tag{6}$$

si attribuisce alla variazione totale δL della funzione lagrangiana l'espressione

$$\delta L = \sum_1^n {}_h \left(\frac{\partial L}{\partial q_h} \delta q_h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \delta \dot{q}_h \right) + \boldsymbol{\Omega} \times \delta\omega + (\boldsymbol{\Gamma} \wedge \gamma) \times \varepsilon .$$

Avuto riguardo alla (4), ove si ponga

$$\mathfrak{M} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \omega + \boldsymbol{\Gamma} \wedge \gamma , \tag{7}$$

si è condotti alla forma tipica

$$\delta L = \sum_1^n {}_h \left(\frac{\partial L}{\partial q_h} \delta q_h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \delta \dot{q}_h \right) + \mathfrak{M} \times \varepsilon + \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\varepsilon} , \tag{8}$$

---

sione analitica suddetta infiniti aspetti formalmente distinti. Ciò non pertanto si arriva poi sempre, come è naturale, allo stesso valore di ∂L. Infatti due diverse espressioni L' ed L'' possono differire soltanto pel fatto che l'unità vi è talora sostituita dal trinomio $u = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2$. Siccome $\partial u = 0$ [per la terza delle (3')], così la differenza

$$\left(\frac{\partial L'}{\partial u} - \frac{\partial L''}{\partial u} \right) \partial u$$

è pur nulla, c. d. d.

(1) L'osservazione (testè fatta in nota) circa l'indeterminazione dell'espressione formale di L si riverbera nel fatto che il vettore $\boldsymbol{\Gamma}$, avente per componenti le (5), dipende esso stesso dalla forma che si attribuisce alla L. Però l'indeterminazione si riduce (nelle componenti) a termini addizionali della forma $\frac{\partial L}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \gamma_\nu} = 2 \frac{\partial L}{\partial u} \gamma_\nu$, ossia, vettorialmente, ad un vettore parallelo a γ. Nel prodotto vettoriale $\boldsymbol{\Gamma} \wedge \gamma$, questo non reca contributo alcuno. È quindi indifferente, nei riguardi del δL, l'espressione di L, in base a cui viene introdotto il vettore $\boldsymbol{\Gamma}$.

in cui sono messi in evidenza i coefficienti delle singole caratteristiche δq_h, ε e loro derivate $\delta \dot{q}_h$, $\dot{\varepsilon}$.

4. — Equazioni del moto in forma euleriano-lagrangiana.

La materiale applicazione alla (8) della regola formale, in cui si traduce il principio di Hamilton [1], dà luogo alle seguenti equazioni del moto:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\Omega} = \mathfrak{M}. \tag{10}$$

la derivata vettoriale dovendo essere presa — ben si intende — nella stessa accezione sotto cui si presenta quella di ε, cioè (§ 1) con referenza agli assi $Ox_1x_2x_3$.

La (10) equivale perciò alle

$$\frac{d\Omega_\nu}{dt} = \mathfrak{M}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3).$$

Si possono ulteriormente esplicitare le $\mathfrak{M}_\nu$ in base alla (7). Ove si convenga di risguardare coincidenti due valori dell'indice ν congrui rispetto al modulo 3, si ha tosto

$$\mathfrak{M}_\nu = (\Omega_{\nu+1}\,\omega_{\nu+2} - \Omega_{\nu+2}\,\omega_{\nu+1}) + (\Gamma_{\nu+1}\,\gamma_{\nu+2} - \Gamma_{\nu+2}\,\gamma_{\nu+1}) \quad (\nu = 1, 2, 3).$$

È appena necessario aggiungere che il sistema (9), (10) va completato colla terza delle formule di Poisson [terza delle (2')], cioè

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma \wedge \omega, \tag{11}$$

rimanendo, così, complessivamente definite le derivate seconde delle q_h e prime delle ω_ν, γ_ν in funzione delle q_h, $\dot{q}_h$, ω_ν, γ_ν.

5. — Esempio.

Un'illustrazione ovvia di quanto precede è offerta da un solido pesante, liberamente girevole attorno ad un suo punto O, il quale punto si suppone costretto a percorrere una retta verticale (mediante vincolo privo d'attrito).

Si ha un sistema materiale S con quattro gradi di libertà, la cui posizione può pensarsi individuata dalla quota verticale q di O rispetto ad un

[1] Cfr. per es. Kirchhoff, loc. cit., lezione III, § 3.

sistema di assi fissi $\Omega\xi\eta\zeta$, con $\Omega\zeta$ verticale verso il basso, nonchè dall'orientazione (rispetto agli assi suddetti) di una terna solidale $Ox_1x_2x_3$, che riterremo costituita dagli assi principali d'inerzia relativi al punto O.

Essendo $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ i coseni direttori della verticale rispetto agli assi mobili, le componenti della velocità di O secondo tali assi valgono ordinatamente $\dot{q}\gamma_1$, $\dot{q}\gamma_2$, $\dot{q}\gamma_3$.

Il corpo ipotetico C, considerato precedentemente, è senz'altro identificabile collo stesso solido S: ci troviamo quindi nelle condizioni indicate al § 2.

Dalla ben nota espressione generale della forza viva di un solido in funzione delle sei caratteristiche (notando che, nel caso presente, ove si assuma O come centro di riduzione, esse sono $\dot{q}\gamma_1$, $\dot{q}\gamma_2$, $\dot{q}\gamma_3$, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$), si ha tosto

$$T = \tfrac{1}{2} m \dot{q}^2 + \tfrac{1}{2} \sum_1^3{}_\nu A_\nu \omega_\nu^2 + M \dot{q} \Delta ,$$

dove M è la massa del solido, A_ν il suo momento d'inerzia attorno all'asse Ox_ν, e

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{vmatrix} ,$$

c_1, c_2, c_3 designando le coordinate del baricentro G rispetto agli assi solidali.

Rappresenteremo con **d** il vettore G — O di componenti c_1, c_2, c_3. La quota verticale di G vale manifestamente

$$q + \sum_1^3{}_\nu c_\nu \gamma_\nu ;$$

perciò, detto P il peso del corpo, la funzione delle forze rimane espressa da

$$U = P\left(q + \sum_1^3{}_\nu c_\nu \gamma_\nu\right) .$$

Ne consegue

$$L = T + U = \tfrac{1}{2} M \dot{q}^2 + \tfrac{1}{2} \sum_1^3{}_\nu A_\nu \omega_\nu^2 + M \dot{q} \Delta + P\left(q + \sum_1^3{}_\nu c_\nu \gamma_\nu\right) .$$

Come si vede, L dipende da q, $\dot{q}$, ω_ν, γ_ν ($\nu = 1, 2, 3$), oltre che dalle costanti M, A_ν, c_ν, P: si trova quindi soddisfatta l'ipotesi complementare del § 3.

Le (5) dànno

$$\Gamma_\nu = Pc_\nu + M\dot{q}\frac{\partial\Delta}{\partial\gamma_\nu} = Pc_\nu + M\dot{q}(\omega_{\nu+1}c_{\nu+2} - \omega_{\nu+2}c_{\nu+1}),$$

donde apparisce che il vettore $\boldsymbol{\Gamma}$ non è altro che

$$\mathbf{Pd} + M\dot{q}\,\omega \wedge \mathbf{d}.$$

Siccome $\omega \wedge \mathbf{d}$ rappresenta la velocità relativa $\mathbf{w}$ del baricentro G rispetto ad un sistema di assi paralleli agli assi fissi coll'origine in O, si può anche scrivere, più semplicemente,

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{Pd} + M\dot{q}\,\mathbf{w}.$$

Si sa, dalla teoria dei sistemi rigidi, che le derivate parziali della forza viva rapporto alle caratteristiche ω_ν coincidono colle componenti del momento delle quantità di moto rispetto al centro di riduzione: il punto O, nel caso nostro. Perciò il vettore $\boldsymbol{\Omega}$, definito dalle (6), si identifica qui col momento risultante delle quantità di moto del sistema rispetto ad O.

Posto, per brevità,

$$\boldsymbol{M} = M\dot{q}\,\mathbf{w} \wedge \gamma,$$

la (7) diviene

$$\mathfrak{M} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \omega + \mathbf{d} \wedge P\gamma + \boldsymbol{M}.$$

Il secondo addendo è manifestamente il momento del peso $P\gamma$, applicato in G, rispetto al punto O. Basta quindi scrivere la (10) sotto la forma

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} + \omega \wedge \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{d} \wedge P\gamma + \boldsymbol{M} \tag{10'}$$

per riconoscervi compendiate le equazioni di Eulero (che varrebbero se O fosse fisso) col termine addizionale $\boldsymbol{M}$: in esso si rispecchia l'influenza della mobilità di O sul moto di rotazione del corpo.

Le equazioni di tipo lagrangiano [(9) dello schema generale] si riducono presentemente ad una sola: ed è

$$M\frac{d}{dt}(\dot{q} + \Delta) - P = 0.$$

Scrivendola

$$\ddot{q} = \frac{P}{M} - \frac{d\Delta}{dt}, \tag{9'}$$

ravvisiamo nel termine $-\frac{d\Delta}{dt}$ l'accelerazione perturbatrice (rispetto a quella

normale della gravità $\frac{P}{M} = g$), che si riscontra nella caduta di O, per effetto della rotazione del solido. Mediante le (10') e (11), si possono eliminare da $\frac{d\Delta}{dt}$ le derivate delle ω_ν, γ_ν, rimanendo così caratterizzata la perturbazione mediante lo stato di moto del sistema.

6. — Osservazione d'indole generale concernente la interpretabilità di qualche componente di Ω come momento delle quantità di moto di S.

Nel § 1 abbiamo supposto, astrattamente, che la posizione del sistema materiale S dipenda, in modo univoco, da certi parametri q e dalla orientazione di un corpo (fittizio) C, senza però fare alcuna ulteriore ipotesi sulle modalità di quest'ultima corrispondenza.

Può in particolare accadere che la corrispondenza fra la posizione di S (per valori generici attribuiti alle q) e l'orientazione di C abbia qualche aspetto prossimo all'identità: sia tale, per es., che ad una rotazione elementare di C attorno ad un asse determinato — diciamo Ox_3 per fissare le idee — corrisponda una identica rotazione d'insieme del sistema S.

In tal caso, ove si consideri il passaggio del sistema S dalla posizione che gli compete nell'istante t a quella che va ad occupare nell'istante $t + dt$, è chiaro che la velocità $\mathbf{v}$ di un generico punto P del sistema si può scindere in due addendi, uno dei quali è il contributo che si avrebbe qualora C ruotasse esclusivamente attorno all'asse Ox_3, rimanendo inalterate le q, mentre il secondo, $\mathbf{v}^*$, è dovuto a variazione delle q e rotazione attorno ad un asse perpendicolare ad Ox_3.

Il primo addendo, detto $\mathbf{u}_3$ il vettore unitario corrispondente all'asse Ox_3, vale

$$\omega_3 \mathbf{u}_3 \wedge (P - O) .$$

Si ha, in conformità,

$$\mathbf{v} = \omega_3 \mathbf{u}_3 \wedge (P - O) + \mathbf{v}^* ,$$

dove — ed è questa la circostanza essenziale — $\mathbf{v}^*$ non dipende da ω_3, ma soltanto dalle altre due componenti ω_1, ω_2 di ω (oltre che dalle $\dot{q}$ e dalla posizione del sistema).

Ne consegue

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \omega_3} = \mathbf{u}_3 \wedge (P - O) .$$

Ciò posto, ove sia m la massa dell'elemento circostante a P, si ha, per definizione,

$$T = \frac{1}{2} \sum m \mathbf{v} \times \mathbf{v} ,$$

il sommatorio intendendosi esteso a tutti gli elementi materiali del sistema.

Deriviamo T rapporto ad ω_3, ricordando da un lato la (6) e dall'altro l'espressione testè ricavata per $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \omega_3}$. Si ha tosto

$$\Omega_3 = \sum [m\mathbf{v} \times \{\mathbf{u}_3 \wedge (P - O)\}] = \mathbf{u}_3 \times \sum [(P - O) \wedge m\mathbf{v}] .$$

Il coefficiente di $\mathbf{u}_3$ nel prodotto scalare testè scritto si presenta come il momento risultante **K** delle quantità di moto del sistema S rispetto al punto O. Si ha quindi

$$\Omega_3 = K_3 ,$$

rappresentandosi ovviamente con K_ν ($\nu = 1, 2, 3$) le componenti del vettore **K** secondo gli assi $Ox_1 x_2 x_3$.

Di qua il teorema: Ogniqualvolta una rotazione elementare dell'ipotetico corpo rigido C, attorno ad un asse qualsiasi passante per O, corrisponde ad una identica rotazione d'insieme del sistema S, la componente del vettore $\boldsymbol{\Omega}$ rispetto all'asse di rotazione coincide col momento risultante, rispetto allo stesso asse, delle quantità di moto di S.

In quest'enunciato è detto *asse qualsiasi passante per* O, mentre la dimostrazione formale testè esposta contempla l'asse coordinato Ox_3 (solidale con C). È chiaro tuttavia:

1°) che, se si tratta di un altro asse qualsiasi, supposto pure solidale col corpo, basta assumerlo (come è certo lecito, non essendosi fatta alcuna speciale ipotesi sulla terna $Ox_1 x_2 x_3$) quale asse Ox_3 per accertare che la conclusione sussiste;

2°) che, se anche l'asse in questione è concepito variabile col tempo rispetto a C (per es. fisso rispetto agli assi $O\xi\eta\zeta$), basta aver riguardo alla posizione da esso occupata nel corpo nell'istante generico che si considera. Infatti la precedente dimostrazione fa intervenire *soltanto* la distribuzione delle velocità ad un dato istante: è quindi inessenziale l'ipotesi che sia solidale con C l'asse attorno a cui C ed S ammettono rotazioni elementari identiche.

C. D. D.

Va da sè che se, per tre direzioni indipendenti, vale l'eguaglianza delle componenti di $\boldsymbol{\Omega}$ e di **K**, si ha addirittura

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{K} :$$

tale è il caso dell'esempio riferito al § 5.

7. — Modificazione della funzione lagrangiana.

L'ipotesi, introdotta fin dal principio, che il sistema S possegga $n+3$ gradi di libertà, implica che la forma quadratica T negli $n+3$ argomenti $\dot{q}_h, \omega_\nu$ sia irriducibile.

Ne viene che le $n+3$ derivate parziali $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}$, $\frac{\partial T}{\partial \omega_\nu}$, considerate quali funzioni lineari ed omogenee nelle $\dot{q}_h, \omega_\nu$, riescono indipendenti. Perciò le equazioni

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = p_h \qquad (h = 1, 2, \dots, n), \tag{12}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_\nu} = \Omega_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3) \tag{6}$$

sono complessivamente atte a definire le $n+3$ quantità $\dot{q}_h, \omega_\nu$ in funzione lineare dei secondi membri p_h, Ω_ν, i coefficienti dipendendo in modo qualunque dalla configurazione del sistema, ossia (§ 3) dalle q_h e dalle γ_ν.

Poniamo (con ovvia estensione del procedimento di Hamilton)

$$H = \sum_1^n {}_h\, p_h \dot{q}_h + \sum_1^3 {}_\nu\, \Omega_\nu \omega_\nu - L, \tag{13}$$

ciò che, in base alle (12) e (6) (per essere T omogenea di secondo grado negli argomenti $\dot{q}_h, \omega_\nu$, ed $L = T + U$), equivale a

$$H = T - U. \tag{13'}$$

Risguardiamo tale H quale funzione degli argomenti $p_h, \Omega_\nu, q_h, \gamma_\nu$, immaginandovi sostituite le $\dot{q}_h, \omega_\nu$, che figurano nella formula di definizione, mediante le loro espressioni desunte dalle (12), (6).

Avremo da un lato

$$\delta H = \sum_1^n {}_h \left(\frac{\partial H}{\partial p_h} \delta p_h + \frac{\partial H}{\partial q_h} \delta q_h \right) + \sum_1^3 {}_\nu \left(\frac{\partial H}{\partial \Omega_\nu} \delta \Omega_\nu + \frac{\partial H}{\partial \gamma_\nu} \delta \gamma_\nu \right).$$

D'altro lato la materiale differenziazione della (13), tenute sempre presenti le (12) e (6) $\left[\text{sotto la forma } p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h},\ \Omega_\nu = \frac{\partial L}{\partial \omega_\nu}\right]$, dà

$$\delta H = \sum_1^n {}_h \left(\dot{q}_h \delta p_h - \frac{\partial L}{\partial q_h} \delta q_h \right) + \sum_1^3 {}_\nu \left(\omega_\nu \delta \Omega_\nu - \frac{\partial L}{\partial \gamma_\nu} \delta \gamma_\nu \right).$$

Il confronto delle due espressioni di δH, dacchè gli incrementi $\delta p_h, \delta q_h$, $\delta\Omega_\nu, \delta\gamma_\nu$ si possono assumere ad arbitrio [1], fornisce le relazioni

$$\dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_h} = -\frac{\partial H}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n); \tag{15}$$

$$\omega_\nu = \frac{\partial H}{\partial \Omega_\nu}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_\nu} = -\frac{\partial H}{\partial \gamma_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3), \tag{17}$$

che possono naturalmente considerarsi come altrettante identità, in virtù delle (12) e (6). Più particolarmente le (14) e (16) si identificano colle risolventi delle stesse (12) e (6) rapporto alle $\dot{q}_h, \omega_\nu$; le (15) e (17) esprimono (in modo comprensivo, a mezzo della funzione H) il risultato della sostituzione delle $\dot{q}_h, \omega_\nu$ tratte dalle (12) e (6) in $\frac{\partial L}{\partial q_h}, \frac{\partial L}{\partial \gamma_\nu}$.

8. — Forma canonico-euleriana delle equazioni del moto.

La funzione hamiltoniana H, costruita nel modo ora detto, basta da sola a dedurre le equazioni del moto di S sotto l'aspetto di sistema di prim'ordine nei $2n + 6$ argomenti

$$p_h, q_h, \Omega_\nu, \gamma_\nu,$$

esprimendo altresì le Γ_ν, ω_ν quali combinazioni in termini finiti degli argomenti indicati.

Lo si constata ovviamente, trasformando le (9) e (10) mercè le (14), ..., (17).

Anzi tutto la definizione (5) delle Γ_ν, in virtù delle (17), si scrive

$$\Gamma_\nu = -\frac{\partial H}{\partial \gamma_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3). \tag{18}$$

[1] A dir vero, le γ_ν designano coseni direttori e sono quindi legate dalla relazione $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$. Nulla vieta però di risguardare *provvisoriamente*, nella definizione (13) di H e nelle (6) e (12), le tre γ come indipendenti, e con ciò i loro incrementi come arbitrarî. Le (14), (15), (16) e (17) risultano, così, necessarie conseguenze delle (6) e (12), qualunque siano le γ (nonchè le q, p, Ω): in particolare, quindi, se si torna ad attribuire alle γ il loro effettivo significato di coseni direttori.

Si intende, poi, che tali Γ_ν e le Ω_ν si ritengono qui ancora compendiate nei due vettori $\boldsymbol{\Gamma}$ ed $\boldsymbol{\Omega}$; mentre le

$$(16) \qquad \omega_\nu = \frac{\partial H}{\partial \Omega_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

individuano il vettore $\boldsymbol{\omega}$. Con ciò seguita a valere la definizione (7) di $\mathfrak{M}$,

$$(7) \qquad \mathfrak{M} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Gamma} \wedge \gamma ,$$

e il gruppo (euleriano)

$$(10) \qquad \frac{d}{dt} \boldsymbol{\Omega} = \mathfrak{M}$$

non richiede ulteriore modificazione formale.

Il gruppo (lagrangiano) (9) diviene invece, attese le (15) e la definizione (12) delle p_h $\left(\text{che equivale a } p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\right)$,

$$(19) \qquad \frac{dp_h}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \dots, n),$$

cui vanno associate le

$$(14) \qquad \frac{dq_h}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_h} \qquad (h = 1, 2, \dots, n).$$

e la formula (vettoriale) di Poisson

$$(11) \qquad \frac{d\gamma}{dt} = \gamma \wedge \boldsymbol{\omega} .$$

Complessivamente, il sistema

$$(\mathrm{I} \qquad \begin{cases} (\mathrm{I}_a) & \dfrac{dp_h}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_h} , \quad \dfrac{dq_h}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_h} \quad (h = 1, 2, \dots, n), \\ (\mathrm{I}_b) & \dfrac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \mathfrak{M} , \\ (\mathrm{I}_c) & \dfrac{d\gamma}{dt} = \gamma \wedge \boldsymbol{\omega} , \end{cases}$$

costituito, come si vede, dalle (19), (14), (10) ed (11), definisce le derivate dei $2n + 6$ argomenti $p_h, q_h, \Omega_\nu, \gamma_\nu$ in funzione degli argomenti stessi. Le (18), (16) e (7) assicurano che i secondi membri si esprimono esclusivamente per mezzo della H.

9. — Integrali di tiro generale posseduti dal sistema (I).

La (I_c) implica $\gamma \times \gamma = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \text{cost}$, il che è già sottointeso (colla specificazione che la costante abbia il valore 1) nell'interpretazione delle γ_ν quali coseni direttori. A prescindere da questa identità geometrica, due sono gli integrali effettivi ammessi in ogni caso dal sistema (I): l'integrale delle forze vive che, a norma della (13′), assume la forma

$$\mathrm{H} = \text{cost}\,; \tag{20}$$

e l'integrale

$$\boldsymbol{\Omega} \times \gamma = \text{cost}\,. \tag{21}$$

Il primo membro è la componente Ω_ζ di $\boldsymbol{\Omega}$ secondo l'asse fisso $O\zeta$. Ogniqualvolta sono applicabili le considerazioni del § 6, si tratta del corrispondente integrale del momento delle quantità di moto (o delle aree).

Ecco la verificazione diretta dell'esistenza dei due integrali. Si ha in primo luogo

$$\frac{d\mathrm{H}}{dt} = \sum_1^n{}_h \left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_h} \frac{dp_h}{dt} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_h} \frac{dq_h}{dt} \right) + \sum_1^3{}_\nu \left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \Omega_\nu} \frac{d\Omega_\nu}{dt} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \gamma_\nu} \frac{d\gamma_\nu}{dt} \right).$$

Il primo sommatorio è nullo, in conseguenza delle (I_a); il secondo, attese le (16) e (18), si scrive

$$\sum_1^3{}_\nu \left(\omega_\nu \frac{d\Omega_\nu}{dt} - \Gamma_\nu \frac{d\gamma_\nu}{dt} \right) = \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \omega - \frac{d\gamma}{dt} \times \boldsymbol{\Gamma}.$$

Sostituendo per $\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}$ e $\frac{d\gamma}{dt}$ le loro espressioni (I_b), (I_c), risulta

$$\frac{d\mathrm{H}}{dt} = \mathfrak{M} \times \omega - (\gamma \wedge \omega) \times \boldsymbol{\Gamma}.$$

Il secondo membro è identicamente nullo, in virtù della (7); e quindi $\frac{d\mathrm{H}}{dt} = 0$.

Quanto al prodotto scalare $\boldsymbol{\Omega} \times \gamma$, la sua derivata è

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \gamma + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\gamma}{dt},$$

ossia, per le (I_b) e (I_c),

$$\mathfrak{M} \times \gamma + \boldsymbol{\Omega} \times (\gamma \wedge \omega),$$

che va pure a zero in forza della (7),

c. d. d.

Mineralogia. — *Bismutinite di Brosso*. Nota del Corrispondente E. Artini [1].

Una rapida visita alla miniera di Brosso, fatta recentemente col gentile permesso dell'ing. comm. V. Sclopis, mi dà modo di aggiungere una nuova ed interessantissima specie minerale a quelle, già tanto numerose, di questa classica località, illustrate da precedenti lavori di varî scienziati. Si tratta della *bismutinite*, specie rarissima in Italia, non essendo essa conosciuta finora che a Boccheggiano, dove forma rari e sottilissimi prismetti aghiformi, interclusi nella ematite compatta, con pirite e calcopirite [2]. Un minerale solforato, ricchissimo di bismuto, di colore grigio-chiaro, con lucentezza metallica, fu, per vero dire, trovato già qualche anno fa nella miniera del Baitello, in Val Trobiolo, sopra Pisogne; ma in quantità così scarsa, e così intimamente misto a calcopirite entro alla massa quarzosa che fa da matrice, che non mi fu ancora possibile riunire una quantità di materiale veramente puro sufficiente per constatare se proprio si tratti di bismutinite, o di qualche altro, più raro, minerale di Bi.

A Brosso la bismutinite fu incontrata, in notevole quantità, fin dall'anno scorso, nel cantiere Salvère, in corrispondenza ad una delle faglie che, com'è noto, tagliano il giacimento, e che spesso dànno luogo ad arricchimento locale dei minerali più rari; ma per la rassomiglianza grande dei caratteri esterni fu da tutti considerata, senz'altro, come stibnite, e perciò trascurata. Avendone io raccolto varî esemplari, ed essendo stato colpito da una certa lieve diversità nella lucentezza e nel colore, ritornato in sede sottoposi il minerale a ricerca chimica, e agevolmente potei constatare che esso è costituito da puro solfuro di bismuto.

La nostra bismutinite si presenta in aggregati bacillari, o in prismi di singolare nitidezza, che possono raggiungere dimensioni relativamente cospicue (oltre 10 cm. di lunghezza, per 15 mm. di larghezza), freschissimi, interclusi in una massa di siderite spatica, entro alla miscela, caratteristica del cantiere Salvère, di pirite ed ematite scagliosa, con calcopirite, pirrotite, sfalerite e magnetite come accessorî.

La lucentezza è metallica, assai viva, specie sulle superfici fresche della sfaldatura $\{010\}$, ch'è facilissima e perfetta; il colore è un grigio di piombo chiaro, passante al bianco di stagno.

Il p. sp., determinato col picnometro sopra circa 5 gr. di materiale purissimo, scelto con ogni cura, risultò $= 6.73$.

[1] Pervenuta all'Accademia il 19 agosto 1915.

[2] E. Tacconi, *Note mineralogiche sul giacimento cuprifero di Boccheggiano*. Rendic. R. Accad. Lincei, seduta del 10 aprile 1904.

Al cannello, sul carbone, il nostro minerale fonde con facilità, dando l'aureola gialla del Bi; con joduro potassico, senza aggiunta di solfo, fornisce invece la notissima larga e fugace aureola di color rosso granato.

In HNO_3, a caldo, si scioglie completamente, con grande facilità; la soluzione, fortemente diluita dopo evaporazione della maggior parte dell'acido libero, si intorbida, lasciando precipitare il nitrato basico di Bi.

Anche in HCl, a dolce calore, il minerale si scioglie facilmente, con copioso svolgimento di H_2S; analizzando, coi soliti metodi, la soluzione cloridrica, constatai la presenza di grandissima quantità di Bi, e lievi tracce di Fe; non trovai proporzioni apprezzabili di Sb, Pb, o Cu.

La non comune nitidezza dei prismi di questa bismutinite, benchè essi non siano terminati alle estremità, mi convinse essere utile sottoporne alcuni, scelti tra i migliori, a misura goniometrica.

Le forme osservate sono le seguenti:

{100}, {010}, {210}*, {110}, {340}*, {120}, {130}, {140}, {150}*.

Di queste, le tre segnate con asterisco sarebbero, per quanto mi risulta, nuove per la specie; sono però tutte e tre note per la stibnite, specie isomorfa con la bismutinite.

Le facce più sviluppate e più nitide sono quelle di {010} e di {110}; le immagini da queste riflesse sono così distinte da permettere la determinazione dell'angolo del prisma fondamentale, e perciò della costante a/b, con una precisione che oso ritenere eccezionale per il nostro minerale. Tutte le altre forme sono solo saltuariamente presenti, o rare, e rappresentate da faccette molto più strette, e spesso fortemente striate. Tra le innumerevoli facce che si potrebbero distinguere nella zona verticale, tenni conto però esclusivamente di quelle che erano ben riconoscibili con la lente, e che fornivano un' immagine unica, sicura e distinta.

$$a:b = 0.98556:1.$$

Spigoli misurati	Angoli osservati			Angoli calcolati
	N.	Limiti	Medie	
(010) . (110)	16	45°. 6′ — 45°.39′	45°.25′	*
(110) . (1$\bar{1}$0)	8	89 . 0 — 89 .24	89 .11	89°.10′
(110) . (100)	1	—	44 .41	44 .35
(210) . (110)	2	18 . 3 — 18 . 9	18 . 6	18 .21
(340) . (010)	3	35 .10 — 37 .11	36 .21	37 .16
(340) . (110)	2	8 .15 — 8 .57	8 .36	8 . 9
(120) . (010)	1	—	27 . 2	26 .54
(130) . (010)	1	—	18 .48	18 .41
(130) . (110)	1	—	26 .38	26 .44
(140) . (010)	3	13 .54 — 15 .28	14 .40	14 .14
(150) . (010)	1	—	11 .35	11 .28

È notevole che il valore dell'angolo del prisma fondamentale da me determinato sui cristalli di Brosso è molto vicino a quello misurato da G. Rose [1] sui cristalli di trisolfuro di bismuto artificiale:

$$(110) . (1\bar{1}0) = 89^{\circ}.20' \quad ; \quad a:b = 0.9884:1 \, ;$$

si allontana invece assai da quello determinato da P. Groth [2] nella bismutinite naturale di Tazna, in Bolivia:

$$(110) . (1\bar{1}0) = 88^{\circ}.8' \quad ; \quad a:b = 0.9679:1 \, .$$

Ma sulla attendibilità dell'angolo dato da quest'ultimo autore, e accettato poi senz'altro nella massima parte dei trattati, non è possibile alcuna discussione, poi che nel testo originale non sono riferiti nè il numero nè i limiti delle misure che servirono di base al calcolo; solo risulta che le misure furono eseguite sopra un unico cristallo, a superficie alterata. In ogni modo il valore dell'angolo misurato dal Groth esce notevolmente dai limiti, abbastanza ristretti, delle mie numerose osservazioni.

Un altro minerale, che credo nuovo per la località, ma di importanza assai minore, potei raccogliere a Brosso. Si tratta di una specie del gruppo delle leptocloriti. Gli individui, allungati, assai mal formati, si presentano, straordinariamente rari, con calcite scalenoedrica, i cui cristallini son riuniti a formare aggregati paralleli, nelle geodine di una massa di pirite alquanto alterata. Il colore del minerale fresco è nerastro; ma in qualche punto esso è coperto da una lieve patina rossastra, d'alterazione. Si osserva una sfaldatura facilissima secondo un piano (base) normale all'allungamento; le laminette di sfaldatura hanno forma triangolare equilatera, e tra nicols incrociati si presentano perfettamente isotrope. A luce naturale la loro tinta è verde cupo, o verde d'olive acerbe, se le lamine sono estremamente sottili; quelle appena un poco più grosse appaiono affatto nere ed opache. Alcuni individui allungati, sottilissimi, mi permisero di constatare il forte pleocroismo del minerale; supponendo che questo sia romboedrico, si ha, secondo lo spessore:

ε = giallo-rossastro, a rosso-bruno, fino a bruno-nerastro;

ω = verde-oliva, a verdone cupo, fino a nero.

L'assorbimento è, come d'ordinario in questo gruppo, $\omega >> \varepsilon$.

Il minerale viene attaccato a caldo da HCl concentrato. Al cannello, sul carbone, fonde abbastanza facilmente, dando una massa nera, scoriacea, magnetica.

Per i caratteri osservati ritengo assai probabile che si tratti di *cronstedtite*.

[1] Poggendorffs Ann. d. Phys., ann. 1854, vol. 91, pag. 401.

[2] P. Groth, *Beitrag zur krystallographischen Kenntniss des Wismuthglanzes.* Zeitschrift für Krystall., ann. 1881, vol. V, pag. 252.

Chimica. — *Sopra un miscuglio esplosivo di fosforo ed aria liquida* [1]. Nota del Corrispondente ARNALDO PIUTTI [2].

In occasione di alcune ricerche sulle temperature alle quali non hanno più luogo combinazioni fra elementi che si uniscono energicamente nelle condizioni ordinarie, ho fatto, tempo fa, la osservazione, non accennata nella letteratura, che il fosforo giallo non si combina coll'ossigeno liquido, ma con formazione di piccole crepature e senza notevole mutamento di colore, acquista la proprietà per la quale, tolto dal bagno, percosso, toccato con ferro caldo od altrimenti sottoposto all'azione di una scintilla elettrica, *esplode con estrema violenza.*

Un solo grammo di fosforo provoca tale esplosione da perforare o frantumare la capsula di lamiera di ferro nella quale è avvenuto il raffreddamento come potrebbe fare un qualunque esplosivo frangente.

Se lo scoppio avviene in un bicchiere di alluminio, ancorchè svasato, l'onda esplosiva è così rapida ed intensa da produrre uno sfiancamento circolare, regolarissimo, sulle pareti.

Se nella cavità cilindrica di un blocco di piombo si introduce un grammo di fosforo giallo e tutto si raffredda coll'aria liquida sino a che assume la sua temperatura di ebollizione e quindi si comprime rapidamente con un pistone di acciaio di sezione uguale a quella della cavità, lasciando cadere sull'estremità superiore di esso un peso di cinque chilogrammi dall'altezza di mezzo metro, il fosforo esplode con tale violenza da sfiancare il foro, producendo nello stesso tempo una massa di vapori bianchi che lentamente si dissolvono nell'aria.

Tutti questi esperimenti e specialmente quelli di percussione e di riscaldamento debbono eseguirsi colle massime cautele e con limitate quantità di materia per evitare le conseguenze della proiezione di sostanza infiammata, che si verifica in ogni senso in seguito all'esplosione, la quale ha luogo con violenza ancora maggiore se il fosforo è ricoperto con aria liquida, ma non avviene più se tolto da essa si lascia a sè per 1-2 minuti.

Per decidere se lo scoppio dipende dalla rapida disgregazione di una nuova allotropia del fosforo, stabile soltanto a temperatura molto bassa, oppure se occorre a produrlo l'assorbimento di ossigeno, come nel caso del carbone, con formazione di una miscela esplosiva analoga a quella che si ottiene col clorato potassico, ho fatto diverse prove avvolgendo il fosforo in

[1] Pervenuta all'Accademia il 4 settembre 1915.

[2] Lavoro eseguito nell'Istituto chimico-farmaceutico della R. Università di Napoli.

stagnola e ricoprendo il tutto con uno spesso strato di collodio, o semplicemente immergendolo in questo più volte e seccando poscia con forte corrente di aria.

In queste condizioni ha luogo effettivamente ancora la esplosione; ma non potendosi escludere la penetrazione dell'ossigeno attraverso gli involucri così preparati, ho ripetuto la esperienza sia raffreddando il fosforo in un bagno di pentano contenuto in un tubetto metallico a pareti sottili, immerso nell'aria liquida, o più semplicemente in un tubo di assaggio, raffreddato nello stesso modo e contenente il fosforo nel quale, mentre era fuso, si erano immersi i due reofori collegati solamente alla loro estremità con un sottile filo di ferro per creare nel punto voluto un corto circuito. Per il passaggio della corrente elettrica stradale *non ebbe mai luogo l'esplosione*, ma solamente la rottura del tubo e la conseguente accensione del metalloide.

Queste esperienze, che però non escludono la eventuale formazione di allotropie del fosforo diverse dalle conosciute e stabili solamente a temperature più basse di quella alla quale il Ph giallo I si trasforma in P giallo II [1] dimostrano che l'esplosione *non può avvenire senza l'intervento dell'ossigeno.*

Il fosforo rosso fortemente compresso, sottoposto alle medesime prove non esplode, ma abbrucia con fiamma assai viva ed egualmente si comporta lo solfo ordinario.

Non potendo, nell'attuale momento, completare queste ricerche, mi limito a prenderne data, riservandomi lo studio di questo argomento, che ho intenzione di estendere alle varietà gialle dell'arsenico e dell'antimonio, nonchè ad altri elementi.

Astronomia. — *Sul servizio internazionale delle latitudini e sul termine del Kimura.* Nota di E. Bianchi, presentata dal Socio E. Millosevich [2].

Il prof. G. Boccardi, in *Saggi di astronomia popolare*, ha voluto fare una recensione critica delle mie due Note pubblicate nei Rendiconti dei Lincei, *Sulla latitudine di Roma negli anni 1912-1913* e *Sui valori del termine z nel problema della variazione delle latitudini* [3].

Debbo, in proposito, rilevare una cosa soltanto: e cioè che io non ho affatto concluso, come mi fa dire il prof. Boccardi, « *che il grado di pre-*

[1] Vedi P. W. Bridgman, I. Am. Chem. Soc., *36*, 1344 (1914); Chem. Zentralbl. 1914; II, 1025.

[2] Pervenuta all'Accademia il 18 agosto 1915.

[3] Rend. Lincei, 1° sem., fasc. 11 e 12 (1915).

cisione delle osservazioni delle stazioni internazionali è molto inferiore a quello che si era ammesso fino ad oggi ».

Questo non dissi, nè potevo dire, essendo ben noto a tutti proprio il grado di altissima precisione delle misure che in quegl'Istituti si fecero e si fanno con esemplare severità e serenità scientifica.

Altra cosa, e ben diversa, io dissi; ed essa risulta manifesta a chi legge quelle due mie Note.

Nei riguardi poi delle critiche che il prof. Boccardi accenna, qua e là, sul mio lavoro, non credo di dover in nulla modificare quanto ho fatto e scritto; lascio ai cultori del problema di giudicare sull'attendibilità delle critiche stesse.

Fisiologia. — *Ricerche sugli effetti dell'alimentazione maidica. Contributo alla conoscenza della natura e delle cause del cosiddetto maidismo sperimentale delle cavie.* Nota IX di S. Baglioni, presentata dal Socio L. Luciani [1].

Come ebbi a rilevare già nella prima Nota [2] di questa serie di ricerche Bezzola [3] trovò che le cavie sottoposte a dieta alimentare esclusiva di prodotti maidici, muoiono con fenomeni di deperimento generale. In seguito, pur confermando questo risultato, vidi che gli stessi effetti dannosi ha anche l'alimentazione esclusiva con farina di frumento (loc. cit.); non è quindi questa una proprietà specifica del mais.

Ma specialmente le successive ricerche di Axel Holst e Teodoro Frölich [4] hanno trovato una larga eco tra i patologi, per aver essi creduto di aver scoperto la causa dello scorbuto umano.

Axel Holst e Teodoro Frölich (1912), alimentando cavie esclusivamente con diverse spece di cereali secchi (frumento. avena, mais, ecc.), oppure con pane, videro, entro circa un mese, morire gli animali con sintomi molto simili allo scorbuto umano (iperemia gengivale, labilità dentaria, emorragie diverse, distacchi epifisari di ossa lunghe, lesioni istologiche caratteristiche del midollo osseo). Mediante alimentazione esclusiva con erbe o sostanze vegetali fresche (cavolo, carote, ecc.), gli animali morivano presentando la

(1) Pervenuta all'Accademia il 3 agosto 1915.

(2) Questi Rendiconti, vol. XVII, 1° sem., pp. 609-617 (1908).

(3) C. Bezzola, *Beitrag zur Kenntnis der Ernährung mit Mais. I. Einwirkung der Maisfütterung auf Meerschweinchen.* Zeits. f. Hygiene, *56*, pag. 75 (1907).

(4) A. Holst u. Th. Frölich, *Ueber experimentellen Skorbut. Ein Beitrag zur Lehre von dem Einfluss einer einseitigen Ernährung.* Zeits. f. Hygiene, *72*, pp. 1-120 (1912). II. *Weitere Untersuchungen über das Konserviren und Extrahieren der spezifischen Bestandteile der antiskorbutischen Nahrungsmittel,* ibidem, *75*, pp. 334-344 (1913).

stessa perdita di peso (30-40 per cento), ma senza gli altri sintomi scorbutici. Con la somministrazione di diversi vegetali crudi antiscorbutici, la suddetta malattia poteva essere totalmente, o quasi, impedita, oppure influenzata favorevolmente. Anche da poco bollite agivano tali sostanze ugualmente, sebbene in grado minore. Il disseccamento o la scottatura distruggeva però le proprietà antiscorbutiche di varî alimenti. La causa dello scorbuto deve quindi, secondo Holst e Frölich, ascriversi alla mancanza di certe sostanze chimiche di natura sconosciuta negli alimenti. V. Fürst (1) continuando le ricerche di Holst e Frölich, ha trovato che le sostanze antiscorbutiche non appartengono ai gruppi delle proteine, dei grassi, degli idrati di carbonio, della cellulosa, nè dei sali in generale, e neanche a quello degli enzimi. Diversi semi inoltre (cereali, piselli, lenticchie), che producono lo scorbuto nelle cavie, perdono tale azione quando cominciano a germogliare. In successive ricerche, Holst e Frölich videro che l'alcool a 80 per cento caldo, mescolato con 1 per cento di acido citrico, scioglie la sostanza antiscorbutica (di natura ignota) del cavolo fresco.

In Italia queste esperienze furono ripetute, variamente modificate, ma essenzialmente confermate da Centanni e Galassi (2), Rondoni (3) e Ramoino (4), che cercarono di utilizzarle specialmente nella questione pellagrologica, ammettendo in generale che gli effetti dannosi di una tale dieta unilaterale fossero dovuti alla mancanza di sostanze alimentari sconosciute, ma indispensabili (vitamine, merositine ecc.).

Come ho osservato in una recente Memoria riassuntiva (5) sull'argomento, nessuno dei ricordati sperimentatori ha però studiato le eventuali modificazioni prodotte, nel ricambio materiale della cavia, dal regime maidico o cereale esclusivo; anzi quasi nessuno ha neppure tenuto conto della quantità di cibo assunto, delle fecce e dell'urina eliminata. Prima di pensare a spiegazioni ipotetiche, quali quelle basate sull'azione di presunte nuove sostanze, si devono evidentemente eliminare quelle basate su dati, da tempo acquisiti e ripetutamente confermati nella nostra scienza.

(1) V. Fürst, *Weitere Beiträge zur Aetiologie des experimentellen Skorbuts des Meerschweinchens*, ibidem, *72*, pp. 121-154 (1912).

(2) E. Centanni e C. Galassi, *Sul doppio effetto tossico e unilaterale dell'alimentazione maidica*, Sperimentale, *47* (1913).

(3) P. Rondoni, *L'alimentazione maidica e il monofagismo*, Pathologica, *7*, pp. 191 197 (1915); *Ricerche e considerazioni sul maidismo sperimentale*, Ric. d. Biol. ded. al prof. A. Lustig, pp. 299-314 (1914); *Alimentazione maidica e vitamine*, Sperimentale, *69*, (1915); P. Rondoni e M. Montagnari, *Alterazioni istologiche nelle cavie alimentate a mais*, ibidem.

(4) P. Ramoino, *Contributo allo studio delle alimentazioni incomplete*. III. *Ricerche nelle alimentazioni frugivore*, Pathologica, pag. 185 (1915).

(5) S. Baglioni, *Sugli effetti dell'alimentazione cereale, specialmente maidica, nell'uomo e negli animali*. Boll. d. R. Accad. medica di Roma, anno 41, fasc. 5-6 (1915).

Fu pertanto che intrapresi le esperienze, i cui singoli risultati esposi nella precedente Nota VIII [1]. Essi mi sembrano dimostrare varî fatti:

1. La durata della sopravvivenza di cavie, sottoposte a dieta maidica esclusiva, dipende in parte dalla quantità di acqua aggiunta alla farina: la cavia I, alimentata con una miscela di farina e acqua in parti uguali, sebbene interrotta per due giorni da alimentazione erbacea, visse per un numero di giorni minore della metà della cavia IV dello stesso peso (a digiuno) e della stessa età, che fu alimentata costantemente con una miscela fatta della stessa farina col doppio di acqua. Credo, pertanto, che una delle cause principali della morte di questi animali alimentati esclusivamente con cereali o sostanze disseccate, dipenda appunto dalla scarsezza di acqua che ingeriscono. Nè vale offrir loro acqua da bere, poichè è noto che non bevono acqua spontaneamente. Il loro alimento normale (le erbe fresche) contiene sempre una quantità percentuale molto forte di acqua.

2. L'alimentazione esclusiva con poltiglia di farina maidica e acqua induce, nelle funzioni digestive, notevoli e profonde modificazioni che concernono:

a) la *quantità di cibo assunto giornalmente*; nella I e nella VI cavia, a un primo periodo di pochi giorni, in cui ingerivano quantità abbastanza grande di poltiglia (46-59 gr.), seguì un secondo periodo, molto più lungo, in cui ne ingerivano una quantità più piccola che andò rapidamente diminuendo nella prima, mentre rimase presso che costante (fra 30 e 37 gr.) nella sesta. Minori oscillazioni si ebbero nella quantità di cibo assunto dalla cavia IV. Fortissima differenza presentarono, però, tutte in confronto colla quantità di cibo assunto normalmente in forma di erbe; la cavia III, infatti, sebbene di minor peso, ingeriva quantità oscillanti tra 150 e 250 gr. *pro die*; ossia, almeno tre a cinque volte la quantità assunta dalle cavie I e IV. Questa differenza, che è poi da considerare come il fattore principale dei danni dell'alimentazione maidica in questi animali, credo dipenda probabilmente dal disgusto innato e dal senso di sazietà — anche per volume molto minore di cibo — per tale alimentazione;

b) la *quantità* e *qualità delle fecce eliminate*; in tutte e tre le cavie alimentate con farina maidica, si notò un primo periodo di alcuni giorni, in cui la produzione di fecce diminuì fortemente o scomparve del tutto; in un secondo periodo più lungo, si eliminavano pochi grammi (1-4) di fecce giallognole o scure, piccole e secche; nel terzo ed ultimo periodo la quantità aumentò (sino a 11 gr. nella IV e 6 nella VI), divenendo più grosse, molli e diarroiche.

3. La detta alimentazione maidica esclusiva induce anche nella secrezione urinaria notevoli e profonde modificazioni che riguardano:

[1] Questi Rendiconti, pag. 213.

a) la *quantità dell'urina eliminata* giornalmente, che, in media, oscillò tra 10 e 20 cc. nelle cavie I e VI e tra 15 e 38 nella cavia VI. Tale quantità era almeno cinque - dieci volte minore della quantità eliminata dalla cavia III ad alimentazione erbacea, che eliminava quasi sempre più di 100 cc. di urina al giorno;

b) *i caratteri fisico-chimici dell'urina*, la quale perdeva gli usuali aspetto latteo torbido e colore scuro per divenire chiara e giallognola (tranne gli ultimi giorni, in cui però, per essere le fecce diarroiche, il colorito scuro era forse dovuto a loro inquinamento). Il peso specifico aumentò solo nella cavia I (1030-1036), mentre nelle altre due si mantenne presso che uguale a quello dell'urina della cavia III (1012-1025). Differenza notevolissima mostrò, invece, la reazione chimica, di cui diminuiva il grado di alcalinità sino ad assumere gradi abbastanza elevati di acidità. Mentre, infatti, il grado totale di alcalinità, espresso in cc. della soluzione decinormale di acido ossalico necessarî per la neutralizzazione, usando l'acido rosolico come indicatore, dell'urina delle 24 ore della cavia III alimentata con erba, oscillò tra un minimo di 20 e un massimo di 189, mantenendosi nel maggior numero dei casi tra 60 e 80, nella cavia I, durante l'alimentazione maidica, scese a 8, per poi divenire 6 di acidità, nella IV scese, in un primo periodo, da 30 a 1.3 per raggiungere un massimo grado di acidità di 9, e in un periodo successivo ritornare a 3-8 di alcalinità; e nella cavia VI oscillò tra 1.5 e 9. Usando come indicatore la fenolftaleina, si ebbero valori del grado di alcalinità ancora minori e rispettivamente maggiori del grado di acidità, pel noto fatto che la fenolftaleina è sensibile anche agli acidi debolissimi (CO_2). In alcuni giorni (cavia IV e VI) ebbi pertanto differente reazione secondo l'indicatore usato. Nella cavia I osservai, inoltre, che il grado di acidità aumentava nei giorni, in cui l'animale introduceva minor quantità di farina. Molto probabilmente questo mutamento della reazione chimica dell'urina sta a significare un profondo perturbamento dell'intero metabolismo corporeo, caratterizzato da un abnorme produzione di acidi nei liquidi dell'organismo (sangue), ossia da un'acidosi. Le cause di tale acidosi erano forse due. La prima dipendeva probabilmente dall'inanizione parziale, per cui l'animale non assumendo cibo sufficente, consumava i proprî tessuti (ciò si verificò specialmente nella cavia I). Abbiamo ricordato, infatti, che negli erbivori il digiuno trasforma appunto la reazione alcalina dell'urina in acida. La seconda causa era insita nell'alimento maidico, pel fatto che esso contiene minore quantità di sali alcalini delle erbe, o i suoi costituenti (specialmente proteine, grassi e carboidrati) nell'organismo producono un'eccesiva quantità di acidi, o finalmente, ristagnando nel cieco, subisce fermentazioni acide. A favore di quest'ultima ipotesi sta l'osservazione che la poltiglia trovata nel ceco delle cavie, giunte a morte, era commista ad abbondante gas ed aveva reazione

acida. Ricorderò che anche nell'uomo recenti ricerche [1] hanno dimostrato che l'alimentazione esclusiva cereale (pane di frumento) produce abnorme acidità delle fecce e aumento dell'ammoniaca eliminata coll'urina. Probabilmente i tre accennati fattori concorrono insieme nella produzione dell'acidosi cereale della cavia.

Un'altra alterazione della secrezione urinaria che comparve spesso, verso la fine dell'esperienza, fu l'albuminuria.

4. Un'ulteriore costante e notevole influenza ebbe l'alimentazione maidica esclusiva sul peso del corpo. Tranne un breve periodo iniziale nelle cavie I e VI, in cui il peso aumentò di alcuni grammi, esso diminuì costantemente e gradualmente con deperimento progressivo e generale. La curva della diminuzione del peso fu rapidissima nella I, molto meno rapida nella IV e nella VI. La I morì dopo aver perduto il 36 %, la IV dopo aver perduto il 41 % e la VI dopo aver perduto il 21 % del peso del corpo. Quest'ultima differiva dalle altre, perchè era in via di sviluppo. La III morì dopo aver perduto il 30 %.

5. Le lesioni anatomopatologiche grossolane che potei osservare erano specialmente a carico delle pareti del tubo gastroenterico.

6. Le due cavie (II e V), l'una adulta e l'altra in via di sviluppo, alimentate con farina di frumento, sopravvissero ancora meno delle altre, presentando essenzialmente gli stessi disturbi, ossia scarsa assunzione di cibo (specialmente nella II), arresto della produzione fecale, diminuzione della quantità di urina eliminata, diminuzione della sua reazione alcalina. La II morì dopo aver perduto il 24 % del proprio peso: la V, invece, alimentata con pane, senza diminuire affatto di peso: in questa è però notevole il fatto del quasi completo arresto della produzione fecale.

In base a tutti questi fatti io credo che le cause del cosiddetto maidismo sperimentale delle cavie, ossia dei danni prodotti dall'alimentazione esclusiva col mais non siano da ricercare nella mancanza di nuove ed ignote sostanze alimentari ipotetiche, ma risiedono quasi tutte nelle note proprietà chimiche di questo cereale. Le cavie mantenute artificialmente per lungo tempo con la farina o con le cariossidi maidiche, soffrono e muoiono perchè, in confronto della loro alimentazione abituale (prevalentemente erbacea),

a) introducono una minore quantità di acqua;

b) ingeriscono una quantità di cibo insufficente a coprire le perdite; si trovano, quindi, in istato di inanizione cronica parziale;

c) questo alimento, per essere forse, in confronto delle erbe, molto meno ricco di cellulosa e di scorie, non favorisce la produzione delle fecce

[1] E. Arderhalden, G. Ewald, A. Fodor e C. Roese, *Versuche über den Bedarf an Eiweiss unter verschiedenen Bedingungen. Ein Beitrag zum Problem des Stickstoffminimums.* Pflügers Arch., *160*, pp. 511-521 (1915).

e quindi, ristagnando nel cieco, dà luogo ad abnormi fermentazioni, specialmente acide;

d) producono ed eliminano una quantità di urina molto minore del normale, con costituzione chimica diversa, soprattutto per essere scarsamente alcalina o persino acida;

e) e finalmente il loro metabolismo interno subisce una profonda alterazione, dando luogo probabilmente ad un'intossicazione acida (acidosi).

Tale azione dannosa non è però specifica del mais; altri cereali producono gli stessi effetti. E io credo che anche le cavie su cui sperimentarono i surricordati autori (Holst, Frölich ecc.) alimentandole con cereali secchi, ebbero a soffrire i suddescritti disturbi e morirono per le stesse cause. Le lesioni ossee, costatate da questi osservatori, è noto, possono essere interpretate come effetti di una lenta intossicazione acida; come pure l'azione benefica da loro riscontrata per l'aggiunta di diversi vegetali crudi ecc. può essere facilmente spiegata attribuendola ai loro costituenti noti (acqua, cellulosa, sali alcalini ecc.), senza ricorrere all'ipotesi di sostanze ignote.

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXIV. (1892-1915). Fasc. 5°. Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIV. (1892-1915). Fasc. 3-4.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XI. Fasc. 3.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie, sino al 5 settembre 1915.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 10 ottobre 1915.* **N. 6.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXIV°. — Fascicolo 6°

2° SEMESTRE.

Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie sino al 19 settembre 1915.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

// RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI
pervenute all'Accademia durante le ferie del 1915.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Matematica. — *Sopra una classe di sistemi n^{pli} ortogonali.* Nota del Socio Luigi Bianchi (1).

1. Nella Nota inserita nel fascicolo 10° (1° semestre 1915) di questi Rendiconti (2), ho considerato una classe di sistemi tripli di superficie ortogonali dello spazio ordinario, che dipende in modo singolare dalle superficie pseudosferiche. Dimostro, ora, che esistono nello spazio S_n euclideo, ad n dimensioni ($n \geq 3$), sistemi n^{pli} di ipersuperficie ortogonali, che ne costituiscono la naturale generalizzazione. La loro ricerca dipende essenzialmente dalla integrazione di un sistema differenziale [sistema (C), n. 3], che offre un notevole esempio di sistemi lineari canonici, completamente integrabili, del Bourlet.

Per maggiore chiarezza, ricordiamo le formole fondamentali pei sistemi n^{pli} ortogonali nello spazio S_n euclideo ad n dimensioni (3).

Il quadrato dell'elemento lineare ds dello spazio, riferito al sistema n^{plo} ortogonale $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, assuma la forma

$$(1)\quad ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 = H_1^2\, du_1^2 + H_2^2\, du_2^2 + \cdots + H_n^2\, du_n^2\,,$$

dove $x_1, x_2, \ldots, x_n$ indicano le coordinate cartesiane ortogonali del punto

(1) Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1915.

(2) *Sopra una classe di sistemi tripli di superficie ortogonali* (seduta del 16 maggio 1915).

(3) Ved. Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, livre II, chap. I (2ème édition, 1910).

variabile. Le condizioni perchè questo ds^2 appartenga all' S_n euclideo, date dall'annullarsi dei simboli riemanniani a quattro indici per la forma differenziale $\sum_i H_i^2 du_i^2$, aquistano, colla introduzione delle $n(n-1)$ rotazioni

$$\beta_{ik} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_k}{\partial u_i} \qquad (i \neq k),$$

la forma seguente:

$$(A) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il} \beta_{lk} & (i \neq k \neq l) \\ \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \dfrac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} = - \sum\limits_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} . \end{cases}$$

Qui, nelle formole della prima linea, bisogna far percorrere ad (i, k, l) tutte le terne di indici *diversi* prese fra $1, 2, 3, \dots, n$; e nelle (A_2) il simbolo sommatorio

$$\sum_{\lambda}^{(i,k)}$$

sta ad indicare che l'indice variabile λ assume tutti i valori da *1* a n, *con esclusione dei due valori particolari* i, k.

Ad ogni sistema (β_{ik}), integrale delle (A), corrispondono infiniti sistemi n^{pli} ortogonali (paralleli). Ciascuno di questi è individuato da un sistema di valori di $(H_1, H_2, \dots H_n)$, assoggettati soltanto a soddisfare alle equazioni differenziali

$$(B) \qquad \frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k \qquad (i \neq k),$$

le cui condizioni d'integrabilità sono identicamente soddisfatte, a causa delle (A) della prima linea, talchè l'integrale generale $(H_1, H_2, \dots, H_n)$ dipende da *n funzioni arbitrarie*, potendosi assegnare ad arbitrio la funzione della u_i (variabile parametrica) a cui si riduce la H_i quando le rimanenti variabili (principali) assumono valori iniziali dati $u_k^{(0)}$.

2. Tutti gli infiniti sistemi n^{pli} ortogonali, corrispondenti alle medesime rotazioni β_{ik}, hanno a comune, in ogni punto $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ dello spazio, l'orientazione dell' n^{edro} principale, i cui coseni di direzione degli spigoli sono dati dalle formole

$$X_i^{(r)} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial x_r}{\partial u_i},$$

l'indice inferiore i riferendosi allo spigolo (u_i), il superiore r all'asse (x_r) a cui è relativo.

Questi coseni di direzione, indipendentemente dall'indice superiore r che omettiamo nella scrittura, soddisfano al sistema di equazioni ai differenziali totali [1]:

$$(a) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} X_k \\ \dfrac{\partial X_i}{\partial u_i} = - \sum\limits_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i} X_\lambda . \end{cases}$$

Queste, note le β_{ik} in funzione delle u, determinano perfettamente gli n^2 coseni $X_i^{(r)}$, *a meno di una sostituzione ortogonale a coefficienti costanti*, cioè a meno di una rotazione nell' S_n.

Scelto un qualunque sistema integrale $(H_1, H_2, \ldots, H_n)$ delle (B), resta determinato per quadrature (a meno di una traslazione) il corrispondente sistema n^{plo} ortogonale dalle formole

$$(2) \qquad \frac{\partial x_r}{\partial u_i} = H_i X_i^{(r)} \qquad (i . r = 1, 1, \ldots, n).$$

Introduciamo ora, insieme colle n funzioni H_i, le altre

$$W_1, W_2, \ldots, W_n,$$

che dànno le distanze (algebriche) dell'origine dalle n facce dell' n^{edro} principale, cioè

$$(3) \qquad W_i = \sum_r x_r X_i^{(r)} \qquad (i = 1,2, \ldots, n).$$

In virtù delle (a), queste soddisfano al sistema di equazioni a derivate parziali

$$(B^*) \qquad \frac{\partial W_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} W_k \qquad (i \neq k),$$

che diciamo *l'aggiunto* del sistema (B).

Viceversa, se le $W_1, W_2, \ldots, W_n$ soddisfano alle (B^*), resta determinato dalle (3) un sistema n^{plo} ortogonale corrispondente, che si ha, *in termini finiti*, colle formole

$$(4) \qquad x_r = \sum_i W_i X_i^{(r)} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

[1] Le equazioni (a) sono, sotto altra forma, le equazioni differenziali di Christoffel

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_k} = \sum_l \begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_l},$$

che risultano dall'equivalenza delle due forme differenziali (1).

E invero, derivando le (4) rispetto ad u_k, coll'osservare le (a) e le $(B^\star)$, si trova subito

$$\frac{\partial x_r}{\partial u_k} = \left(\frac{\partial W_k}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(k)} \beta_{\lambda k} W_\lambda\right) \cdot X_k^{(r)} ,$$

formola che pone in evidenza il sistema n^{plo} ortogonale, coi seguenti valori h_i per le H_i:

$$h_i = \frac{\partial W_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} W_\lambda . \tag{5}$$

3. Ricordate queste generalità dalla teoria dei sistemi n^{pli} ortogonali, veniamo all'oggetto proprio della presente Nota.

Indichino $c_1, c_2, \dots, c_n$ n costanti arbitrarie, che qui, per evitare la suddistinzione di molti casi particolari, supponiamo *tutte diverse da zero e fra loro diseguali*, e domandiamo:

Esistono sistemi n^{pli} ortogonali, nei quali $W_1, W_2, \dots, W_n$ siano legate dalla relazione quadratica

$$c_1 W_1^2 + c_2 W_2^2 + \cdots + c_n W_n^2 = \text{cost} ? \tag{I}$$

Il problema proposto consiste nel ricercare se esistono $n(n-1)+n=n^2$ funzioni delle u

$$\beta_{ik} \quad , \quad W_i ,$$

che insieme soddisfino alle equazioni differenziali (A), $(B^\star)$, ed all'equazione in termini finiti (I). È facile l'eliminare di qui le W_i e formare un nuovo sistema di equazioni differenziali per le β_{ik}, che dovremo aggregare alle (A). Per ciò deriviamo la (I) rispetto ad una qualunque u_i, e, osservando le $(B^\star)$, avremo

$$W_i \left\{ c_i \frac{\partial W_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} c_\lambda \beta_{\lambda i} W_\lambda \right\} = 0 .$$

Escludendo senz'altro i casi più ovvii, e di facile trattazione, nei quali qualcuna delle W_i si annulli, deduciamo dalla precedente:

$$c_i \frac{\partial W_i}{\partial u_i} = - \sum_\lambda^{(i)} c_\lambda \beta_{\lambda i} W_\lambda . \tag{6}$$

Confrontando questa colla $(B^\star)$

$$\frac{\partial W_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} W_k \qquad (i \neq k) ,$$

costruiamo la corrispondente condizione d'integrabilità

$$c_i \frac{\partial}{\partial u_i} (\beta_{ik} W_k) + \sum_\lambda^{(i)} c_\lambda \frac{\partial}{\partial u_k} (\beta_{\lambda i} W_\lambda) = 0 .$$

Indicando con Ω il primo membro, e sviluppando colle (B*), abbiamo

$$\Omega = c_i \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} W_k + c_i \beta_{ik} \beta_{ki} W_i + \sum_{\lambda}^{(i,k)} c_\lambda \frac{\partial}{\partial u_k} (\beta_{\lambda i} W_\lambda) + c_k \frac{\partial}{\partial u_k} (\beta_{ki} W_k);$$

ed osservando le (A), le (B*) e la (6), troveremo

$$\Omega = W_k \left\{ c_i \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + c_k \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} c_\lambda \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} \right\} +$$
$$+ c_i \beta_{ik} \beta_{ki} W_i + \sum_{\lambda}^{(i,k)} c_\lambda \beta_{\lambda k} \beta_{ki} W_\lambda - \beta_{ki} \sum_{\lambda}^{(k)} c_\lambda \beta_{\lambda k} W_\lambda .$$

Gli ultimi tre termini si distruggono e, poichè supponiamo $W_k \neq 0$, restano le equazioni nelle sole (β_{ik})

$$c_i \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + c_k \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} = - \sum_{\lambda}^{(i,k)} c_\lambda \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} ,$$

che dobbiamo aggregare alle (A_2)

$$\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} = - \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} .$$

Di qui, risolvendo rapporto alle due derivate, risultano le formole

$$\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} = \sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{c_\lambda - c_k}{c_k - c_i} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k}$$

$$\frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} = \sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{c_\lambda - c_i}{c_i - c_k} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} ,$$

la seconda delle quali non è che la prima, scambiato i con k. Concludiamo adunque:

In ogni sistema n^{plo} ortogonale, nel quale $W_1, W_2, \ldots, W_n$ *siano legate dall'equazione quadratica* (I), *le* $n(n-1)$ *rotazioni* β_{ik} *debbono soddisfare al seguente sistema di* $2n(n-1)$ *equazioni a derivate parziali,*

$$(C) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il} \beta_{lk} & (i \neq k \neq l) \\[2ex] \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} = \displaystyle\sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{c_\lambda - c_k}{c_k - c_i} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} , \end{cases}$$

che include in particolare il sistema (A).

4. La prima questione che ora si presenta è quella di esaminare la compatibilità delle $2n(n-1)$ equazioni (C) nelle $n(n-1)$ funzioni incognite β_{ik}, e di valutare il grado di arbitrarietà dell'integrale generale.

Si osservi che, nel sistema (C), di una qualunque delle incognite β_{ik} sono assegnate *tutte* le derivate prime, in funzione omogenea quadratica delle incognite, *fatta eccezione della derivata* $\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k}$ che non vi figura. Per ciò, per la funzione incognita β_{ik} la variabile u_k è parametrica; le altre $n-1$ sono principali. Le condizioni d'integrabilità per le (C) saranno identicamente soddisfatte se i *due* valori tratti dalle (C) per una medesima derivata seconda principale coincidono, in virtù delle (C) stesse. Ma per due derivate seconde

$$\frac{\partial^2 \beta_{ik}}{\partial u_l \partial u_m}, \quad \frac{\partial^2 \beta_{ik}}{\partial u_m \partial u_l},$$

dove l, m siano indici diversi fra loro e da i, k, la coincidenza segue già dalle (C) della prima linea. Resta dunque da verificarsi che, per le (C) stesse, si ha anche

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(\beta_{il}\beta_{lk}) + \sum_{\lambda}^{(i,k)} + \frac{c_\lambda - c_k}{c_i - c_k}\frac{\partial}{\partial u_l}(\beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k}) = 0 .$$

Indicando con Θ il primo membro, possiamo scrivere

$$\Theta = \beta_{lk}\frac{\partial \beta_{il}}{\partial u_i} + \beta_{il}\frac{\partial \beta_{lk}}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i,k,l)} \frac{c_\lambda - c_k}{c_i - c_k}\frac{\partial}{\partial u_l}(\beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k}) + \frac{c_l - c_k}{c_i - c_k}\frac{\partial}{\partial u_l}(\beta_{li}\beta_{lk}) ;$$

ed eseguendo colle (C) stesse, e ordinando opportunamente i termini,

$$\begin{aligned}\Theta = {} & \sum_{\lambda}^{(i,k,l)} \frac{c_\lambda - c_k}{c_i - c_k}\beta_{\lambda l}\beta_{li}\beta_{\lambda k} + \frac{c_l - c_k}{c_i - c_k}\beta_{li}\sum_{\lambda}^{(k,l)}\frac{c_\lambda - c_k}{c_k - c_l}\beta_{\lambda l}\beta_{\lambda k} + \beta_{il}\beta_{li}\beta_{ik} + \\ & + \sum_{\lambda}^{(i,\ ,l)}\frac{c_\lambda - c_k}{c_i - c_k}\beta_{\lambda i}\beta_{\lambda l}\beta_{lk} + \frac{c_l - c_k}{c_i - c_k}\sum_{\lambda}^{(i,l)}\frac{c_\lambda - c_i}{c_i - c_l}\beta_{\lambda i}\beta_{\lambda l}\beta_{lk} + \\ & + \sum_{\lambda}^{(i,l)}\frac{c_\lambda - c_l}{c_l - c_i}\beta_{\lambda i}\beta_{\lambda l}\beta_{lk} .\end{aligned}$$

I tre primi termini manifestamente si distruggono: ma anche gli ultimi tre si elidono, a causa della identità

$$(c_\lambda - c_i)(c_l - c_k) + (c_\lambda - c_l)(c_k - c_i) = (c_\lambda - c_k)(c_l - c_i) ,$$

onde segue effettivamente $\Theta = 0$. Concludiamo che il sistema lineare canonico (C) è *completamente integrabile*. Se scegliamo adunque un sistema iniziale di valori per le variabili u_i [sia per semplicità il sistema $(0, 0, \ldots, 0)$], sarà determinato univocamente un sistema integrale (β_{ik}) delle (C) prescrivendo che la rotazione β_{ik} si riduca ad una funzione arbitraria data della sua variabile parametrica u_k, quando le altre variabili (principali) si annullano. Sembra, così, che l'integrale generale delle (C) dipenda da $n(n-1)$

funzioni arbitrarie, quante sono le incognite β_{ik}. Però, di queste funzioni arbitrarie, n sono soltanto apparenti, dipendendo dall'arbitrarietà ancora lasciata ai parametri u_i; in realtà adunque:

L'integrale generale (β_{ik}) *del sistema* (C) *dipende da* $n(n-2)$ *funzioni arbitrarie essenziali.*

5. Una proprietà notevole del sistema differenziale (C) è questa: che *esso possiede n integrali quadratici nelle rotazioni.*

Si considerino infatti le n espressioni quadratiche nelle β

$$\Omega_k = \sum_\lambda^{(k)} (c_\lambda - c_k)\,\beta^2_{\lambda k} \qquad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Se si deriva Ω_k rispetto ad una qualunque u_i, *diversa da* u_k, si ha

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_k}{\partial u_i} = \sum_\lambda^{(i,k)} (c_\lambda - c_k)\,\beta_{\lambda k}\frac{\partial \beta_{\lambda k}}{\partial u_i} + (c_i - c_k)\,\beta_{ik}\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i},$$

ossia, per le (C),

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_k}{\partial u_i} = \sum_\lambda^{(i,k)} (c_\lambda - c_k)\,\beta_{\lambda k}\,\beta_{\lambda i}\,\beta_{ik} + (c_i - c_k)\,\beta_{ik}\sum_\lambda^{(i,k)} \frac{c_\lambda - c_k}{c_k - c_i}\,\beta_{\lambda i}\,\beta_{\lambda k},$$

espressione che identicamente si annulla. Ne segue che la Ω_k è una funzione della sola u_k; e poichè, cangiando il parametro u_k, tutte le $\beta_{\lambda k}$ si moltiplicano per un medesimo fattore, funzione arbitraria di u_k, e quindi Ω_k pel suo quadrato, ne risulta che possiamo disporre del parametro u_k così da ridurre Ω_k ad una costante. Ne concludiamo quindi:

Il sistema differenziale (C), scelti convenientemente i parametri u_1, $u_2, \dots, u_n$, possiede gli n integrali quadratici

$$\left\{\begin{aligned} &(c_2 - c_1)\,\beta^2_{21} + (c_3 - c_1)\,\beta^2_{31} + \cdots + (c_n - c_1)\,\beta^2_{n1} = \text{cost} \\ &(c_1 - c_2)\,\beta^2_{12} + (c_3 - c_2)\,\beta^2_{32} + \cdots + (c_n - c_2)\,\beta^2_{n2} = \text{cost} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &(c_1 - c_n)\,\beta^2_{1n} + (c_2 - c_n)\,\beta^2_{2n} + \cdots + (c_{n-1} - c_n)\,\beta^2_{n-1}, \quad = \text{cost}. \end{aligned}\right.$$

6. Supponiamo scelto per le rotazioni (β_{ik}) un qualunque sistema integrale delle (C). È facile vedere che esisteranno in effetto (infiniti) sistemi n^{pli} ortogonali con queste rotazioni, e soddisfacenti alla condizione (I). Per determinarli, dovremo associare alle (B*) le equazioni (6), e formeremo così il sistema

$$\text{(II)} \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial W_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} W_k \\ &\frac{\partial W_i}{\partial u_i} = -\sum_\lambda^{(i)} \frac{c_\lambda}{c_i}\,\beta_{\lambda i} W_\lambda. \end{aligned}\right.$$

Questo è un sistema lineare ai differenziali totali per le funzioni incognite $W_1, W_2, \dots, W_n$, e dal calcolo stesso eseguito al n. 3 risulta che esso è completamente integrabile. D'altra parte, se poniamo per un momento

$$\Phi = c_1 W_1^2 + c_2 W_2^2 + \cdots + c_n W_n^2,$$

subito vediamo che, a causa delle (II), tutte le derivate di Φ si annullano, e però Φ è una costante. Scelto adunque un qualunque sistema $(W_1, W_2, \dots, W_n)$ integrale delle (II), sarà verificata la condizione (I), e le formole (4) daranno il sistema n^{plo} ortogonale corrispondente. In questo sistema i valori h_i delle H_i si calcoleranno, secondo le (5) e per le (II_2), dalle formole

$$h_i = \sum_{\lambda}^{(i)} \frac{c_i - c_\lambda}{c_i} \beta_{\lambda i} W_\lambda. \tag{7}$$

Così, ad ogni sistema (β_{ik}) di rotazioni che soddisfino alle (C), corrispondono infiniti sistemi n^{pli} ortogonali colle W_i legate dalla relazione quadratica (I). E qui è ancora da osservarsi che, figurando nel sistema (C) solo le differenze $c_i - c_k$, *si possono alterare le n costanti c_i di una medesima costante additiva, senza che varii l'immagine ipersferica del sistema.*

7. Rispetto alla integrazione del sistema differenziale (C), poco apprendono i metodi generali. Ma, in grazia del suo significato geometrico, possiano facilmente riconoscere che: *noto un sistema particolare (β_{ik}) di soluzioni delle* (C), *potremo trovarne infiniti nuovi integrando equazioni differenziali ordinarie.*

Per questo si supponga che le n costanti $c_1, c_2, \dots, c_n$ non abbiano tutte lo stesso segno, ciò che possiamo sempre ottenere alterandole, secondo l'osservazione superiore, di una medesima costante additiva. Si considerino allora quei particolari sistemi n^{pli} ortogonali nei quali è soddisfatta la condizione (I), annullandosi la costante del secondo membro

$$c_1 W_1^2 + c_2 W_2^2 + \cdots - c_n W_n^2 = 0. \tag{8}$$

Indicando questi come sistemi (Σ), dimostriamo:

Se si assoggetta un tale sistema (Σ) ad un'inversione per raggi vettori reciproci rispetto all'origine, il sistema n^{plo} derivato $(\overline{\Sigma})$ appartiene alla medesima classe.

Prendendo per semplicità $=1$ il raggio dell'ipersfera d'inversione, le formole d'inversione sono

$$\overline{x}_r = \frac{x_r}{\varrho},$$

dove si è posto

$$\varrho = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = W_1^2 + W_2^2 + \cdots + W_n^2.$$

Derivando rapporto ad u_i, coll'osservare che si ha

$$\frac{\partial \varrho}{\partial u_i} = 2 \sum_\lambda x_\lambda \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_i} = 2h_i \sum_\lambda x_\lambda X_i^{(\lambda)} = 2h_i W_i ,$$

risulta

$$\frac{\partial \bar{x}_r}{\partial u_i} = \frac{h_i}{\varrho}\left(X_i^{(r)} - \frac{2x_r W_i}{\varrho}\right).$$

Queste formole dimostrano che i valori $\overline{X}_i^{(r)}$ dei coseni di direzione per il sistema derivato sono

$$\overline{X}_i^{(r)} = X_i^{(r)} - \frac{2x_r W_i}{\varrho} ,$$

ed i nuovi valori delle H_i

$$\bar{h}_i = \frac{h_i}{\varrho} .$$

Indicando con $\overline{W}_i$ le quantità analoghe alle W_i, abbiamo subito, dalle precedenti,

$$\overline{W}_i = -\frac{W_i}{\varrho} . \tag{9}$$

Di qui segue appunto che la relazione (8) per le W_i si traduce nell'analoga per le $\overline{W}_i$, c. d. d.

Inoltre, derivando la (9) rispetto ad u_k, abbiamo

$$\frac{\partial \overline{W}_i}{\partial u_k} = -\frac{1}{\varrho} \beta_{ik} W_k + \frac{2W_i h_k}{\varrho^2} W_k ,$$

cioè

$$\frac{\partial \overline{W}_i}{\partial u_k} = \left(\beta_{ik} - \frac{2W_i h_k}{\varrho}\right) \overline{W}_k ,$$

onde deduciamo che le rotazioni $\bar{\beta}_{ik}$ pel sistema derivato $(\overline{\Sigma})$ sono

$$\bar{\beta}_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2W_i h_k}{\varrho} ,$$

ovvero anche, per le (7),

$$\bar{\beta}_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2W_i}{\sum_\lambda W_\lambda^2} \cdot \sum_\lambda^{(k)} \frac{c_k - c_\lambda}{c_k} \beta_{\lambda k} W_\lambda . \tag{10}$$

Dunque: *noto un sistema* (β_{ik}) *di soluzioni delle* (C), *se ne ottengono infiniti nuovi dalle formole* (10), *ponendovi per le* W_i *un sistema di soluzioni del sistema di equazioni* (II) *ai differenziali totali, soddisfacenti alla condizione iniziale* (8).

8. Supponiamo ora, al contrario, che le costanti c_i abbiano tutte il medesimo segno: per es. il positivo, ciò che possiamo ottenere aumentandole tutte di una stessa costante (n. 6). Allora, se nelle (C) facciamo il cangiamento *reale* di funzioni incognite

$$\beta_{ik} = \sqrt{\frac{c_k}{c_i}}\,\beta'_{ik}\,, \tag{11}$$

le (C) si cangiano nelle altre

$$(C')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \beta'_{ik}}{\partial u_l} = \beta'_{il}\,\beta'_{lk} \\[2ex] \dfrac{\partial \beta'_{ik}}{\partial u_i} = \displaystyle\sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{\dfrac{1}{c_\lambda} - \dfrac{1}{c_k}}{\dfrac{1}{c_k} - \dfrac{1}{c_i}}\,\beta'_{\lambda i}\,\beta'_{\lambda k}\,, \end{cases}$$

che sono le (C) stesse ove si cangino le c_i nelle loro inverse $\frac{1}{c_i}$. Le formole (11) dànno il passaggio dalle soluzioni (β_{ik}) del sistema (C) a corrispondenti (β'_{ik}) del sistema (C'), e viceversa.

Alla considerazione dei sistemi n^{pli} ortogonali (Σ) che verificano la (I),

$$\sum_i c_i W_i^2 = \text{cost}\,, \tag{12}$$

conviene quindi associare quelli dei sistemi (Σ') che verificano l'altra

$$\sum_i \frac{W_i'^2}{c_i} = \text{cost.} \tag{12'}$$

Quando siano noti i valori dei coseni X_i relativi alle rotazioni (β_{ik}), e così quelli X'_i per le rotazioni (β'_{ik}), è facile vedere che si avranno senza altro, *in termini finiti*, i sistemi (Σ) corrispondenti alla (12), e quelli (Σ') corrispondenti alla (12'). E infatti, se nelle equazioni differenziali (II) poniamo

$$W_i = \frac{X'_i}{\sqrt{c_i}}\,,$$

queste diventano

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X'_i}{\partial u_k} = \beta'_{ik}\,X'_k \\[2ex] \dfrac{\partial X'_i}{\partial u_i} = -\displaystyle\sum_{\lambda}^{(i)} \beta'_{\lambda i}\,X'_\lambda\,, \end{cases}$$

che sono precisamente le equazioni differenziali (a) per le X'_i. Similmente, ponendo

$$W'_i = \sqrt{c_i}\,X_i\,,$$

si identificano le (II) per le W'_i colle (a) per le X_i.

9. Supposto ora soltanto che le rotazioni β_{ik} soddisfano alle (C), consideriamo tutti gli infiniti sistemi n^{pli} ortogonali (paralleli) corrispondenti a queste rotazioni. Uno qualunque di questi sistemi sarà individuato (n. 1) da n funzioni H_i, che soddisfino alle (B), oppure da n funzioni W_i che soddisfino al sistema aggiunto (B*). Ora diciamo che nel caso nostro: *Da un sistema noto* $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ *di soluzioni delle* (B*) *si passa ad un sistema di soluzioni* $(H_1, H_2, \ldots, H_n)$ *del sistema aggiunto colle formole lineari*

$$H_i = c_i \frac{\partial W_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} c_\lambda \beta_{\lambda i} W_\lambda . \tag{13}$$

Per dimostrarlo, si derivi questa rapporto ad u_k $(k \neq i)$, e ne verrà

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = c_i \frac{\partial}{\partial u_i}(\beta_{ik} W_k) + \sum_{\lambda}^{(i)} c_\lambda \frac{\partial}{\partial u_k}(\beta_{\lambda i} W_\lambda) ;$$

ed eseguendo le derivazioni, col porre mente alle (C) ed alle (B*), si ottiene

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = c_i W_k \sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{c_\lambda - c_k}{c_k - c_i} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} + c_i \beta_{ik} \beta_{ki} W_i + \sum_{\lambda}^{(i,k)} c_\lambda \beta_{\lambda k} \beta_{ki} W_\lambda +$$

$$+ W_k \sum_{\lambda}^{(i,k)} c_\lambda \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} + c_k \beta_{ki} \frac{\partial W_k}{\partial u_k} + c_k W_k \sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{c_\lambda - c_i}{c_i - c_k} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} .$$

I tre termini contenenti W_k in fattore si elidono a causa della identità

$$c_i(c_\lambda - c_k) + c_\lambda(c_k - c_i) + c_k(c_i - c_\lambda) = 0 ,$$

e, raccogliendo i rimanenti, si può scrivere

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} \left\{ c_k \frac{\partial W_k}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(k)} c_\lambda \beta_{\lambda k} W_\lambda \right\} ,$$

ossia precisamente

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k , \qquad \text{c. d. d.}$$

Le formole (13) dànno dunque trasformazioni *parallele* dei nostri sistemi tripli ortogonali, con sole quadrature (n. 1).

Se si applicano queste trasformazioni ai particolari sistemi (Σ) corrispondenti alla relazione (I), risulta, per le (II),

$$H_1 = H_2 = \cdots = H_n = 0 ,$$

e la trasformazione diventa illusoria, riducendosi il sistema trasformato ad un punto. Anche è da osservare che, se tutte le costanti c_i si aumentano

di una medesima costante c (n. 6), i nuovi valori $\overline{H}_i$ delle H_i sono, per le (5),

$$\overline{H}_i = H_i + ch_i ,$$

cioè il sistema n^{plo} derivato è una combinazione lineare di quello corrispondente alle H_i e del primitivo dato dalle h_i.

In fine, per *l'inversione* di queste trasformazioni parallele basta osservare che, se si prendono $H_1, H_2, \dots, H_n$ date da un qualunque sistema di soluzioni delle (B), le equazioni (B*) per le W_i, insieme colle (13), formano un sistema di equazioni ai differenziali totali completamente integrabile.

Meccanica celeste. — *Aggiunta alla Nota « Sul problema dei due corpi nel caso di masse variabili »*, del Socio PAOLO PIZZETTI [1].

Nella mia Nota, pubblicata con questo titolo nel 2° fascicolo del presente volume dei Rendiconti, il paragone da me fatto dell'orbita effettiva con una orbita kepleriana difetta di generalità pel fatto che io ho supposto che, in quella posizione particolare da me assunta come iniziale, la velocità relativa delle due masse sia ortogonale al raggio vettore, mentre, come è chiaro, si possono immaginare orbite spiraliformi, prive di afelii e di perielii. Di ciò mi fa giusta osservazione il chm̃o prof. Armellini in una sua gentile lettera.

Non è difficile conseguire la desiderata generalità modificando un poco il calcolo. Mi limito, per semplicità, al caso in cui risulti *ellittica* l'orbita kepleriana che serve di confronto (ossia quell'orbita kepleriana che corrisponde al valore iniziale M_0 della massa totale e ai valori iniziali del raggio vettore e del vettore velocità). È facile rifare il calcolo pei casi iperbolico e parabolico. Possiamo, nel caso in parola, determinare due quantità e_0 e γ tali che sia $0 < e_0 < 1$, $0 \leq \gamma \leq 2\pi$, e che i valori iniziali di r e di $\frac{dr}{d\theta}$ (mantengo le notazioni della precedente Nota) soddisfacciano alle relazioni

$$\frac{1}{r_0} = \frac{fM_0}{c^2}(1 + e_0 \cos\gamma) \qquad \frac{1}{r_0^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_0 = \frac{fM_0}{c^2} e_0 \operatorname{sen}\gamma .$$

Si trova allora facilmente che le costanti A_0 e B_0 della mia formola (5) hanno i valori

$$A_0 = -\frac{fM_0}{c^2} e_0 \operatorname{sen}\gamma \qquad B_0 = \frac{fM_0}{c^2} e_0 \cos\gamma ,$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 19 settembre 1915.

sicchè la (5) diventa

$$\frac{1}{r} = \frac{fM_0}{c^2} \{1 + e_0 \cos(\theta + \gamma)\} + \int_0^\theta \varphi_\tau \operatorname{sen}(\theta - \tau)\, d\tau,$$

dopo di che i calcoli e i ragionamenti procedono come nella Nota in questione.

È facile, in realtà, immaginare dei casi in cui l'orbita effettiva non presenti nè afelii, nè perielii. Derivando la (1) rispetto a θ, si ha infatti

$$(2) \qquad \frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = \frac{fM_0}{c^2} e_0 \operatorname{sen}(\theta + \gamma) - \int_0^\theta \varphi_\tau \cos(\theta - \tau)\, d\tau.$$

E, poichè il primo termine del 2° membro oscilla fra $\pm \frac{e_0 fM_0}{c^2}$, è chiaro che la derivata $\frac{dr}{d\tau}$ non si annullerà mai, almeno a partire da un certo valore Θ di θ, quando, per $\theta \geq \Theta$, l'integrale del 2° membro si mantenga di segno costante ed in valore assoluto superiore ad $\frac{e_0 fM_0}{c^2}$. Un esempio semplice lo abbiamo quando supponiamo l'incremento della massa proporzionale al quadrato della anomalia. Posto infatti $\varphi = A\theta^2$, e quindi $\varphi_\tau = A\tau^2$, si ha

$$\int_0^\theta \varphi_\tau \cos(\theta - \tau)\, d\tau = 2A(\theta - \operatorname{sen}\theta).$$

Supposta la costante A positiva, il secondo membro è positivo e cresce indefinitamente con θ per valori positivi di θ, e soddisfa quindi alla indicata condizione.

Più generalmente, se la quantità φ, considerata come funzione dell'anomalia θ, ammette derivata, e se questa derivata *cresce* con θ in guisa che ad una variazione finita positiva di θ corrisponda una variazione positiva e di grandezza finita nella derivata stessa, non esisteranno apsidi a partire da un certo valore positivo di θ. Infatti poniamo

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \psi(\theta) \qquad \text{e quindi} \qquad \frac{d\varphi_\tau}{d\tau} = \psi(\tau),$$

dove $\psi(\tau)$ è, per ipotesi, crescente indefinitamente con τ. Ricordando [formole (4) della precedente Nota] che φ si annulla con θ, abbiamo, coll'integrazione per parti,

$$(3) \qquad \int_0^\theta \varphi_\tau \cos(\theta - \tau)\, d\tau = \int_0^\theta \psi(\tau) \operatorname{sen}(\theta - \tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^\theta \psi(\theta - z) \operatorname{sen} z \,.\, dz,$$

dove la $\psi(\theta - z)$ sarà decrescente al crescere di z. Posto $\theta = 2n\pi + \vartheta$ (dove n è intero positivo o nullo, e ϑ è compreso fra 0 e 2π) e spezzando l'integrale in $n + 1$ integrali negli intervalli rispettivi

$$(0\,,2\pi)\,,(2\pi\,,4\pi)\,,\ldots,(2n\pi\,,2n\pi+\vartheta)\,,$$

si verifica facilmente che ognuno degli integrali ha valor positivo e differisce da zero di una quantità finita: sicchè l'ultimo membro della (3), al crescere di θ, diverrà maggiore di qualsiasi quantità assegnata.

Cristallografia. — *Sulla forma cristallina del trinitrotoluolo α.* Nota del Corrispondente E. ARTINI [1].

È noto come in questi ultimi tempi sia riuscito, al prof. Körner e al suo collaboratore dott. Contardi, di preparare tre nuovi trinitrotoluoli, i quali, coi tre già conosciuti da parecchio tempo, completano la serie dei sei isomeri possibili per questo composto [2]. Dato il grandissimo interesse che, dal punto di vista morfotropico, poteva presentare una serie così completa, ne intrapresi, anche per gentile sollecitazione dello stesso prof. Körner, lo studio cristallografico. integrandolo, naturalmente, con quello della più vasta coorte dei relativi prodotti di-nitro-alogeno-sostituiti, e dei tre trinitro-benzoli, uno solo dei quali, il simmetrico, era stato finora oggetto di indagine cristallografica. Alcuni dei risultati da me ottenuti furono già riferiti, in forma sommaria, a scopo di identificazione delle relative sostanze, nella seconda delle citate Note del prof. Körner; altri saranno fatti conoscere in breve. In via preliminare ritenni utile di riprendere in esame anche i prodotti antecedentemente noti; e fu bene, perchè appunto per il più conosciuto di tutti, l'α-trinitrotoluolo, potei rilevare come fossero affatto incompleti e gravemente inesatti i dati cristallografici accettati finora.

Benchè la sostanza sia nota da molti anni, e venga preparata su larghissima scala, per l'impiego che se ne fa come esplosivo, l'unico che l'abbia studiata cristallograficamente sembra essere, per quanto mi consta, il Friedländer [3].

[1] Pervenuta all'Accademia il 14 settembre 1915.

[2] G. Körner e A. Contardi, *La trinitrobenzina vicinale 1.2.3, un nuovo trinitrotoluene, e prodotti dinitroalogeno-sostituiti corrispondenti* (Rendic. d. R. Accad. d. Lincei, seduta del 22 nov. 1914); idem idem, *Il quinto trinitrotoluene* (ε) *e prodotti dinitroalogeno-sostituiti corrispondenti* (ibidem, seduta del 2 maggio 1915).

[3] P. Friedländer, *Krystallographische Untersuchung einiger organischen Verbindungen.* Zeitschrift für Kryst., vol. III, ann. 1879, pag. 168.

Secondo questo autore, la sostanza sarebbe rombica, con

$$a : b : c = 0.7586 : 1 : 0.5970 \ ;$$

le forme osservate sono:

{010}, {110}, {210}, {011} .

Quanto ai valori angolari, i soli da lui esposti (senza indicazione del numero e dei limiti delle osservazioni) sono i seguenti:

	Misurato	Calcolato
(110) · (010)	52°.49′	*
(011) · (010)	59 .10	*
(210) · (010)	69 .26	69°.14′

I cristalli, non si sa da quale solvente ottenuti, erano sottilmente tabulari secondo {010}.

Io ebbi dal prof. Körner molti e magnifici cristalli, ottenuti per lentissima evaporazione da miscela di etere e alcool; altri, non meno belli, ottenni io stesso in numerosissime cristallizzazioni, da etere acetico, o da acetone, sia puri, sia misti a poco acido acetico glaciale. Dalla osservazione e dalla misura precisa di parecchi cristalli delle varie preparazioni potei ricavare con sicurezza la conclusione che la sostanza non è rombica, ma pseudo-rombica.

Sistema monoclino, cl. prismatica:

$$a : b : c = 1.64047 : 1 : 0.61936$$
$$\beta = 89°.29'.9'' \ .$$

Forme osservate:

{100}, {110}, {201}, {101}, {$\bar{1}$01}, {$\bar{3}$41}, {541}, {741} .

L'abito dei cristalli è più o meno tabulare secondo {100}, sempre allungato secondo l'asse y; un tipo assai comune è quello rappresentato, in projezione sulla {010}, dalla fig. 1. Le forme parallele all'asse y si presentano con facce abbastanza piane e nitide, suscettibili di misure di soddisfacente precisione; solo {201} ha talvolta sviluppo subordinato, e può anche mancare o essere affatto lineare. Piane e brillanti sono pure le facce di {110} e {$\bar{3}$41}; non altrettanto può dirsi degli altri due prismi obliqui {541} e {741}, per i quali è anzi caratteristica una curvatura che talvolta rende incerta e malagevole la misura. Questo vale specialmente per l'ultima delle due forme sopra ricordate, le cui facce in moltissimi casi non sono affatto misurabili, tanto che il simbolo non ne può venir determinato se non per via delle due zone [100 · $\bar{3}$41] e [201 · 34$\bar{1}$]. Tale curvatura serve egregiamente, senza bisogno di alcuna misura, per orientare i cristalli, data la for-

tissima differenza di aspetto delle facce di {541} e {741} in confronto a quelle di {$\bar{3}$41}, la cui nitidezza niente lascia a desiderare.

Lo studio morfologico è però assai spesso complicato dalla frequente esistenza di una geminazione secondo {100}, talora anche polisintetica, a lamelle alternanti; l'aspetto di un gemello, di due soli individui, quale comunemente si osserva, è rappresentato, sempre in projezione su (010), dalla fig. 2.

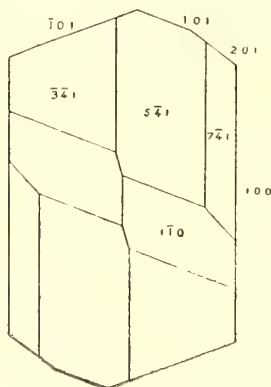
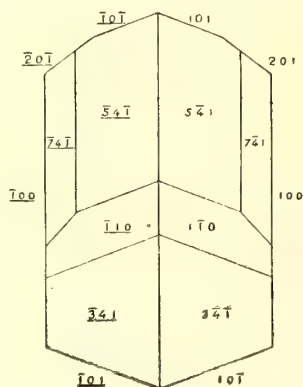



Fig. 1. Fig. 2.

Nella tabella che segue sono esposti i risultati delle osservazioni, posti a raffronto coi valori calcolati dalle mie costanti. Benchè la corrispondenza possa dirsi perfettamente soddisfacente, e sia tale da non lasciar dubbio sul grado di simmetria, ho voluto a questo proposito tentar la riprova, con la osservazione delle figure di corrosione. Queste, che sulla {100} si ottengono con tutta facilità mediante alcool assoluto freddo, si presentano come fossette a contorno trapezio, simmetriche rispetto alla traccia di {010}, ma non rispetto alla traccia di {001}.

TABELLA.

SPIGOLI MISURATI	ANGOLI OSSERVATI			ANGOLI CALCOLATI
	N.	Limiti	Medie	
(100) . (110)	14	58°.30′ — 58°.47′	58°.38′	*
(110) . $(\bar{1}10)$	4	62 . 34 — 62 . 59	62 . 46	62°. 44′
(100) . (101)	15	68 . 36 — 69 . 1	68 . 52	*
$(\bar{1}00)$. $(\bar{1}01)$	17	69 . 29 — 69 . 58	69 . 46	*
(101) . $(\bar{1}01)$	7	41 . 9 — 41 . 32	41 . 18	41 . 22
(101) . (110)	4	79 . 4 — 79 . 17	79 . 10	79 . 11
$(\bar{1}01)$. $(\bar{1}10)$	7	79 . 25 — 79 . 56	79 . 40	79 . 38
(201) . (100)	11	52 . 21 — 52 . 48	52 . 39	52 . 37
(201) . $(\bar{1}01)$	2	57 . 15 — 57 . 33	57 . 24	57 . 37
(201) . (110)	3	71 . 33 — 71 . 44	71 . 37	71 . 35
$(\bar{3}41)$. $(\bar{1}00)$	17	67 . 5 — 67 . 24	67 . 12	67 . 11
$(\bar{3}41)$. $(\bar{1}10)$	10	21 . 18 — 21 . 30	21 . 24	21 . 18
$(\bar{3}41)$. $(\bar{1}01)$	13	62 . 31 — 62 . 50	62 . 41	62 . 45
$(\bar{3}41)$. (101)	5	79 . 12 — 79 . 35	79 . 28	79 . 31
$(\bar{3}41)$. $(34\bar{1})$	2	62 . 30 — 62 . 36	62 . 33	62 . 32
(541) . (100)	11	54 . 19 — 54 . 36	54 . 27	54 . 38
(541) . (110)	4	18 . 14 — 19 . 12	18 . 45	18 . 45
(541) . (101)	8	60 . 16 — 60 . 35	60 . 23	60 . 26
(541) . $(\bar{3}41)$	2	58 . 13 — 58 . 14	58 . 13 ½	58 . 11
(541) . $(34\bar{1})$	2	40 . 8 — 40 . 16	40 . 12	40 . 3
(741) . (100)	8	44 . 18 — 45 . 12	44 . 51	45 . 13
(741) . (110)	1	—	21 . 44	21 . 47
(741) . (201)	3	49 . 54 — 50 . 22	50 . 4	50 . 18
(741) . $(\bar{3}41)$	1	—	67 . 29	67 . 36
(741) . $(34\bar{1})$	3	42 . 19 — 42 . 27	42 . 22	41 . 55
(101) . $(\underline{\bar{1}0\bar{1}})$	3	42 . 3 — 42 . 24	42 . 11	42 . 16
$(\bar{1}01)$. $(\underline{10\bar{1}})$	2	40 . 14 — 40 . 48	40 . 31	40 . 28
(101) . $(\underline{10\bar{1}})$	1	—	0 . 55	0 . 54
$(\bar{3}41)$. $(\underline{3\bar{4}\bar{1}})$	5	45 . 26 — 45 . 41	45 . 33	45 . 37
(541) . $(\underline{\bar{5}\bar{4}\bar{1}})$	2	70 . 56 — 71 . 00	70 . 58	70 . 45

P. sp. = 1.654 [1] $\chi = 8.4181$

P. mol = 227.07 $\psi = 5.1315$

V. = 137.29 $\omega = 3.1782$

[1] Determinato con la bilancia di Westphal, in soluzione di Thoulet, sopra frammenti di cristallo assolutamente limpidi e privi di inclusioni.

Se si vogliono confrontare i dati di Friedländer coi miei, basta notare che le forme

$$\{010\} ; \{110\} \; ; \; \{210\} \; ; \; \{011\} \quad \text{(Friedländer)}$$

corrispondono rispettivamente a

$$\{100\} ; \{201\} ; \{101\} \{\bar{1}01\} ; \{110\} \quad \text{(Artini).}$$

Le costanti di quell'autore, trasformate secondo la nuova orientazione, diventano allora:

$$a : b : c = 1.6753 : 1 : 0.6354$$
$$\beta = 90°.00'.$$

Le proprietà ottiche della sostanza sono tali che spiegano perfettamente come Friedländer, non potendo fondarsi abbastanza sui caratteri morfologici, data la imperfezione dei suoi cristalli, abbia concluso col ritenerli rombici. Io ho infatti constatato che, corrispondentemente alle precedenti osservazioni del già più volte citato autore, il piano degli assi ottici è parallelo a $\{010\}$, e le bisettrici acute, negative, sono sensibilmente normali a $\{100\}$; una dispersione inclinata di esse non si rileva in misura tale da poter essere con sicurezza affermata. La dispersione degli assi ottici è abbastanza forte: $\varrho < v$.

Parvemi non inutile di confrontare anche, fin da ora, le costanti di questa sostanza con quelle del trinitrobenzolo simmetrico, dal quale essa non differisce se non per la sostituzione di un $—CH_3$ ad un $—H$.

Il trinitrobenzolo 1.3.5 fu prima studiato dallo Friedländer stesso e i risultati delle sue ricerche sono esposti nella sua Nota più sopra citata, a proposito del trinitrotoluolo.

Il prof. Groth, più tardi, fece ristudiare la sostanza nel suo laboratorio, prima da Peruzzi e poi da Wagner; ma questi giunsero solo a confermare, completandoli, i risultati del primo autore. Se si adottano, come fece Groth per il confronto col trinitrofenolo [1], la orientazione e le costanti di Peruzzi

[*sistema rombico, cl. bipiramidale:*
$a : b : c : = 0.9487 : 1 : 0.7269$] [2] ,

è ben difficile di trovar qualche relazione col trinitrotoluolo. Ma qualora nelle costanti di Peruzzi si moltiplichi per 2 il parametro fondamentale sull'asse x,

[1] P. Groth. *Einleitung in die chemische Krystallographie*. Leipzig, 1904, pag. 41.

[2] Idem, *Chemische Krystallographie*. Vol. IV. (Bozze di stampa gentilmente comunicate dall'autore al prof. Körner e a me).

si ottengono, per il rapporto degli assi topici, dei valori la cui analogia con quelli del trinitrotoluolo α risulta senz'altro evidente:

P. sp. =	1.688 (Gossner)	$\chi = 8.5504$
P. mol =	213.054	$\psi = 4.5064$
V. =	126.22	$\omega = 3.2757$

Il grado di simmetria delle due sostanze è bensì diverso, ma non bisogna dimenticare che il trinitrotoluolo α è pseudorombico, con $\beta = 89\ {}^1/_2{}^\circ$; e quanto al trinitrobenzolo simmetrico, esso, secondo quanto riporta Groth (loc. cit.) dalle osservazioni dei suoi allievi, presenta per la distribuzione delle facce di bipiramide « *ein monoklines Ansehen* », che viene ad essere reso anche più manifesto « *durch zwillingsähnliche Parallelverwachsung nach* {100} ». Nè io, per mio conto, potrei modificare una parola di tali conclusioni, dopo aver misurato alcuni perfettissimi cristalli di trinitrobenzolo 1.3.5; gli angoli tra i pinacoidi di questa sostanza sono infatti *rigorosamente* eguali a 90°, ma la distribuzione delle facce è spesso perfettamente monoclina.

Geometria. — *Le varietà algebriche con indice di singolarità massimo.* Nota I di Gaetano Scorza, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo [1].

È noto, per un teorema classico di Poincaré, che, se una varietà algebrica contiene $\mu + 1$ ($\mu \geq 2$) integrali ellittici linearmente dipendenti, ne contiene senz'altro infiniti; ed è pur nota la dimostrazione geometrica estremamente elegante che di questo teorema ha dato il Severi, valendosi dell'osservazione che il sistema congiungente e il sistema intersezione di due sistemi regolari di integrali riducibili appartenenti a una stessa varietà algebrica sono anch'essi regolari [2]. Anzi dalla dimostrazione del Severi risulta che, se quei $\mu + 1$ integrali ellittici sono a μ a μ indipendenti, l'infinità degli integrali ellittici, a cui essi dànno luogo — come dice il Severi — mediante operazioni interne di proiezione e sezione, è assimilabile a quella dei vertici di una *rete di Möbius* appartenente a un $S_{\mu-1}$.

Di qua non si è autorizzati a dedurre che se una varietà algebrica di irregolarità superficiale $p > 1$ contiene $p + 1$ integrali ellittici, a p a p indipendenti, ad ogni suo integrale semplice di 1ª specie sono infinitamente

[1] Pervenuta all'Accademia il 17 settembre 1915.

[2] Severi, *Sugli integrali abeliani riducibili* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, ser. 5ª, vol. XXII (1° sem. 1914), pp. 581-587 e pp. 641-651].

vicini degli integrali ellittici (1), poichè la totalità degli integrali semplici di 1ª specie di una tale varietà è assimilabile a quella dei punti reali e complessi di un S_{p-1} (reale), mentre i vertici di una rete di Möbius appartenente a un S_{p-1}, presi insieme coi loro punti limiti, dànno una totalità assimilabile a quella dei punti reali di un S_{p-1} (reale).

Comunque sia di ciò, sorge la questione di decidere se esistano o no delle varietà algebriche su cui ad ogni integrale semplice di 1ª specie siano infinitamente vicini degli integrali ellittici.

La risposta affermativa a questa domanda, insieme con la caratterizzazione precisa delle varietà per cui si verifica il fatto considerato, è fornita agevolmente dal metodo geometrico a cui già abbiamo avuto occasione di far ricorso per lo studio degli integrali abeliani riducibili (2).

Ecco in breve i risultati a cui siamo pervenuti, insieme col richiamo delle nozioni e dei teoremi atti a chiarirne la portata.

Una varietà algebrica V_p di irregolarità superficiale $p > 1$ ammette in generale una ed una sola relazione di Riemann (relativamente a un qualsiasi sistema primitivo di cicli lineari della sua riemanniana); ma può darsi che essa ne ammetta più di una, e allora ne ha infinite (3).

In ogni caso possiamo dire che V_p ha l'*indice di singolarità* k se fra le sue relazioni di Riemann ve ne sono $k+1$ indipendenti e non più, e dire che V_p è *non singolare* o k *volte singolare* secondo che si ha $k=0$ oppure $k>0$ (4).

Dato p, il numero k è assoggettato alla diseguaglianza

$$k \leq p^2 - 1 \quad (5).$$

Allorchè V_p ammette una sola relazione di Riemann, ossia è non singolare, questa relazione è *principale* e di *caratteristica* $2p$ (6); d'altra parte la condizione necessaria e sufficiente perchè V_p contenga un sistema regolare di integrali semplici di 1ª specie riducibili è che fra le sue relazioni di Riemann ve ne sia qualcuna di caratteristica inferiore a $2p$ (7); quindi:

Una varietà algebrica, contenente sistemi regolari di integrali semplici di 1ª specie riducibili, è necessariamente singolare.

(1) Vedi più innanzi (n. 2) per la definizione precisa di questa frase.

(2) Scorza, *Sugli integrali abeliani riducibili.* Note I e II [Rendic. della R. Accademia dei Lincei, ser. 5ª, vol. XXIV (1° sem. 1915), pp. 412-418 e pp. 645-654].

(3) Loc. cit. 3), Nota II, n. 8 e n. 10.

(4) Scorza, *Il teorema fondamentale per le funzioni abeliane singolari* [Memorie della Società italiana delle Scienze (detta dei XL), in corso di stampa] n. 57.

(5) Loc. cit. 5).

(6) Loc. cit. 3), Nota II, n. 10.

(7) Loc. cit. 3), Nota II, n. 19.

In base a questa osservazione, le varietà richieste son da cercare fra quelle singolari.

Ebbene noi dimostreremo che:

Le varietà algebriche di irregolarità superficiale $p > 1$, *su cui ad ogni integrale semplice di 1ª specie sono infinitamente vicini degli integrali ellittici, sono tutte e solo quelle, effettivamente esistenti, per cui l'indice di singolarità è uguale a* $p^2 - 1$;

nel qual teorema è implicito il fatto che $p^2 - 1$ *è non solo un limite superiore, ma addirittura un massimo per* k.

Un altro teorema, a cui saremo condotti spontaneamente dalle considerazioni che seguono e che, sebbene non si riconnetta in modo stretto con lo scopo principale di questa Nota, non ci sembra privo di importanza, è il seguente:

Una varietà algebrica di irregolarità superficiale $p > 1$, *che sia almeno* $2p - 1$ *volte singolare, contiene infiniti sistemi regolari di integrali semplici di 1ª specie riducibili* (¹).

1. Fissiamo sulla riemanniana della varietà algebrica V_p di irregolarità superficiale $p > 1$ un sistema primitivo di $2p$ cicli lineari

$$l_1, l_2, \dots, l_{2p},$$

e serviamocene (al modo che è indicato nei nn. 1 e 2 della nostra Nota I già citata) per rappresentare omograficamente gli integrali semplici di prima specie di V_p sui punti di un S_{p-1} imaginario, di specie p, di uno spazio reale Σ a $2p - 1$ dimensioni (²).

Diciamo τ quell' S_{p-1} e $\bar{\tau}$ lo spazio imaginario ad esso coniugato.

L'*imagine* e l'*imagine coniugata* di un sistema lineare ∞^{q-1} $(q < p)$ di integrali semplici di 1ª specie di V_p saranno, rispettivamente, l' S_{q-1} di τ, in cui quel sistema si riflette, e l' S_{q-1} di $\bar{\tau}$ ad esso coniugato: l'*asse* del sistema sarà poi lo spazio a $2q - 1$ dimensioni, *necessariamente reale*, che ne congiunge le imagini (³).

(¹) Di qua facendo $p = 2$ si trae la nota proposizione che una superficie iperellittica (di rango 1) tre volte singolare ammette infiniti integrali ellittici. Del resto per $p = 2$ questo teorema è contenuto nel precedente ed è da esso precisato.

(²) Il modo a cui si allude nel testo e che giova tener presente consiste nel fissare in Σ un sistema di coordinate proiettive omogenee e nel far corrispondere ad ogni integrale semplice di 1ª specie di V_p (determinato a meno di una costante additiva e di una costante moltiplicativa) il punto di Σ che ha per coordinate i periodi dell'integrale ai cicli $l_1, l_2, \dots, l_{2p}$.

(³) Loc. cit. ³⁾, Nota I, n. 2 e n. 6. Cogliamo l'occasione per avvertire che nell'impaginazione di questa Nota è incorso un errore: le prime cinque righe della pag. 415 sono le ultime righe del n. 2, non del n. 1.

In particolare gli assi degli integrali semplici di 1ª specie di V_p saranno le rette reali appoggiate a τ e $\bar{\tau}$.

A questo proposito è utile tener presente che la condizione necessaria e sufficiente, perchè un sistema lineare ∞^{q-1} di integrali semplici di 1ª specie di V_p $(q < p)$ sia un sistema regolare di integrali riducibili, è che l'asse del sistema sia un S_{2q-1} razionale ([1]).

2. Siano adesso J un integrale semplice di 1ª specie di V_p, dotato al ciclo l_r del periodo Ξ_r $(r = 1, 2, \ldots, 2p)$, e G un insieme di integrali semplici di 1ª specie di V_p. Allora diremo che J è un *integrale limite di* G, oppure che *a* J *sono infinitamente vicini degli integrali di* G, oppure che J *è approssimabile mediante integrali di* G, se, in corrispondenza di ogni numero positivo (non nullo) ε, possono trovarsi infiniti integrali di G tali che, detto I uno qualunque di essi e detto ξ_r il periodo di I al ciclo l_r, si abbia

$$|\Xi_r - \xi_r| < \varepsilon \qquad (r = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Se, in particolare, gli integrali di G sono tutti ellittici e J è un integrale limite di G, J sarà un integrale di V_p *approssimabile mediante integrali ellittici*, o un integrale di V_p a cui sono *infinitamente vicini degli integrali ellittici.*

Ciò posto, si ha subito che:

Se G *è un insieme di integrali semplici di 1ª specie di* V_p, *e* J *è un integrale limite di* G, *l'asse di* J *è retta limite per l'insieme di rette formato dagli assi degli integrali di* G.

E infatti diciamo Ξ_r e ξ_r, rispettivamente, i periodi al ciclo l_r $(r = 1, 2, \ldots, 2p)$ dell'integrale J e di un integrale I di G; e poniamo

$$\Xi_r = H_r + iZ_r \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

e

$$\xi_r = \eta_r + i\zeta_r \qquad (i = \sqrt{-1})$$

con le H_r, Z_r, η e ζ_r reali.

L'asse di J è, per definizione, la retta congiungente il punto di Σ avente le coordinate

$$H_1 + iZ_1, H_2 + iZ_2, \ldots, H_{2p} + iZ_{2p}$$

col punto avente le coordinate

$$H_1 - iZ_1, H_2 - iZ_2, \ldots, H_{2p} - iZ_{2p}:$$

([1]) Loc. cit. [3]), Nota I, n. 5 e n. 6.

cioè la retta le cui coordinate sono date da

$$P_{r,s} = H_r Z_s - H_s Z_r \quad (r, s = 1, 2, \dots, 2p \; ; \; r \neq s);$$

e allo stesso modo l'asse di I è la retta le cui coordinate sono date da

$$p_{r,s} = \eta_r \zeta_s - \eta_s \zeta_r \quad (r, s = 1, 2, \dots, 2p \; ; \; r \neq s).$$

Ora, per l'ipotesi fatta su J, l'integrale I può scegliersi in infiniti modi distinti in G, di guisa che risulti

$$|\Xi_r - \xi_r| < \varepsilon \qquad (r = 1, 2, \dots, 2p),$$

essendo ε un numero positivo assegnato ad arbitrio; ossia di guisa che risulti

$$|H_r - \eta_r| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |Z_r - \zeta_r| < \varepsilon \qquad (r = 1, 2, \dots, 2p):$$

dunque I può scegliersi in G in infiniti modi distinti, così che risulti

$$|P_{r,s} - p_{r,s}| < \varepsilon \quad (r, s = 1, 2, \dots, 2p \; ; \; r \neq s):$$

cioè, come volevasi, l'asse di J è retta limite per l'insieme degli assi degli integrali di G.

Inversamente è chiaro che:

Se una retta reale è retta limite per l'insieme degli assi di un insieme G *di integrali semplici di* 1^a *specie di* V_p, *essa* (*è appoggiata a* τ *e* $\bar{\tau}$ *ed*) *è l'asse di un integrale limite di* G.

Basta osservare infatti, in primo luogo, che, essendo algebrica la varietà delle rette appoggiate a τ e $\bar{\tau}$, appartiene ad essa ogni retta reale che sia limite di rette reali appoggiate a τ e $\bar{\tau}$; e in secondo luogo che le coordinate del punto di intersezione dello spazio τ con una retta appoggiata ad esso si esprimono razionalmente per mezzo (delle coordinale di τ e) delle coordinate della retta.

Ricordando poi l'effetto di un cambiamento del sistema primitivo di cicli lineari sui periodi degli integrali semplici di V_p, si vede subito che la nozione di integrale limite di un insieme di integrali semplici di 1ª specie di V_p è indipendente dalla scelta del sistema primitivo di cicli lineari $l_1, l_2, \dots, l_{2p}$ sulla riemanniana di V_p.

3. I complessi lineari di Σ contenenti tutte le rette di τ e $\bar{\tau}$ costituiscono un sistema lineare $\mathcal{A}$ della dimensione $p^2 - 1$ (1).

Un complesso di $\mathcal{A}$ che sia singolare di specie (necessariamente pari) $2q$ $(q = 1, 2, \dots, p - 1)$ ha per asse un S_{2q-1} appoggiato a τ e $\bar{\tau}$ secondo

(1) Per questa affermazione, e per altre che seguono nel presente numero, giova tener presente la Memoria citata nella nota [5].

spazî a $q-1$ dimensioni; viceversa, un tale S_{2q-1} è spazio singolare per un sistema lineare di $\infty^{(p-q)^2-1}$ complessi di A.

Adesso consideriamo la totalità (lineare) dei complessi lineari di Σ, che ha la dimensione $p(2p-1)-1$, e riferiamola omograficamente alla totalità dei punti di uno spazio lineare S della stessa dimensione, fissando in S un sistema di coordinate proiettive omogenee e facendo corrispondere al complesso lineare di Σ, avente per equazione

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} a_{r,s}\, x_r\, y_s = 0 \qquad (a_{r,s} + a_{s,r} = 0),$$

il punto di S che ha per coordinate i coefficienti $a_{r,s}$ di questa equazione per cui $r < s$.

Entro S si avranno:

a) un'ipersuperficie F dell'ordine p rispondente alla totalità dei complessi lineari singolari di Σ, e

b) uno spazio lineare Σ' della dimensione p^2-1 rispondente all'insieme dei complessi di A;

poi entro Σ' si avrà:

a') un'ipersuperficie $F^{(1)}$ d'ordine p intersezione di F con Σ', rappresentante la totalità dei complessi lineari singolari di A (di specie ≥ 2); e

b') una serie di varietà $F^{(2)}, F^{(3)}, \dots, F^{(p-1)}$ rappresentanti gli insiemi dei complessi singolari di A di specie ≥ 4, ≥ 6, ..., $\geq 2p-2$.

Le $F^{(1)}, F^{(2)}, \dots, F^{(p-1)}$ sono, successivamente, le varietà dei punti doppî, tripli, ..., $(p-1)$-pli di $F^{(1)}$; $F^{(p-1)}$ è una varietà di Segre di 2ª specie con gli indici eguali entrambi a $p-1$; ed $F^{(p-2)}, F^{(p-3)}, \dots, F^{(1)}$ sono, ordinatamente, le varietà delle corde, dei piani trisecanti, ..., degli S_{p-2} $(p-1)$-secanti di $F^{(p-1)}$.

Lo spazio Σ' e le varietà $F^{(1)}, F^{(2)}, \dots, F^{(p-1)}$ sono reali; e i punti reali di $F^{(1)}$ si distribuiscono in due falde, delle quali una, quella che chiamiamo la *prima falda*, è atta a dividere la totalità dei punti reali di Σ' in una regione di punti interni e in una regione di punti esterni.

Mineralogia. — *Ilvaite ed altri minerali di Perda Niedda nell'Oriddese (Sardegna).* Nota di ERNESTO MANASSE, presentata dal Corrispondente FEDERICO MILLOSEVICH [1].

Del giacimento ferrifero di Perda Niedda [2] nell'Oriddese, e della sua importanza industriale, si è già occupato ampiamente e con grande competenza l'ing. A. Ciampi [3], il quale, dopo averne diretto le esplorazioni, sopraintende ora ai lavori di miniera.

Rimandando al predetto autore per tutti i dettagli riguardanti il giacimento in parola, mi limiterò per mio conto ad accennare come si tratti di un grandioso ammasso lenticolare di minerali di ferro che rinvienesi al contatto fra calcari cristallini, spesso saccaroidi, bianchi o grigi, fittamente stratificati e contenenti abbondanti vene di calcite spatica e rocce granitiche rosee e bianche, a grana media, e povere di mica. D'ordinario le zone mineralizzate assumono apparenza di banchi interstratificati con i calcari cristallini.

Nelle parti superiori del giacimento il minerale è limonite, compatta e picea, oppure cavernosa, accompagnata da ematite e magnetite. Ma i banchi più ragguardevoli, sia per la qualità che per la quantità del materiale, sono di magnetite con scarsissimo siderose. Nelle zone più profonde poi si rinvengono abbondanti minerali solforati — segnatamente pirite, ma anche blenda nella varietà marmatite, galena, arsenicopirite, calcopirite, ecc. — in matrice di fluorina violacea e di quarzo spesso verdognolo per pigmenti cloritici.

Le rocce calcaree della regione furono riportate da alcuni autori al siluriano, da altri al cambriano medio [4]; e la formazione granitica, il cui riferimento cronologico viene implicitamente ad interessare la dibattuta e importantissima quistione relativa all'età dei graniti sardi, fu ritenuta sia anteriore alle rocce sedimentarie, sia ad esse posteriore. Il Ciampi considera il calcare cristallino di Perda Niedda derivato, per metamorfismo di contatto, dai calcari del cambriano medio, che sono invece a struttura compatta e in grandi banchi con stratificazione poco appariscente; e ritiene, di conseguenza, il granito posteriore, in base principalmente ai grandiosi fenomeni di contatto manifestatinsi a Perda Niedda nei piani di separazione fra calcari cri-

[1] Pervenuta all'Accademia il 13 settembre 1915.

[2] Cioè « Pietra Nera » in dialetto sardo.

[3] *La miniera di Perda Niedda in Sardegna.* Rass. Min., vol. XXX, n. 14, pag. 209. Torino 1909.

[4] Vedasi, a tal proposito, Merlo, *L'Inglesiente propriamente detto e la sua costituzione geologica.* Rass. Min., vol. XXI, nn. 5, 6, 7, pp. 65, 83, 99. Torino 1904.

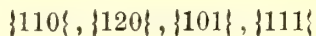
stallini e graniti. In ciò l'autore concorda con quanto fu già osservato dal La Marmora, dal Bonermann, dal Lovisato, dal Lotti e dal Riva, i quali tutti ascrissero le rocce granitiche della Sardegna ad un'unica formazione, che ritennero postsiluriana ([1]).

Quanto alla genesi del giacimento secondo il Ciampi la mineralizzazione è dovuta alla sostituzione delle rocce calcaree cambriane per effetto di soluzioni metallifere e di mineralizzatori, in diretta dipendenza delle intrusioni granitiche attraverso ai calcari stessi. Si sarebbero così depositati i minerali solforati, e in principal modo la pirite, dalla quale, per varie cause e con diverse fasi, avrebbero avuto origine i minerali ossigenati di ferro, attualmente utilizzati.

Notevole analogia esisterebbe pertanto, indipendentemente dalla diversa età delle formazioni rocciose, fra il giacimento di Perda Niedda, quello, in grande prevalenza piritoso, di Gavorrano, ed anche, sotto molti riguardi, i grandiosi depositi ferriferi dell'isola d'Elba.

In questa breve Nota mi occupo soltanto di alcuni minerali di contatto di Perda Niedda, riserbandomi di dare in seguito altre notizie, man mano che andrò studiando tutto il materiale con squisita gentilezza messo a mia disposizione dall'ing. Ciampi, che vivamente ringrazio.

Fra i più interessanti minerali di contatto di Perda Niedda è da annoverarsi l'ilvaite, specie nuova per la Sardegna ([2]). Si presenta essa in masse compatte o a struttura fibroso-raggiata, di colore nero-piceo, rivestite d'ordinario di patine giallastre di idrossido ferrico. Spesso anche è in cristalli imperfetti, tutti simili fra loro, della semplicissima e caratteristica combinazione:

$$\{110\},\{120\},\{101\},\{111\}$$

L'abito dei cristalli, rappresentato dalla fig. 1, è assai più tozzo che nell'ilvaite elbana ([3]) e ricorda piuttosto quello dell'ilvaite di Campiglia ([4]) e di Herbornseelbach (Nassau) ([5])

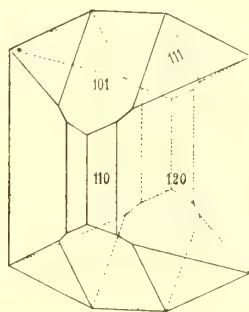
([1]) Vedasi C. Riva, *Le rocce granitoidi e filoniane della Sardegna.* Atti R. Acc. Sc. fis. e mat., vol. XIII, serie 2ª, n. 9. Napoli 1904.

([2]) Dallo stesso ing. Ciampi mi sono stati poi donati degli esemplari di ilvaite di altra località sarda, di Orroli nell'Ogliastra. Quivi, entro gli scisti filladici paleozoici, si ha un filone di blenda e galena, in matrice pirossenico-ilvaitica, che sembra dovuto a sostituzione di un banco calcareo intercalato agli scisti medesimi. Per la natura della ganga e anche per il fatto che non lungi da Orroli frequentemente rinvengonsi filoni di porfidi quarziferi attraverso gli scisti, il tipo di giacitura, nelle sue linee fondamentali, ricorda quello notissimo del Campigliese, in Toscana.

([3]) E. Grill, *Osservazioni cristallografiche sull'ilvaite elbana.* Mem. Soc. It. delle Scienze (detta dei XL), serie 3ª, tomo XVIII. Roma 1913.

([4]) A. D'Achiardi, *Mineralogia della Toscana,* vol. II, pag. 153. Pisa 1873.

([5]) M. Bauer, *Beiträge zur Mineralogie-VI Reihe: Ueber den Lièvrit von Herbornseelbach in Nassau.* N. Jahrb. für Min., Geol. und Pal., Bd. I, pag. 31. Stuttgart 1890.

Dei prismi verticali {110} di regola possiede facce listiformi e {120} le ha molto più ampie; ma, alle volte, i due prismi presentano presso a poco uguale sviluppo. Le forme terminali {101} e {111}, di consueto, appariscono equisviluppate; in alcuni casi però, estendendosi molto le facce di {101}, vengono ad essere ridottissime quelle di {111}. Comunque le facce di una stessa forma, appartengano esse ai due prismi verticali, o al macrodoma, oppure alla bipiramide, appariscono quasi sempre inegualmente sviluppate; nè si prestano mai ad esatte misure goniometriche a causa delle scabrosità, curvature, corrosioni e velature limonitiche che costantemente presentano.

Quasi tutti i cristalli sono terminati ad ambedue le estremità. Le dimensioni loro variano assai; i cristalli più grossi misurano cm. 2 circa nella direzione dell'asse z per cm. 1.7-1.6 circa secondo y e x. Si hanno poi frequenti unioni di molti individui e subindividui in posizione parallela o quasi, e gruppi anche lievemente divergenti.

Durezza 6 circa; peso specifico uguale a 3.95, un pochino inferiore a quello proprio dell'ilvaite perchè il minerale di Perda Niedda è sempre leggermente inquinato di limonite.

Chimicamente considerata, questa ilvaite sarda è una varietà alquanto manganesifera. L'analisi, infatti, ha dato, per 27.74 °/₀ di FeO, il 6.48 °/₀ di MnO; ciò che conduce al rapporto molecolare MnO : FeO = 1 : 4.22. I risultati ottenuti sopra materiale liberato il meglio possibile dalle impurità di idrossido ferrico sono qui appresso messi a confronto con i valori teorici richiesti dalla formula $Ca(\overset{II}{Fe}, \overset{II}{Mn})^2(\overset{III}{Fe}.OH)[SiO^4]^2$, nella quale Mn : Fe = 1 : 4.

	Trovato	Calcolato [1]
H^2O	2.66	2.20
SiO^2	29.37	29.50
Al^2O^3	0.67	—
Fe^2O^3	19.47	19.53
FeO	27.74	28.12
MnO	6.48	6.94
CaO	13.25	13.71
MgO	0.51	—
	100.15	100.00

[1] Per i calcoli dei componenti furono adottati i pesi atomici stabiliti dal Comitato internazionale per il 1914.

Per la rilevante percentuale in MnO la varietà di Perda Niedda differisce assai dall'ilvaite elbana, che ne contiene 0.51-3.02 % [1], mentre si avvicina, anche per questo carattere, a quella di Herbornseelbach (6.78-8.68 % di MnO), e forse anche all'altra di Campiglia, di cui non si ha un'analisi completa, ma solo dei saggi di von Rath, dai quali risulterebbe un discreto tenore in MnO [2].

Nelle zone di contatto di Perda Niedda più abbondante dell'ilvaite è il granato, il quale, se di regola si presenta, associato a magnetite, ilvaite, wollastonite, actinoto, ecc., in concentrazioni filoniformi che attraversano i calcari cristallini scistosi, forma anche da solo, può dirsi, estesi banchi rocciosi, potenti fino a 2 metri, e stratificati quasi in concordanza dei calcari cristallini e dei minerali di ferro. Tali banchi granitiferi anzi, secondo il Ciampi, definiscono nettamente il contatto fra le due formazioni sedimentaria ed eruttiva.

Comunemente il granato è in cristalli di colore verde cupo; come eccezione ha colore colofonia che richiama alla mente quello dell'idocrasio. Tanto nell'un caso quanto nell'altro si tratta della varietà ferri-calcifera; ma, oltre SiO^2, Fe^2O^3 e CaO, in piccole quantità sono presenti Al^2O^3, MnO, MgO; mancano però completamente TiO^2 e Cr^2O^3.

I cristalli, di dimensioni variabilissime (il diametro loro da un minimo di mm. 2-3 passa ad un massimo di cm. 2-2.5), consistono semplicemente delle solite forme $\{110\}$, $\{211\}$, in generale equisviluppate, alle quali eccezionalmente si aggiunge l'esacisottaedro $\{321\}$ in liste esilissime, ma assai lucenti. Delle due forme essenziali, ora predomina il rombododecaedro, ora l'icositetraedro, ambedue quasi sempre con le facce omologhe di ampiezza assai diversa.

Durezza 6 a 7. Peso specifico uguale a 3.83.

Sulla varietà di colore colofonia furono fatti soltanto dei saggi qualitativi per determinarne la natura chimica; del granato verde venne eseguita invece l'analisi completa, e i risultati sono qui appresso riportati insieme alle percentuali teoriche per $Ca^3 \overset{III}{Fe^2} [SiO^4]^3$:

	Trovato	Calcolato
SiO^2	35.09	35.56
Al^2O^3	2.01	—
Fe^2O^3	29.82	31.38
MnO	0.53	—
CaO	33.10	33.06
MgO	0.48	—
	101.03	100.00

(1) E. Grill, Mem. cit.

(2) Vedasi A. D'Achiardi, Op. cit.

Accompagna il granato, che anche ingloba, la wollastonite in masse bianchissime a struttura fibroso-raggiata, con durezza di 4 a 5 e peso specifico di 2.86.

L'analisi eseguitane poco si discosta da quella calcolata per $Ca^2[SiO^3]^2$. Infatti:

	Trovato	Calcolato
H^2O	0.85	—
SiO^2	50.49	51.82
Al^2O^3	tracce	
Fe^2O^3	0.54	—
CaO	47.72	48.18
MgO	0.51	—
	100.11	100.00

Fisiologia vegetale. — *Sulla presenza, nelle piante, di composti ematoidi di ferro* (¹). Nota II del dott. G. GOLA, presentata dal Socio O. MATTIROLO (²).

Nella Nota precedente (³) rilevai la presenza di composti proteici nel materiale grezzo estratto dalle piante, e gli inconvenienti che da ciò derivavano per la preparazione di composti ematoidi di ferro sufficientemente puri, e per la possibilità di arrivare a conclusioni inesatte.

Ad ovviare a questo, mi valsi, in una nuova serie di esperienze, della proprietà che l'acido picrico ha di dare, con i composti in questione, dei picrati solubili nell'alcool, etere, acetone, ed in altri solventi organici neutri. Tale proprietà non è comune alle combinazioni proteiche dell'acido picrico. Mi valsi, nel maggior numero dei casi, dello stesso materiale grezzo ottenuto per azione degli alcali sull'erba di prato e sulla segatura di pioppo. Dopo qualche giorno di digestione nell'acido picrico in soluzione alcoolica, la combinazione si può estrarre con alcool e etere; assai più rapida è la formazione del picrato se si opera su materiale grezzo di fresco preparato, il quale, dopo precipitazione dalla soluzione alcalina, sia stato lavato ripetutamente con acqua, poi con alcool, e, ancora umido di alcool, sia sottoposto alla picratazione.

Dopo picratazione, l'estrazione del composto si fa assai facilmente e si ottiene una soluzione bruna, contenente però un eccesso di acido picrico.

(¹) Lavoro eseguito nel R. Orto Botanico di Torino.

(²) Pervenuta all'Accademia il 13 settembre 1915.

(³) Ved. Rend., vol. XXIV, 20 giugno 1915, pag. 1239. Debbo rettificare un errore nel quale sono incorso in tale Nota; a pag. 1243, linea 11, in luogo di *pirrolo*, leggasi *indolo*.

Tale soluzione, lavata con acqua, perde con molta facilità l'acido in eccesso, e, per ulteriore aggiunta di acqua, anche l'acido combinato si stacca facilmente per idrolisi, così che il composto organometallico precipita allora dalla soluzione, e poi, per successive lavature con acqua, viene totalmente depicratato. Una scissione ancora più rapida si può fare con soluzione di bicarbonato di sodio, la quale scioglie il composto ferrifero; dalla soluzione, questo può venire riprecipitato per aggiunta di acido acetico; si raccoglie su filtro il residuo, lo si lava accuratamente con acqua acidula per acido acetico, e poi con alcool, e infine si essicca.

Si ha un corpo bruno solubile in piridina, che, bruciato, lascia per residuo solo ossido di ferro.

Il materiale ferrifero, così ottenuto, non contiene affatto composti proteici e si presta quindi assai per il trattamento con potassa fusa.

Anche in questo caso ottenni, per azione della potassa a 200°-240°, la serie dei composti organici di ferro precedentemente descritti, differenti fra loro per i caratteri di solubilità nell'acido acetico glaciale, ma eguali fra loro per altre proprietà, compresa quella di dare, per riscaldamento con polvere di zinco o di alluminio, dei composti pirrolici.

È da osservare che per azione delle soluzioni acetiche acquose più non si aveva lo sviluppo di odore indoloide, come col metodo di preparazione indicato nella Nota precedente.

La preparazione dei picrati di questi composti ferruginosi costituisce quindi un metodo ottimo per una purificazione preliminare, ed io me ne valsi per avere, con un certo grado di purezza, combinazioni ematoidi da *Lactarius controversus*, *Penicillum glaucum*, lievito di birra ecc.

L'impiego di questo metodo vale per estrarre la massima parte di composto ferrifero dal materiale preventivamente preparato per azione della soluzione alcalina sui vegetali; meno generalmente si presta per l'estrazione diretta dalla pianta.

Sembra che il composto ferrifero sia nella pianta legato a sostanze proteiche; e non sempre l'acido stacca facilmente la proteina dal composto organometallico. Risultati abbastanza buoni si ottengono talora facendo agire la macerazione picrica per più giorni; ma in parecchi casi il rendimento è, relativamente, assai scarso.

Anche la necessità di trattare grandi quantità di vegetale rende difficile l'uso di solventi organici e di acido picrico in misura tale da fissare tutti gli alcali e le proteine in essi contenuti. Quando si pensi che, col metodo della soluzione di soda, per ottenere dal legno 170 grammi di materiale impuro occorsero 1000 litri di solvente su un quintale di segatura, e che per un quintale di erba secca ne occorsero 4000, si comprenderanno le difficoltà materiali di tali esperienze.

Operando sui tessuti verdi con solventi organici, occorrono inoltre particolari cautele per eliminare totalmente la clorofilla e i suoi derivati, che possono indurre facilmente a conclusioni errate.

Le esperienze, sopra le quali ho riferito finora, sono state, come già dissi, controllate di frequente mediante saggi condotti in modo analogo su sangue di bue; e le analogie, e spesso anche le identità di comportamento, mi permettono di affermare con un certo fondamento il carattere ematoide delle combinazioni ferriche da me estratte da parecchi vegetali.

Ma un carattere saliente dei composti ematici animali è dato dal fatto che il ferro si trova nella molecola in uno stato di combinazione tale che, per trattamento con HCl in piccola quantità, in mezzo povero o privo di acqua, si forma un legame Fe—Cl particolarmente stabile e caratteristico.

La possibilità di tale legame è subordinata all'esclusione di un qualsiasi trattamento preliminare con alcali acquosi; anche l'emina, quando sia stata declorurata con alcali, più non può riprendere il Cl.

Nelle mie esperienze avevo sempre avuto tra le mani combinazioni state preventivamente trattate con alcali, e perciò di tipo ematinico, e quindi incapaci, se fosse stata vera l'analogia con i pigmenti del sangue, di dare la combinazione Fe—Cl. I numerosissimi saggi tentati sopra ogni sorta di estratti sodici di piante svariatissime, fresche o essiccate, non mi hanno mai permesso di arrivare a risultato alcuno.

Ho ricorso allora al trattamento diretto della pianta, senza uso preventivo di alcali.

Ho sperimentato anzitutto il metodo di Zaleski per la preparazione dell'emina acetica, quello che è ora più usato, e che permette di avere prodotti più puri; colle piante verdi non riuscii a nulla. Operando su micelio essiccato di *Penicillum* ebbi risultati incompleti: cioè solo una parte assai piccola di combinazione ferrifera viene estratta, un'altra parte è estraibile solamente con piridina a caldo, e la parte maggiore rimane nel micelio anche dopo questo trattamento.

All'incontro, il metodo di Mörner, secondo il quale si fa preventivamente un estratto con alcool acidulo per H_2SO_4, e lo si riscalda poi alla ebollizione, previa aggiunta di HCl, ha dato per risultato il distacco quasi completo del ferro dalla molecola organica.

Risultati assai migliori ottenni operando con alcool a 95°, acidificato con il 3 % di HCl concentrato.

I tessuti vegetali vengono fatti rapidamente essiccare, meglio ancora previa ebollizione con acqua per ucciderli, poi triturati finamente, estratti con alcool per eliminare clorofilla, lipoidi varii ecc., e fatti di nuovo essiccare; la polvere, così preparata, si addiziona di alcool acidulato, e si scalda in pallone a ricadere per 10-15 minuti; si filtra rapidamente, si spreme il residuo, e al filtrato si aggiungono due volumi d'acqua; dopo 24 ore si filtra,

e il residuo viene raccolto, lavato con acqua acidula per acido acetico, e lasciato essiccare. Il filtrato viene sottoposto a dialisi per 36-48 ore, in capo al quale periodo si ha una separazione di abbondante deposito ferrifero, che viene raccolto, lavato e seccato come il primo composto separatosi; entrambi vengono lavati con alcool e con etere per esportare i lipoidi frammisti, poi con acqua bollente, leggermente acidula per acido acetico, fino a che il liquido di lavatura più non dia reazione di cloruri. Si ha così una polvere bruna leggermente violacea, ricca di ferro, ma contenente ancora qualche altro residuo minerale, specialmente quella ottenuta per semplice diluizione e non per dialisi.

Tale composto, ridotto con polvere di zinco o di alluminio in tubetto riscaldato, dà nettamente la reazione dei pirroli; scaldato con sodio metallico in tubetto di vetro operando come per la reazione di Lassaigne, dà un residuo, che disciolto in acqua, acidificato con acido nitrico, e trattato poi con nitrato di argento, dà la reazione dei cloruri; è solubile in alcool caldo acidificato con HCl, e meglio ancora in piridina. Quest'ultima opera una completa separazione del composto ferrifero dagli altri residui minerali dei quali si è fatto cenno, onde, dopo questa dissoluzione, si può avere un derivato organometallico lasciante per residuo solo ossido di ferro.

Gli altri solventi organici neutri sono senza azione apprezzabile; è soltanto dal *Penicillum* che, previo il trattamento indicato, si può separare dalla parte rimanente solubile in piridina una frazione di combinazione ferrifera solubile in etere, in cloroformio, in etere di petrolio.

Versando la soluzione piridica in alcool acido per HCl, e scaldato alla ebollizione, si ha una soluzione bruna, che, diluita con acqua, o meglio ancora dializzata, dà di nuovo in parte il composto precedente eminoide.

Tra gli altri caratteri di questa combinazione eminoide stanno la solubilità in acido acetico glaciale, la insolubilità nei solventi neutri, la colorazione bruna rossastra delle soluzioni piridiche.

Non ho ancora potuto avere tale materiale ben cristallizzato, quantunque per lenta evaporazione della soluzione acetica abbia potuto osservare la separazione di laminette brune, splendenti, di aspetto cristallino.

Anche questi, come gli altri corpi sopra considerati, dànno con acido picrico delle combinazioni solubilissime nei solventi neutri; e anche questi, per azione della potassa a 200°-240°, si comportano come gli estratti ottenuti per azione delle soluzioni alcaline sui tessuti vegetali.

Così anche la possibilità, per parte delle piante, di dare per trattamento con HCl una combinazione organometallica clorurata avente molti caratteri dell'emina, si è potuta avverare.

I risultati migliori li ottenni colle foglie di *Pterocarya caucasica* e con quelle di *Polygonum cuspidatum*; anche altre piante mi fornirono risultati qualitativamente eguali, ma con rendimento minore (tali la crusca di

frumento, il micelio di *Penicillum glaucum*, il tallo di *Boletus edulis*). È da avvertire, infatti, che da specie a specie si possono avere, per trattamento con alcool e HCl, risultati variabilissimi, in quanto frazioni maggiori o minori di ferro totale possono essere estratte in combinazione eminoide; il rendimento minore l'ottenni colla crusca di frumento e col *Boletus edulis*.

Non potrei ancora affermare se, prolungando l'azione dell'alcool acido, tale rendimento sarà maggiore; è da ritenere che questo vario comportamento sia in gran parte in dipendenza dallo stato di combinazione del gruppo cromogeno ferrifero con altri composti organici. È assai probabile che la combinazione del ferro allo stato di nucleoproteide descritta dal Petit sia assai diffusa nelle piante, e che le combinazioni ematoidi da me estratte siano nelle piante in forma di nucleoproteidi, come del resto farebbe pensare anche il comportamento cogli alcali.

Sarà oggetto di studii ulteriori l'esame di questi diversi stati di combinazione; ma già le osservazioni che ho potuto fare finora mi permettono di ritenere che essi siano assai svariati. Per esempio il *Penicillum* cede il composto ematoide già per trattamento con acido picrico alcoolico, e già col metodo di Zaleski si ha, sebbene con difficoltà, una combinazione Fe Cl. La crusca di frumento ha pure dato, come si disse, scarso rendimento col metodo dell' HCl alcoolico, mentre maggiore è quello colle soluzioni alcaline acquose.

Del resto anche lo stesso plasma cellulare oppone una resistenza grandissima alla fuoruscita dei composti ferruginosi; mentre nei globuli di sangue bastano trattamenti assai semplici per lasciare uscire la combinazione proteica del ferro, e per distaccare poi la proteina dal gruppo cromogeno metallifero, nelle piante ciò è straordinariamente difficile; p. es.: se col cloroformio e coll'etere si provoca la fuoruscita del succo cellulare dal lievito di birra o dal *Coprinus comatus*, o dal *Boletus edulis*, o dai fiori di *Chamaerops humilis*, si vede che solo una piccola parte dei composti di ferro passa nel liquido, mentre la parte maggiore rimane nelle cellule.

L'esame di tali questioni formerà oggetto di ricerche ulteriori.

Il complesso dei saggi finora eseguiti mi ha condotto alle seguenti constatazioni:

In un gran numero di piante, le più svariate, in modo da far ritenere il fatto come generale, esistono dei composti di ferro organici, i quali:

per la solubilità nelle soluzioni acquose alcaline, per la solubilità in piridina dopo che siano stati staccati dalla molecola proteica, per l' insolubilità negli acidi diluiti, per la proprietà di dare dei picrati solubili nei solventi neutri;

per il comportamento sotto l'azione degli alcali acquosi a caldo che staccano il ferro, per la resistenza agli acidi agenti a caldo in soluzione acquosa, e soprattutto per la resistenza all'azione degli alcali a temperatura

anche di 240°, dimostrano di avere il ferro legato alla molecola organica con una stabilità tale che non è stata finora riscontrata che nei composti ematici del sangue;

per la proprietà di dare coll' HCl alcoolico a caldo dei composti contenenti ancora ferro, e aventi alcuni caratteri dell'emina, e solo allorchè non abbiano risentito l'azione degli alcali;

per i composti pirrolici che da tali combinazioni ferrifere si possono avere, è da ritenerri come assai probabile l'esistenza nelle piante di combinazioni di ferro chimicamente, e forse anche biologicamente, analoghe a quelle che sono caratteristiche del pigmento del sangue di molti animali.

Non è mia intenzione di approfondire molto lo studio della struttura chimica di tali composti, poichè per ciò occorrebbero una cultura e dei mezzi di lavoro che non posseggo; credo riuscirà interessante spiegare il loro valore biologico. È possibile che il nucleoproteide ferrifero estratto dall'orzo da Pictet, che il composto analogo all'ematogene studiato da Stoklasa nella cipolla, che il composto estratto da Tarbouriech e Saget dal *Rumex obtusifolius*, siano tutti da ascriversi allo stesso corpo o gruppo di corpi ematoidi da me studiati.

L'esame dei caratteri spettroscopici, che per ora si limitano ad un assorbimento nella zona del giallo e del verde, quello del rapporto N:Fe, che nei prodotti di scissione dei composti ematici è di 4:1, potranno meglio valere a identificare questi corpi ematoidi.

Ma è inoltre da stabilire quali variazioni qualitative e quantitative abbiano luogo nei diversi periodi della vita della pianta, p. es.; a foglie verdi e ingiallite; quali relazioni essi abbiano cogli enzimi ossidanti: è noto che la perossidasi dello *Schinus mollis* (Schinasi) contiene ferro; è pure noto che Bach ha trovato pirrolo tra i prodotti di scomposizione di alcune perossidasi; si sa anche che l'emoglobina può dare reazioni spiccate di perossidasi, ma non è stabilito se tale proprietà sia insita nel composto stesso, o sia dovuta a sostanze che ne sono difficili a separare; tutto ciò porta a studiare più intimamente il valore del ferro nella fisiologia della respirazione.

Biologia. — *Correlazioni e differenziazioni (Sul Bufo vulgaris).* Nota II di Giulio Cotronei [1], presentata dal Socio Battista Grassi [2].

Ho formulato in breve nella Nota precedente [3] i quesiti che mi son proposto nel mio studio: nel prosieguo dell'esposizione che io verrò facendo in queste note sintetiche, insieme con i risultati della mia analisi, terrò a far risaltare e a fissare quei dati che credo possano servire di guida e di lume nell'interpretazione dei fenomeni che m'interessano.

Nelle recenti ricerche di Stockard [4] a proposito della localizzazione degli abbozzi oculari, ritorna, sotto una veste moderna e sperimentale, una delle questioni fondamentali della morfologia. Dalle antiche ricerche di Geoffroy Saint-Hilaire [5] può dirsi iniziato il nuovo periodo che nelle mostruosità vede fenomeni da considerarsi in relazione a perturbamenti dello sviluppo normale. Secondo la dottrina del celebre morfologo, un mostro non è se non un feto sotto le comuni condizioni; ma in cui uno o parecchi organi non hanno partecipato alle trasformazioni che fanno il carattere dell'organizzazione [6]. Questa dottrina (degli arresti di sviluppo) è stata sperimentalmente sostenuta per varî argomenti studiati.

Per ricondurci a un esempio concreto, il che mi sembra il modo migliore per delineare un problema, la ciclopia (Stockard) sarebbe la persistenza dell'unico abbozzo primario oculare, mediano. Gli occhi dei vertebrati dunque (nell'ontogenesi) sarebbero dati da un solo abbozzo.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto d'Anatomia comparata alla R. Università di Roma.

[2] Presentata nella seduta del 20 giugno 1915.

[3] Rend. Accad. Lincei, vol. XXIV, serie V, 1° sem., pag. 1248.

[4] Stockard C. R., *An experimental Study of the position of the optic anlage in «Amblystoma punctatum», with a discussion of certain eye defects*: American Journal of anatomy, vol. XV, pp. 253-290 (1913). Queste ricerche sono state eseguite con il metodo di asportazione di determinate aree embrionali: dello stesso autore il lettore consulti tutta una serie di ricerche eseguite con soluzioni saline, ricerche che partono dal 1907.

[5] Una chiara e lucida esposizione delle idee di Geoffroy Saint-Hilaire il lettore troverà nel recentissimo compendio di E. Rabaud, *La tératogenèse: étude des variations de l'organisme*, Paris, Doin, 1914.

[6] Rabaud, pag. 24.

Questo concetto si riconduce, a sua volta, alla dottrina di Kupffer (unicità degli abbozzi olfattivi) (1).

È evidente l'importanza che scaturisce dall'accettare o respingere una tale soluzione per lo studio della localizzazione originaria della forma e, quindi, per lo studio delle potenze organiche (2). Certo, a voler distruggere tutta una costruzione scientifica non mi sembra sufficiente il dire che *determinati* fatti sperimentali si possono anche spiegare assumendo una nuova ipotesi. Ma le ricerche di un osservatore così originale e valoroso come lo Stockard (al quale si è associato il Leplat) si ricollegano a problemi fondamentali; e quindi per lo studioso trascendono dall'importanza limitata ad un determinato organo. Che non si debba concludere per l'unicità dell'abbozzo oculare prescindendo dai risultati di altri organi risulta, secondo lo Spemann, dal considerare gli organi compresi tra gli occhi. Come mai, osserva lo Spemann, i difetti prodotti dallo Stockard si limitano ai territorî compresi tra gli occhi?

È ancora da ricordare che Dareste riteneva che la ciclopia fosse un fenomeno di fusione precoce per arresto di sviluppo del territorio olfattivo.

Numerosi ricercatori hanno poi ammesso che le malformazioni oculari debbano la loro origine a influenze (diverse e variamente ammesse) esercitate dal sistema nervoso centrale (Rabaud (3), Spemann (4), Lewis).

Come ho già accennato Stockard, aveva osservato tra i suoi reperti altre malformazioni concomitanti; ma evidentemente egli nega un'influenza morfogenetica correlativa (causale per la ciclopia).

Lo stesso Leplat ha appena accennato come altre malformazioni (accessorie dal punto di vista del suo studio) si riscontrino nei ciclopi (confluenza delle fosse nasali e delle ventose; nanismo; imperforazione boccale). Queste stesse anomalie si riscontrano, secondo l'autore, anche quando non si verifica ciclopia.

(1) Va subito ricordato che gli studiosi di embriologia normale (mi riferisco, per il momento, agli Anfibii) sono per lo sviluppo pari degli abbozzi oculari. Eyclesheymer (1895) ha veduto nella *Rana palustris* che l'accenno ottico è duplice e già si distingue nella piastra midollare per essere pigmentato. In quanto alle fossette olfattive, e in generale all'abbozzo olfattivo, il concetto di Kuppfer, che partiva da considerazioni filogenetiche (ciclostomi), è ritenuto falso (si consulti il capitolo di K. Peter, in *Handbuch der Verg. u. Exper. Entw. d. Wirbeltiere* di Oscar Hertwig).

(2) In relazione con le ricerche che formano l'oggetto di queste esposizioni ho eseguito esperimenti di innesti e di rigenerazioni, il cui esito sarà riferito in seguito.

(3) Per le indicazioni bibliografiche sulle ricerche di Rabaud il lettore consulti il recente compendio, sopra ricordato.

(4) Speman, Hans, *Ueber experimentell erzeugte Doppelbildungen mit cyclopischem Defekt. Zool.* Jahrbücher. Suppl. VII, 1901; Idem., *Zur Entwicklung des Wirbeltierauges.* Zool. Jahrbücher. Abt. f. Allgem. Zool. Bd XXXII, 1912; Idem., *Ueber die Entwicklung des umgedrehter Hirnteile bei Amphibienembrjonem.* Zool. Jahrbücher. Supp. XV, Bd III, 1912.

È poi noto che i ciclopi (anche quelli che si producono senza azioni sperimentali) presentano tutta una serie di malformazioni, sulle quali ora io non posso indugiarmi.

*
* *

Questi brevi cenni che precedono servono a far delineare l'importanza che, per le mie ricerche, può risultare dall'associare tutti i varî elementi di studio che scaturiscono dall'*organismo considerato come un insieme*. Le modificazioni concomitanti, anomalie o mostruosità che si riscontrano, in determinate condizioni, sono tutte ugualmente dovute a una medesima causa, o ad una causa che si manifesta in una determinata azione morfogenetica su altri organi, lasciando quindi osservare un'influenza dominante di un organo nella morfogenesi di determinate regioni?

Dal divenire di una massima modificazione a traverso condizioni minori si può rilevare — almeno è possibile di attendercelo — una relazione causale.

Nel seriare i risultati analitici, io comincerò con l'esporre quelli che si riferiscono al *Bufo vulgaris*.

Nella limitazione delle modificazioni organiche che m'interessano, sono la bocca (vestibolo boccale) e le fosse nasali che mostrano le prime deviazioni dallo sviluppo normale (prescindo dalle ventose).

Dal mio quaderno di laboratorio (1914-1915) rilevo che negli esperimenti con cloruro di litio sul *Bufo vulgaris*, gli stadî da prima prevalentemente adoperati furono quelli a 2 e 4 blastomeri; le soluzioni di cloruro di litio, adoperate per ottenere risultati positivi furono, $m/10$ e $m/12$.

Il tempo, durante il quale deve agire la soluzione per produrre i suoi effetti, varia in relazione con lo stadio di sviluppo, e, come hanno dimostrato i miei esperimenti dal febbraio ai primi di aprile 1914 e 1915 per il *Bufo vulgaris*, in relazione con la temperatura e, naturalmente, con il grado di concentrazione.

La temperatura agisce in modo duplice: accelera per determinato aumento lo sviluppo embrionale, e quindi fa che il sale in soluzione agisca sui stadii più inoltrati; inoltre la variazione di temperatura modifica la dissociazione elettrolitica.

Le modificazioni morfologiche più lievi da me riscontrate sono rappresentate dall'avvicinarsi delle fosse nasali; ho ottenuto un esemplare molto interessante, nel quale le narici sono addirittura diventate attigue con un semplice accenno di sbocco comune. In questi casi la bocca (vestibolo boccale) non presenta modificazioni (almeno apprezzabili).

Seriando i risultati secondo il grado maggiore di complicazione negli altri reperti che vengono ora descritti (figg. 1 a 6), notiamo che, insieme con la fusione delle narici e con il procedere della fusione delle fosse nasali,

si assiste a una modificazione nelle direzioni di accrescimento nella regione vestibolo-boccale [Vestibule buccal di Van Bambeke (1889) e di K. Keiffer 1889; Mundbucht di Goette; Rüssel di Fr. Schulze [1]].

Una prima modificazione si riferisce allo spostamento dell'apertura boccale che migra dalla parte ventrale in avanti; poi anche verso l'alto, contemporaneamente e in relazione con questi processi si scorge che l'apertura boccale tende a dirigersi in senso prevalente dorso-ventrale. La fig. 1 mostra una fase di questo processo; la narice (in alto della figura) e già unica.

Le figure 1 e 6 sono ingrandite circa 10 volte e disegnate con l'ausilio del microscopio biloculare di Zeiss; le figg. 1 e 5 si riferiscono a larve conservate in alcool; la fig. 6 a larva ancora viva. Nelle figure sono riprodotte soltanto la bocca (vestibolo) e la narice, (in alto), mediana.

Le figure 2 e 3, riferentisi ad altri esemplari, mostrano come le labbra tendono a chiudersi sulla linea mediana. La fig. 4 mostra la riduzione della regione vestibulo-boccale, e nello stesso tempo lo spostamento in alto e in avanti. Questo processo conduce alla produzione di bocche a proboscide. Ho ottenuto nel *Bufo vulgaris* reperti nei quali questo fatto è molto accentuato (assai più che non i fatti accennati da Stockard nei pesci). La fig. 5, nello stesso tempo che mostra i fenomeni di riduzione del reperto precedente, per altro conduce a quello seguente. La fig. 6 si riferisce a un reperto molto interessante che merita qualche maggiore cenno descrittivo e ciò servirà anche a meglio illustrare i reperti precedenti. È stata designata da un esemplare ancora vivente il 30 marzo: questa larva proveniva da un lotto di uova

[1] Per la terminologia e per lo studio normale il lettore consulti il fondamentale lavoro di C. van Bambeke e Héron-Royer: *Le vestibule de la bouche chez les têtards des Batracien anoures d'Europe*, Archive de biologie, tome IX, pag. 185.

deposte in un acquario del laboratorio il 1° marzo e trattate allo stadio di 2 blastomeri con una soluzione di cloruro di litio $m/12$ per un tempo durato dal giorno 1° marzo (ore 14 ½) al giorno 4 marzo (ore 14).

Va notato che in questo esperimento la mortalità è stata forte; s'è sviluppato meno d'un quinto delle uova trattate, ed io credo attribuirlo alla lunga durata dell'esperimento; ciò serve anche a dimostrare il grado differente di resistenza delle uova alle azioni nocive.

L'interesse, per me grande, che presenta questo reperto [1], sta nel mostrare uno dei gradi del divenire di processi che già si delineavano nei reperti prima accennati. È evidente uno spiccato spostamento dal basso in alto, e in avanti, degli abbozzi del vestibolo boccale; questo spostamento si accompagna alla variazione di determinate forze che agiscono nello sviluppo della forma normale e che stabiliscono determinate direzioni d'accrescimento, poichè ne risulta come affermarsi di un processo ulteriore, nel caso in esame la formazione di una parziale chiusura nel territorio che darebbe il labbro superiore con la conseguente formazione (pseudo-formazione) di un piccolo vestibolo (morfologicamente la parola non è esatta in questo caso), mentre a sua volta la parte che corrisponde al labbro inferiore si chiude, parzialmente formando un altro piccolo vestibolo boccale, e la piccola cavità che lo forma mostra nell'interno altre formazioni boccali (vero vestibolo) Il reperto che abbiamo riferito ci fa scorgere un caso di accenno di doppia formazione nello sviluppo primario, in cui le due parti (piccoli vestiboli) non sono simili; tuttavia la produzione morfologica descritta non cessa, per questo, di essere meno importante, in quanto questo processo di eteromorfosi (non rigenerativo) ci conduce a pensare che non si tratti soltanto di arresti di sviluppo nella *regione in esame* (questo fatto da solo non avrebbe certamente condotto ai reperti dianzi descritti), *ma che sono intervenute forze tali da indurre gli abbozzi embrionali a dirigersi in modo da condurre a una profonda variazione della forma.*

Ecco quindi che con questa Nota abbiamo esposto alcuni fatti che ci lasciano scorgere più intimamente il problema fondamentale del nostro studio.

Per la valutazione esatta dei reperti riferiti aggiungo che quando accenno a chiusura che si manifesti nella regione vestibolare, il lettore non deve pensare a un reale fenomeno di saldatura, ma bensì a una persistente

[1] Credo interessante ricordare che sono riuscito a riottenere questo risultato sperimentale in condizioni alquanto differenti: da un lotto di uova di *Bufo vulgaris* (6 aprile 1915) con tappo vitellino ridotto e trattato con una soluzione di Cloruro di litio $m/10$ per 20 ore.

L'avere ottenuto lo stesso reperto in condizioni di tempo così differente mi dimostra con un caso concreto l'influenza che hanno lo stadio e la temperatura in relazione col tempo d'esperimento (come accennavo più sù).

chiusura in parti che nello sviluppo normale si comporterebbe in modo molto differente.

In tutti i reperti che possono essere compresi tra quelli rappresentati dalla fig. 1 alla fig. 6 e in cui si riscontrano evidenti modificazioni spaziali, le formazioni boccali non possono essere adatte alla funzione nutritiva.

Meccanica. — *Sulla forma della traiettoria nel problema dei due corpi di masse crescenti, e sulle sue applicazioni per una possibile spiegazione della grande eccentricità di Marte.* Nota di G. Armellini, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

1. — In una mia Memoria [2], apparsa da poco tempo, ho studiato il problema dei due corpi di masse variabili. Nel caso speciale, però, in cui le masse siano crescenti, è possibile di esaminare più da vicino le particolarità del moto e formarsi anche un'idea sulla forma della traiettoria. Siccome questo caso ha grande importanza per il sistema planetario, dedico ad esso la presente Nota, che potrà servire come appendice alla Memoria citata.

Poichè come è evidente, il movimento ha luogo in un piano, sceglieremo, al solito, uno dei corpi O come origine e determineremo la posizione dell'altro A, per mezzo delle sue coordinate polari r, ϑ. Chiamando con $M(t)$ la somma delle masse di A ed O, e prendendo le unità di misura in modo che tanto il coefficiente attrattivo f quanto la costante delle aree c $(c \neq 0)$ si riducano uguali ad 1, partiamo dall'equazione (53) della mia Memoria:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} \cos \vartheta + \left(\frac{d \frac{1}{r}}{d\vartheta} \right)_0 \operatorname{sen} \vartheta + \operatorname{sen} \vartheta \int_0^{\vartheta} M(t) \cos \vartheta \, d\vartheta - \cos \vartheta \int_0^{\vartheta} M(t) \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta, \tag{1}$$

dove $\frac{1}{r_0}$ e $\left(\frac{d \frac{1}{r}}{d\vartheta} \right)_0$ sono i valori di $\frac{1}{r}$ e della sua derivata per $\vartheta = 0$.

La (1) diviene, come è chiaro, approssimata, se al posto di $M(t)$ si sostituisce la sua espressione approssimata in ϑ, ciò che è stato fatto nella Memoria; mentre è matematicamente rigorosa, posta sotto la forma qui scritta.

Le quadrature, è vero, non sono più eseguibili; ma, per le ipotesi fatte su $M(t)$, il primo membro $\frac{1}{r}$ risulterà certamente finito per ogni valore

[1] Pervenuta all'Accademia il 19 settembre 1915.

[2] *Il problema dei due corpi di masse variabili*, Memoria di G. Armellini (in Mem. Società italiana delle Scienze detta dei XL, ser 3ª, tomo XIX).

finito di ϑ. Ne risulta, come prima conseguenza, che *il corpo* A *non può urtare l'altro corpo* O, *se non dopo aver compiuto, intorno ad esso, un numero infinito di rivoluzioni* (¹). Ciò che del resto poteva anche dedursi dal teorema II della mia Memoria e dall'integrale delle aree

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = 1 . \tag{2}$$

La (2) anzi ci mostra che ϑ è funzione crescente di t; e poichè, per ipotesi, $M(t)$ è funzione crescente di t, ne deduciamo che essa è anche funzione crescente di ϑ. Ne segue che, essendo K un intero positivo qualsiasi, avremo

$$\int_0^{2K\pi} M(t) \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta < 0 . \tag{3}$$

2. Teorema I. — *La traiettoria non può mai passare due volte per uno stesso punto del suo piano* (²). *Infatti, se, per* $\vartheta = \vartheta_1$, *si ha* $r = r_1$, *e se, dopo un certo tempo,* ϑ *assume il valore* $\vartheta_1 + 2K\pi$, r *avrà in quell'istante un valore minore di* r_1 (³).

Dimostraz. — Senza togliere nulla alla generalità della questione, possiamo assumere l'asse polare in modo che sia $\vartheta_1 = 0$. Indicando allora con r_2 il valore di r per $\vartheta = \vartheta_1 + 2K\pi = 2K\pi$, dalla (I) e dalla (3) avremo

$$\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} = - \int_0^{2K\pi} M(t) \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta > 0 , \tag{4}$$

da cui

$$r_2 < r_1 . \tag{5}$$

C. d. d.

(¹) Supponiamo naturalmente che la costante delle aree sia diversa da zero.

(²) Nel caso generale in cui $M(t)$ non è crescente, il teorema non sussiste più. Si dimostra allora, però, che, se $M(t_1) \gtrless M(t_2)$ e se negli istanti t_1 e t_2, A passa per uno stesso punto P del piano, i due rami della traiettoria non possono avere in P un contatto superiore al 1° ordine (teorema III della mia Memoria).

(³) La presente dimostrazione prescinde da ogni ipotesi sulla forma della traiettoria, ed è quindi valida in ogni caso.

Supponiamo però di sapere *a priori* che in un caso particolare l'orbita ammetta un perielio od afelio; vale allora un teorema recentemente dato dal prof. Pizzetti (*Sul problema dei due corpi di masse variabili*, Nota del Socio P. Pizzetti, questi Rendiconti, luglio 1915) il quale dimostra che, per uno stesso valore positivo di ϑ, il raggio vettore è più piccolo del valore che esso avrebbe nel moto kepleriano. Potevamo, anzi, considerare il teorema I come caso particolare del bel teorema del Pizzetti; ma abbiamo dato una nuova dimostrazione, giacchè altrimenti sarebbero sfuggite, alle nostre considerazioni, alcune orbite a forma di spirale per cui il $\frac{dr}{d\vartheta}$ può essere, p. es., sempre negativo. Colgo l'occasione per ringraziare caldamente il chmo prof. Pizzetti delle lusinghiere parole che egli ha avuto nella sua importante Nota per i miei lavori.

Osservaz. I. — Da questo teorema non si potrebbe dedurre, che l'orbita di A sia una spirale avvolta intorno all'origine O, giacchè noi non sappiamo se il corpo A compie, *effettivamente*, delle rivoluzioni *complete* intorno ad O.

Supponiamo, però, che in un caso particolare si sia giunti a dimostrare che, da un certo istante in poi, r resta sempre minore di una quantità L finita e ben determinata, benchè incognita. Dall'integrale delle aree (2) potremo concludere che A compie un'infinità di rivoluzioni intorno ad O. *La sua traiettoria avrà allora, per il teorema* I, *la forma di una spirale, di cui ogni spira è interna alla spira precedente.* Un caso importantissimo, in cui ha luogo questo fatto, si ha quando la differenza iniziale tra la forza viva e la funzione delle forze è nulla o negativa (teorema IX della mia Memoria), cioè nel *caso nei pianeti* e *delle comete paraboliche.*

Osservaz. II. — Supponiamo di essere riusciti a dimostrare che r tende all'infinito insieme con t. Se ne dedurrà che A *non può compiere alcuna rivoluzione completa intorno ad* O.

Teorema II. — *L'angolo compreso tra un perielio e l'afelio successivo (supposto che esistano) è sempre minore di due retti.*

Dimostraz. — Cominciamo ad osservare che, avendo supposto l'esistenza di un afelio, r ammetterà, per tutti i tempi successivi, un limite superiore finito L (teorema V della Memoria). Il corpo A compirà dunque *infinite rivoluzioni* intorno ad O. Ciò posto, dalla (2) abbiamo:

$$(6) \qquad \frac{d\frac{1}{r}}{d\vartheta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\vartheta} = -\frac{dr}{dt}\frac{1}{r^2}\frac{dt}{d\vartheta} = -\frac{dr}{dt}\,.$$

Immaginiamo (ciò che non toglie nulla alla generalità della questione) che A passi al perielio per $\vartheta = 0$. L'equazione (1) ci dà allora, tenendo presente la (6),

$$(7) \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{r_0} - \cos\vartheta \int_0^{\vartheta} \mathrm{M}(t)\cos\vartheta\, d\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta \int_0^{\vartheta} \mathrm{M}(t)\operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta\,,$$

da cui risulta che il $\frac{dr}{dt}$ è *negativo* per $\vartheta = \pi$. D'altra parte la derivata $\frac{dr}{dt}$ è funzione *continua* di ϑ. ed è positiva per ϑ positivo e sufficientemente piccolo, avendosi un perielio per $\vartheta = 0$. Se ne conclude che, nell'intervallo $0 < \vartheta < \pi$, il $\frac{dr}{dt}$ ammette un numero *dispari* di radici reali. Dunque l'afelio avrà luogo per $\vartheta < \pi$. C. d. d.

Teorema III. — *L'angolo compreso tra un afelio e il perielio successivo (supposto che esistano) è maggiore di due retti.*

Dimostraz. — Si potrebbe imitare il procedimento precedente, osservando che, essendo ora $\frac{dr}{dt}$ negativa per valori sufficientemente piccoli e positivi di ϑ, nell'intervallo $0 < \vartheta < \pi$ essa deve ammettere un numero *pari* di radici reali. Si dimostrerebbe, poi, che questo numero è uguale allo zero. Ma è forse più breve di ragionare nel modo seguente:

In un dato istante t, posteriore al passaggio all'afelio, sia

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos(\vartheta - \omega) \tag{8}$$

l'equazione della conica osculatrice, certamente *ellittica* essendosi ammessa l'esistenza di un afelio anteriormente a t (ved. teorema IX della Memoria). Indichiamo con e, p, ω, rispettivamente, l'eccentricità, il parametro, la longitudine del perielio. Con le nostre unità avremo, per formole notissime [1],

$$e = p\sqrt{\{M(t)\}^2 + 2h} \quad , \quad p = \frac{1}{M(t)}, \tag{9}$$

dove il radicale va preso col segno positivo. Supponiamo che in quell'istante la massa del sistema aumenti bruscamente di dM: avremo, facendo variare p, e, ω, h, e mantenendo costanti r e ϑ,

$$0 = dM + \frac{M\,dM + dh}{\sqrt{M^2 + 2h}}\cos(\vartheta - \omega) + \sqrt{M^2 + 2h}\,\text{sen}(\vartheta - \omega) . d\omega\,; \tag{10}$$

ed essendo, per la formola (14) della Memoria,

$$dh = -\frac{dM}{r}, \tag{11}$$

otterremo, dopo eseguite le riduzioni necessarie,

$$\frac{d\omega}{dM} = \frac{\cos^2(\vartheta - \omega) - 1}{\text{sen}(\vartheta - \omega)\sqrt{M^2 + 2h}} . \tag{12}$$

Siccome il radicale va preso col segno positivo, la derivata $\frac{d\omega}{dM}$ avrà segno contrario al termine $\text{sen}(\vartheta - \omega)$, cioè al *seno dell'anomalia vera*. Ora, in tutto l'intervallo di tempo, compreso tra un passaggio all'afelio e il successivo appulso al perielio, questo seno è certamente negativo. Dunque in tutto questo tempo l'aumento di massa del sistema, avrà per effetto di far

[1] Ved. Appell, *Traité de méc. rat.*, tom. I^{er}, pag. 392 (troisième édition). Sarà inutile di ricordare al lettore che noi scriviamo $2h$, là dove l'Appell scrive semplicemente h; infatti l'Appell pone $v^2 = \frac{2M}{r} + h$.

aumentare la longitudine del perielio. La distanza angolare tra un afelio e il successivo perielio sarà perciò maggiore di π.

Teorema IV. — *Supponiamo che si abbia* $\lim_{t=\infty} r = \infty$. *Io dico che si avrà anche* $\lim_{t=-\infty} r = \infty$; *e che, da* $t = -\infty$ *a* $t = \infty$, r *ammetterà certamente e solamente un minimo* (perielio).

Dimostraz. — Intanto è chiaro, per l'osservazione II, che A non potrà compiere alcuna rivoluzione intorno ad O. Variando quindi t da $-\infty$ a $+\infty$, l'anomalia ϑ varierà da α a β, essendo $\beta - \alpha < 2\pi$.

Ne segue che la derivata $\frac{d\vartheta}{dt}$ tenderà a zero quando t tende a $-\infty$; e quindi, per la (2), r tenderà a ∞.

Ciò posto, essendo r funzione continua di t, e divenendo ∞ per $t = \pm\infty$, essa ammetterà *certamente* un minimo. Che non possa ammetterne più di uno, è poi stato dimostrato nel teorema VI della mia Memoria.

Osservaz. — Questo teorema ci mostra che, anche nel caso di masse crescenti [ed anche se $\lim_{t=\infty} M(t) = \infty$, purchè $M(t)$ divenga ∞ di ordine inferiore al primo (teorema I della mia Memoria)] *si possono avere orbite somiglianti ad iperbole, senza però alcun asse di simmetria per l'origine* (pag. 11 della mia Memoria).

Sarà inutile osservare che il teorema contrario non sussiste: può aversi infatti $\lim_{t=-\infty} r = \infty$, senza che ne discenda $\lim_{t=\infty} r = \infty$.

Teorema V. — *Se la conica osculatrice è un'iperbole* (*o parabola*), *l'eccentricità è funzione decrescente del tempo.*

Dimostraz. — Ponendo, al solito, $c = f = 1$, si ha la formola

$$e = \sqrt{1 + \frac{2h}{[M(t)]^2}}\,; \tag{13}$$

da cui, differenziando, e ricordando la (11),

$$e\frac{de}{dM} = -\frac{1}{[M(t)]^2}\left\{\frac{1}{r} + \frac{2h}{M(t)}\right\}. \tag{14}$$

Siccome, per ipotesi, h è positivo o nullo, la derivata $\frac{de}{dM}$ sarà negativa.

Teorema VI. — *Se in un dato istante t la conica osculatrice è un ellisse, l'eccentricità sarà funzione crescente o decrescente del tempo, secondo che, in quell'istante, il coseno dell'anomalia eccentrica u è negativo o positivo.*

Dimostraz. — Supposto che all' istante t la conica osculatrice sia ellittica, avremo, chiamando con u ed a, rispettivamente, l'anomalia eccentrica e il semiasse maggiore:

$$(15) \qquad h = -\frac{M(t)}{2a} \quad ; \quad r = a(1 - e\cos u)\,,$$

da cui, sostituendo nella (14), otterremo, con alcune riduzioni,

$$(16) \qquad \frac{de}{dM} = \frac{\cos u}{M^2 a\,(e\cos u - 1)}\,.$$

Siccome, per ipotesi, si ha $e < 1$, il segno della derivata $\frac{de}{dM}$ sarà contrario al segno del $\cos u$ [1].

3. — Cominciamo dal caso in cui $M(t)$ per $t = \infty$ diviene ∞ d'ordine eguale o superiore al primo. Per l'osservazione I, e per il teorema VIII della mia Memoria, la traiettoria presenta allora, *necessariamente*, la forma di *una spirale, di cui ogni spira è contenuta nella precedente*. L'urto ha luogo per $t = \infty$ (fig. 1).

Supponiamo, al contrario, che $M(t)$ divenga ∞ per $t = \infty$, ma d'ordine inferiore al primo. La traiettoria presenta allora due forme differenti: o quella ora studiata, oppure una *forma somigliante ad un'iperbole*. Il corpo A parte dall'infinito per $t = -\infty$; r decresce fino ad un certo minimo ϱ, poi torna a crescere tendendo all'infinito insieme con t. Come si è detto, *non vi è alcun asse di simmetria* (fig. 2).

Esaminiamo ora il caso in cui si abbia $\lim\limits_{t=\infty} M(t) = B$; essendo B una quantità finita e positiva. È allora chiaro che, tendendo t all'infinito, l'orbita tende a cangiarsi in una conica. D'altra parte, essendo $M(t)$ funzione crescente, e sempre positiva per valori reali dell'argomento, si ha necessariamente $\lim\limits_{t=-\infty} M(t) = b$. Possiamo dunque dire che la traiettoria è in questo caso *doppiamente assintotica*, tendendo a cangiarsi in una conica per $t = \pm\infty$. Siccome h è funzione decrescente di t, i *casi possibili sono cinque*, secondo che le traiettorie limiti per $t = -\infty$ e per $t = \infty$ sono:

α) *due ellissi* (fig. 3);

β) *una parabola* (per $t = -\infty$) ed *una ellisse* (per $t = \infty$) (fig. 4);

γ) *un'iperbole* (per $t = -\infty$) ed *una ellisse* (per $t = \infty$) (fig. 5).

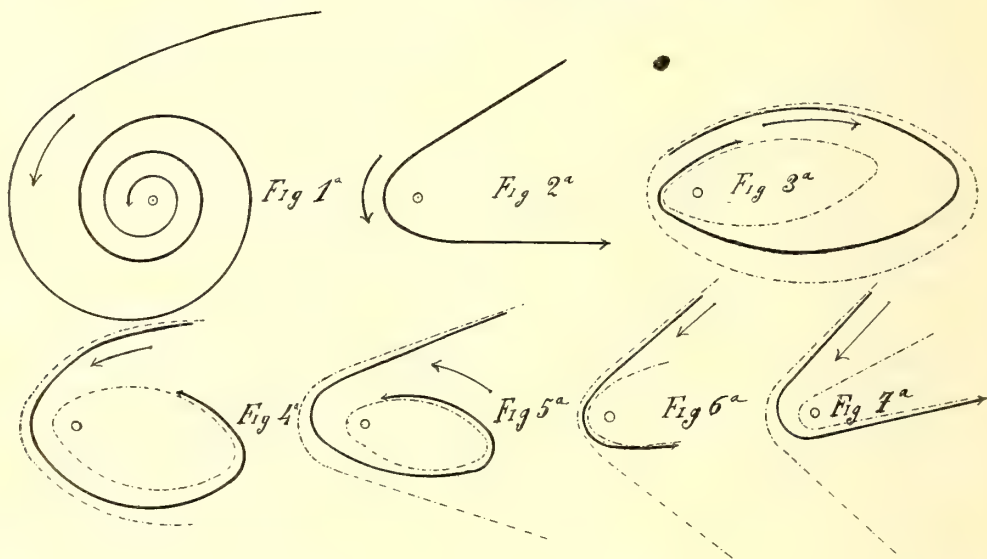
In questi tre casi A compie *infinite rivoluzioni* intorno ad O;

δ) *un'iperbole* ed *una parabola* (fig. 6).

[1] Supponiamo che l'orbita di un pianeta sia esattamente circolare e che sul Sole cada *un aereolite* all'istante t. Essa si cangerà in un ellisse avente *l'afelio* nella posizione occupata dal pianeta in questo istante. Occorre quindi porre nelle (16) $e = 0$, $\cos u = -1$, da cui $\frac{de}{dM} = \frac{1}{M^2 a}$. Invece *l'effetto globale* di una *leggiera* pioggia d'aereoliti *uniformemente* diffusa su tutta l'orbita è di far restare l'orbita *simile* a se stessa.

ε) *due iperbole*, di cui la seconda (per $t - \infty$) ha eccentricità minore della prima (per $t = -\infty$) (fig. 7).

In questi due casi A *non compie alcuna rivoluzione completa* intorno ad O. Nel caso di $b = 0$, la conica limite per $t = -\infty$ è una retta.

4. — Studiamo il movimento del pianeta Marte, la cui orbita è tutta interna, ma vicina alla zona degli asteroidi. È assai probabile che in questa zona vi fosse una grande quantità di materia diffusa, almeno in epoche remotissime. Ne segue che in tempi antichissimi sono cadute sul pianeta

grandi pioggie meteoriche, la cui intensità, naturalmente, era maggiore in quella metà dell'orbita per cui $r > a$, giacchè allora Marte era più vicino alla zona degli asteroidi. Ma allora il coseno dell'anomalia eccentrica è negativo: queste pioggie, quindi, hanno *aumentato* l'eccentricità di Marte.

Osserviamo ancora che la materia che andava cadendo su Marte apparteneva, in ogni istante, a quella parte dell'anello più vicino al pianeta, cioè a quella parte la cui attrazione si opponeva in ogni istante all'attrazione solare. L'effetto sarà quindi maggiore: precisamente come se queste pioggie fossero state molto più forti. Tutto ciò spiega forse in modo assai semplice la grande eccentricità di Marte. Si può supporre che, allo stato iniziale, esso avesse presso a poco la stessa eccentricità degli altri pianeti; in seguito, per le ragioni ora dette, questa aumentò notevolmente [1].

[1] Analogamente si potrebbe spiegare la grande eccentricità di Mercurio ammettendo l'esistenza di un anello di materia cosmica (ora scomparso) tra Mercurio e Venere. Ma per Mercurio data la sua vicinanza al Sole, si può anche ricorrere all'ipotesi delle *maree*, le quali secondo il Darwin possono aumentare l'eccentricità di un'orbita.

Matematica. — *Sulle superficie algebriche contenenti infinite coniche.* Nota I di EUGENIO G. TOGLIATTI, presentata dal Socio C. SEGRE (¹).

Tra le superficie algebriche contenenti sistemi infiniti di curve algebriche di tipo particolare, le più interessanti, dopo le rigate, sono certo quelle che posseggono infinite coniche.

Si sa che le superficie di 4° ordine luoghi di coniche furono determinate da Kummer (²). Quelle di 5° ordine sono pure conosciute (almeno nei tipi principali): le razionali già da tempo (³); le irrazionali per due lavori recenti del De-Franchis ed uno mio (⁴).

Nelle Note presenti espongo i risultati a cui sono pervenuto cercando i tipi proiettivamente distinti di superficie di 6° ordine luoghi di coniche (gli sviluppi relativi si troveranno in un'apposita Memoria). Per raggiungere questo scopo riconobbi conveniente prescindere anzitutto dal valore particolare dell'ordine della superficie, per stabilire alcune proprietà comuni a tutte le superficie algebriche luoghi di coniche. I teoremi così ottenuti, mentre permettono di ritrovare assai facilmente i risultati relativi ai valori 4 e 5 dell'ordine della superficie, si applicano bene a superficie di 6° ordine, e si potrebbero anche applicare a superficie di ordine > 6: le trattazioni a cui si arriva sono sempre uniformi, per quanto le difficoltà pratiche vadano allora notevolmente crescendo.

1. Escluse le rigate e la superficie romana di Steiner (⁵), se una superficie algebrica irriducibile d'ordine m, che indicheremo brevemente con F^m,

(¹) Pervenuta all'Accademia il 2 settembre 1915.

(²) Kummer, *Ueber die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen*, Crelle, 64 (1865), pp. 66-76.

(³) Oltre le F^5 con retta tripla, si hanno infatti la F^5 con C^4 doppia di 1ª specie [Clebsch, *Ueber die Abbildung einer Classe von Flächen 5. Ordnung*, Abhandl. Gesell. Göttingen, 15 (1870), pp. 2-64], e la F^5 con C^5 doppia e punto triplo su questa [Caporali, *Sulla superficie del quinto ordine dotata d'una curva doppia del quinto ordine*, Ann. di matem., (2) 7 (1875), pp. 149-188].

(⁴) De Franchis, *Le superficie più volte irregolari, di 5° ordine con punti tripli*, questi Rendiconti, (5) 15_2 (1906), pp. 217-222; id., *Le superficie irrazionali di 5° ordine con infinite coniche*, id., pp. 284-286; Togliatti, *Sulle superficie algebriche, del 5° ordine, irriducibili, con un fascio ellittico di coniche*, questi Rendiconti, (5) 21_2 (1912), pp. 35-37. Pure alle F^5 luoghi di coniche è dedicato (in parte) un lavoro recente del Marletta, *Sulle superficie algebriche con infinite coniche, e, in particolare, su quelle di ordine 5*, Atti Accad. Gioenia, (5) 8 (1915), Mem. XIV.

(⁵) Questa restrizione è essenziale per il sèguito.

contiene infinite coniche, queste si distribuiscono in uno o più fasci. Se la F^m contiene più fasci di coniche (almeno due), questi sono tutti razionali, ed anche la superficie è razionale; se la F^m contiene un sol fascio di coniche, il cui genere indicheremo con p, essa si può riferire birazionalmente ad un cono di genere p.

Oltre al genere p di un fascio di coniche, T, giacente su una F^m, vi sono da considerare altri caratteri, e cioè: la classe α della sviluppabile formata dai piani delle coniche (la F^m si suppone ora immersa in uno spazio S_3); il numero s delle coniche di T giacenti in ciascun piano della sviluppabile; il genere π delle sezioni piane generiche della F^m. Tra i caratteri m, p, α, s, π intercedono delle relazioni.

Anzitutto, considerando l'involuzione I di 2° grado e genere p che le coniche di T segano sulla sezione piana generica C di F^m, e cercando le coppie di I che stanno su rette uscenti da un punto generico del piano di C ([1]), si trova che

$$\pi = m + 2p - \alpha s - k - 1, \tag{1}$$

dove k è il numero delle coniche di T ridotte ad una retta da contar due volte e che, per di più, sia doppia (almeno) per la F^m.

Esaminando poi il gruppo dei punti doppî della I (il cui numero è dato dalla formola di Zeuthen), si trova che esso si compone sempre almeno di 4 punti, onde

$$\pi \geq 2p + 1. \tag{2}$$

Essendo $\pi \leq \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, di qui risulta

$$p \leq E\left[\frac{1}{4}m(m-3)\right], \tag{3}$$

dove il simbolo E indica « parte intera ».

Infine, dal confronto delle (1), (2), si ricava per il numero, αs, delle coniche del fascio il cui piano passa per un punto generico dello spazio la limitazione

$$\alpha s \leq m - 2. \tag{4}$$

2. I teoremi precedenti bastano già per compiere, una volta fissato il valore di m, uno schema dei tipi possibili di F^m luoghi di coniche.

[1] Castelnuovo, *Alcune osservazioni sopra le serie irrazionali di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica*, questi Rendiconti, (4) 7_2 (1891), pp. 294-299, § 1; Segre, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*, Ann. di matem., (2) 22 (1894), pp. 41-142, n. 53.

Si osservi perciò che il piano della conica generica del fascio T sega ancora F^m in una linea γ d'ordine $m-2$, irriducibile o spezzata, ma che non può contenere alcuna componente rettilinea variabile col piano della conica considerata. Ad es., per $m=4$ quella linea può essere una conica irriducibile (dello stesso fascio di quella di prima, oppur no), oppure una retta fissa da contar due volte, che sarà doppia per la F^4; per $m=5$ la linea γ può essere una C^3 irriducibile, oppure si può comporre di una conica (del fascio T) e di una retta fissa, oppure di una retta fissa da contar tre volte che sarà tripla per la F^5. Infine, per $m=6$ la linea γ può essere una C^4 irriducibile, oppure può comporsi d'una conica di T e di una retta doppia della F^6, o di una retta quadrupla della F^6, o di due coniche. E così via, per valori di $m>6$.

Quando la linea γ ha una componente irriducibile di ordine >2 (od anche di 2° ordine, purchè si tratti allora di una conica non appartenente al fascio T), questa è incontrata da ogni conica di T in un punto variabile od in due; nel secondo caso si ha da considerare su di essa un'involuzione di coppie di punti che si può facilmente studiare. È quindi chiaro che si possono sempre trovare, per ogni forma della curva γ, i valori possibili di α e di s: bisognerà perciò valersi anche della (4). Dando poi al genere p di T i valori che può assumere, in base alla (3), la (1) permette di calcolare π in funzione di k.

La via qui sommariamente indicata conduce a riconoscere possibili varî tipi di superficie, per ciascuno dei quali si avranno i valori di p, π, α, s, k.

3. Rimane da discutere l'esistenza effettiva di tutte queste superficie. Per ciò torna comodo ricorrere al sistema lineare aggiunto a quello delle sezioni piane di F^m. Se $\pi>1$, un tal sistema, che è segato su F^m (fuori delle linee multiple) dalle superficie aggiunte d'ordine $m-3$, esiste, ed è composto col fascio T di coniche [1]: le sue curve coincidono cioè coi gruppi di una serie lineare $g_{\pi-1}^{\pi-p-1}$ sopra T.

Ciò permette di costruire la F^m con un riferimento algebrico tra i piani d'una sviluppabile di classe α, e di tipo noto, e le F^{m-3} aggiunte di un fascio. Nel maggior numero dei casi si può scegliere questo fascio in guisa che i suoi elementi contengano tutti una componente fissa, il che semplifica la costruzione; ad es., per $m=6$, se le coniche di T stanno a coppie nei piani di un fascio, le F^3 aggiunte costrette a contenere due coniche complanari di T hanno tutte come parte il piano delle due coniche, e perciò (in generale) consentono di sostituire, nella costruzione della F^6, un fascio di quadriche al fascio di F^3, ecc. E sarà pure facile scrivere l'equazione della superficie costruita; dopo di che il suo studio ulteriore non presenta più difficoltà essenziali.

(1) Enriques, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche*, Mem. Soc. it. delle Sc. (dei XL), (3) 10 (1896), pp. 1-81, n. 30.

4. Il procedimento ora esposto cade in difetto quando $\pi = 1$, mancando allora il sistema aggiunto a quello delle sezioni piane. Si osservi però che le superficie con sezioni piane di genere 1 sono note, e sono razionali o rigate; escludendo le rigate ellittiche, una F^m con sezioni piane di genere 1 è proiezione d'una F^m di S_m ($m \leq 9$), razionale, di cui è nota la rappresentazione sul piano, e che (per $m \leq 8$) contiene sempre uno o più fasci di coniche; anzi, in questo gruppo rientrano tutte le F^m con più fasci di coniche, come ora diremo brevemente.

Quando per ogni punto d'una superficie passano due o più coniche giacenti su di essa, la superficie contiene due o più fasci di coniche, oppure un sistema ∞^1 di coniche di indice > 1. È noto che tali superficie erano già state determinate dal Koenigs [1], con procedimenti che si possono però notevolmente semplificare. Infatti la sezione piana generica d'una superficie con più fasci di coniche (necessariamente tutti razionali) contiene più serie lineari g_2^1, e quindi è di genere 0 od 1; mentre una superficie con un sistema ∞^1 di coniche di indice > 1 possiede sempre un sistema lineare di coniche (almeno ∞^2) che contiene il precedente [2], che ha lo stesso suo grado d, e quindi la dimensione $d + 1$ [3]. Perciò la superficie contiene sempre una rete omaloidica di coniche, che permette di rappresentarla sul piano con un sistema lineare di coniche, per modo che le sezioni piane risultano ancora razionali. Ricorrendo allora ai noti teoremi sulla riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di curve piane di genere 0 od 1 [4], si trova che le sole superficie normali per ogni punto delle quali passino due o più coniche sono le quadriche, la rigata cubica di S_4, la superficie del Veronese, la F^8 di S_8 rappresentata sul piano dal sistema lineare di tutte le C^4 con due punti base doppî distinti e le F^n di S_n sue proiezioni.

Escludendo dunque le rigate e la superficie di Steiner, le F^m con più fasci di coniche (o, più generalmente, le F^m luoghi di coniche con sezioni piane di genere 1) sono determinabili come proiezioni di una F^m di S_m, con $m \leq 8$.

5. La dimensione dello spazio normale per una F^m luogo di coniche è facilmente determinabile nel caso di superficie razionali e vale $m - \pi + 1$; per superficie irrazionali poco si può dire, in generale, oltre ciò che è dato

(1) Koenigs, *Détermination de toutes les surfaces plusieurs fois engendrées par des coniques*, Ann. éc. norm., (3) 5 (1888), pp. 177-192.

(2) Castelnuovo ed Enriques, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche*, Ann. di matem., (3) 6 (1901), pp. 165-225, n. 17.

(3) Segre, *Sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere p*, Rendiconti Palermo, 1 (1887), pp. 217-221.

(4) Per questi teoremi si veda ad es. Ferretti, *Sulla riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di curve piane irriducibili di genere p; in particolare per i valori 0, 1, 2 del genere*, Rend. Palermo, 16 (1902), pp. 236-279, teoremi VII e X.

dal teorema Riemann-Roch per superficie qualsiasi [1]. E cioè quella dimensione risulta $\geq m - \pi - p + 1$; come caso speciale, la F^m è normale in S_3 se le aggiunte d'ordine $m - 4$ della sezione piana generica formano un sistema lineare regolare. Così una F^5 irrazionale, luogo di coniche, è sempre normale in S_3; e lo stesso accade per una F^6 irrazionale luogo di coniche, finchè il genere della sua sezione piana generica è ≥ 5.

[1] Severi. *Sul teorema di Riemann-Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, Atti Accad. Torino, 40 (1904-1905), pp. 766 776.

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-XXIV. (1892-1915). Fasc. 6°. Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XXIV. (1892-1915). Fasc. 3-4.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-XI. Fasc. 3.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

RENDICONTI — Settembre 1915.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie, sino al 19 settembre 1915.

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 21 ottobre 1915.* **N. 7.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXIV°. — Fascicolo 7°

2° Semestre.

Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie sino al 3 ottobre **1915.**

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI
pervenute all'Accademia durante le ferie del 1915.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Astronomia. — *Sulla precisione delle osservazioni eseguite col Piccolo Meridiano di Bamberg desunta dal Catalogo stellare di Arcetri.* Nota del Corrisp. A. ABETTI [1].

Il prof. Viaro ha pubblicato nelle Memorie dell'Istituto Veneto [2] il suo catalogo di 1645 stelle, frutto della sua solerte applicazione astronomica in Arcetri fino al principio dell'anno 1914. Non tocca a me dire del libro, ma non posso tacerne del tutto chiamando in causa l'istrumento impiegato, il Piccolo Meridiano di Bamberg, che riuscì a dare risultati paragonabili a quelli ricavati con strumenti più poderosi del classico tipo a cannocchiale diritto. Questo fatto è di somma importanza per l'osservatorio di Arcetri perchè di fronte ad esso corre il pensiero sulla convenienza di preferire un Gran Meridiano di tipo identico al piccolo che diremo B, anzichè al tipo consueto che diremo R, alludendo ai Repsold con cannocchiali diritti che odiernamente tengono il primato. Il tipo B deve la sua origine al mio pensiero, confortato dall'autorità del mio maestro il Lorenzoni, di far applicare, nel 1894, da Bamberg al suo classico strumento di passaggi, portato all'apertura di mm. 89, un buon cerchio diviso, leggibile con due microscopî [3]. La diversità di B rispetto ad R, a pari apertura obiettiva, consiste nel cannocchiale spezzato che concede una rapidissima inversione insieme ai due mi-

[1] Pervenuta all'Accademia il 2 ottobre 1915.

[2] Vol. XXVIII. Vedi anche il fasc. 33 delle Pubbl. di Arcetri a pag. 5.

[3] Cfr. Pubbl. di Arcetri, fasc. 7.

croscopî che si trovano situati accanto all'oculare. E per ciò un solo operatore, ritto sempre della persona, fa tutto da sè con celerità, sicurezza, ed oso aggiungere con soddisfazione.

Il tipo R esige due operatori, uno all'oculare, l'altro ai microscopî, massimamente poi quando si tratta di stelle prossime allo zenit.

Il catalogo di Arcetri, oggi, prova che lo strumento impiegato riuscì a dare risultati paragonabili a quelli dei più celebri cataloghi elaborati con forze più poderose. Pertanto io sono giunto a concludere che un tipo B col massimo obiettivo di cui è capace la sua struttura, servirebbe ottimamente per l'osservazione a campo illuminato di tutte le stelle della Bonner Durchmusterung (BD), boreale ed australe, fino alla 10^a grandezza. E nelle stelle più piccole di BD si contengono tanti vergini programmi di osservazioni utilissime e necessarie che terrebbero impegnati parecchi strumenti B per un notevole periodo di anni. Siccome il Piccolo Meridiano fu ideato bastevole per le stelle di 8^a in 9^a grandezza [1], esso, così come sta, è insufficiente per quelle dalla 9^a alla 10^a che è il campo da mietere; quindi io penso che pur restando esso in servizio utilissimo per il tempo, per le stelle di confronto agli equatoriali e per i problemi geodetici, un suo maggior fratello sarebbe ottimamente impiegato, per la formazione di cataloghi di piccole stelle, nel nostro superbo salone meridiano, che è pronto del tutto per riceverlo su base cospicua.

Preferendo la costruzione B alla R io mi lusingo di poter eseguirla e dirigerla in Italia, siccome feci col grande e col piccolo Equatoriale, e pertanto riuscirei ad avere un notevole risparmio di spesa sulla somma ormai garantita all'Osservatorio per l'acquisto del Gran Meridiano. E nel mentre che questo maggior tipo B, dedicato, siccome dissi, ai cataloghi di piccole stelle, soddisferebbe pienamente l'astronomia di posizione, per la quale fu costruita la gran sala meridiana, il risparmio potrebbe costituire il primo fondo per uno sviluppo pratico in Arcetri anche dell'Astrofisica. Ma rimandando ad un prossimo futuro, lo studio dei dettagli che si riferiscono ai disegni, alle spese, ed all'intesa colla Facoltà e colla Soprintendenza dell'Istituto di Studî Superiori da cui l'Osservatorio di Arcetri dipende, passo ora a produrre la prova della bontà del Piccolo Meridiano di Bamberg.

⁂

Il prof. Viaro dà a pag. XIX della Introduzione al suo catalogo i seguenti valori dell'errore probabile di una osservazione:

$$\varepsilon_\alpha = \pm 0^s.032 \qquad \varepsilon_\delta = \pm 0''.56$$

ma siccome ogni posizione catalogata è stata conclusa con quattro osserva-

[1] Bastando così nel 1894, a me solo, nel primo impianto dell'Osservatorio. Cfr. il luogo citato Pubbl. di Arcetri, fasc. 7.

zioni ([1]) i suoi errori si deducono dai soprascritti mediante la divisione per $\sqrt{4}$, e quindi abbiamo:

$$\text{in } \alpha \pm 0^s.016 \qquad \text{in } \delta \pm 0''.28 .$$

Questo risultato concorda pienamente con quello esibito da Lewis Boss nel suo catalogo equatoriale *AG Albany* a pag. (16); catalogo ottenuto con uno strumento a cannocchiale diritto assai più poderoso ([2]). Tuttavia nell'uno e nell'altro caso questi errori, che in arco tornano, tanto per l'una quanto per l'altra delle due coordinate, fino a

$$\pm 0''.3$$

esprimono soltanto il carattere di buona concordanza delle osservazioni tra loro, ma non dicono quanto le posizioni catalogate concordano con posizioni tipo, cioè coi capisaldi della nostra astronomia di posizione, che sono il risultato di una lunga e larga elaborazione, ormai secolare, da Bradley a noi. Se il confronto fra posizioni nostre attuali e posizioni tipiche portasse a concludere una differenza media complessiva dell'ordine suddetto potremmo accontentarci. Questo si verifica per il catalogo di Arcetri e nel confronto ivi fatto, a pag. 135, per 287 stelle comuni col recentissimo catalogo fondamentale generale PGC ([3]) concluso dallo stesso Lewis Boss, per 6188 stelle scelte da lui, adottando le posizioni di 80 cataloghi che contengono osservazioni ripetute per un secolo e mezzo dal 1755 al 1906, abbiamo quanto ci occorre pel nostro scopo.

Anzitutto riassumiamo sinotticamente quel confronto *Boss PGC-Arcetri*. Perciò riuniamo le differenze contenute nel quadro di Viaro in 29 gruppi di dieci valori ciascuno ([4]) e componiamo le tre prime colonne della tabella qui sotto, poscia nelle due colonne seguenti facciamo i quadrati delle cifre significative, e per ultimo scriviamo a pie' di esse le somme $[\Delta\Delta]$ nel loro vero ordine decimale.

([1]) Salva qualche eccezione; e furono simmetriche rispetto al piano meridiano, cioè due col cerchio all'ovest e due col cerchio all'est.

([2]) Cioè con obbiettivo di mm. 203 con amplificazione 180, mentre il nostro PM è di mm. 89 con amplificazione 44.

([3]) *Preliminary General Catalogue of 6188 Stars for the Epoch 1900, including those visible to the naked eye and other well-determined Stars, prepared at the Dudley Observatory,* Albany N. Y. by Lewis Boss. Published by the Carnegie Institution of Washington, 1910.

([4]) Meno l'ultimo di sette, ma a cui possiamo, per semplicità, impunemente attribuire il peso dieci senza timore di alterazione finale.

Boss PGC-Arcetri.

Arc			$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	Quadrati	
9	a	64	+ $0^s.012$	+ $0''.19$	144	361
68	»	117	+ 0.001	— 0.21	1	441
127	»	208	— 0.015	+ 0.14	225	196
212	»	252	+ 0.016	0.00	256	0
259	»	288	— 0.002	+ 0.07	4	49
291	»	325	+ 0.004	+ 0.24	16	576
330	»	360	— 0.023	— 0.16	529	256
362	»	402	+ 0 016	+ 0.20	256	400
409	»	485	0.000	+ 0.02	0	4
490	»	550	— 0.006	+ 0.15	36	225
570	»	623	— 0.004	— 0.35	16	1225
628	»	701	— 0.001	— 0.43	1	1849
702	»	724	— 0.001	+ 0.05	1	25
725	»	750	+ 0.007	— 0.15	49	225
753	»	782	— 0.020	— 0.17	400	289
786	»	818	+ 0.005	— 0.18	25	324
825	»	881	— 0.004	— 0.22	16	484
884	»	946	+ 0.007	+ 0.15	49	225
947	»	1028	+ 0.030	— 0.04	900	16
1036	»	1079	+ 0.008	+ 0.04	64	16
1082	»	1129	+ 0.008	— 0.07	64	49
1138	»	1223	— 0.005	+ 0.32	25	1024
1237	»	1304	— 0.008	+ 0.13	64	169
1307	»	1399	+ 0.019	— 0.14	361	196
1408	»	1469	— 0.004	— 0.14	16	196
1486	»	1531	+ 0.017	— 0.37	289	1369
1536	»	1571	+ 0.017	— 0.32	289	1024
1573	»	1600	+ 0.005	+ 0.07	25	49
1615	»	1642	+ 0.020	+ 0.33	400	1089

$$[\Delta\Delta] = \begin{cases} 0^s.004521 \\ \qquad\qquad 1''.2351 \end{cases}$$

Siccome ogni $\Delta\alpha$ e $\Delta\delta$ della tabella ha il peso p eguale a 10, se noi intendiamo fatta la moltiplicazione per dieci dovremo considerare quale somma dei quadrati l'espressione

$$10[\Delta\Delta]$$

relativa ad un numero di 29 osservazioni.

D'altra parte l'errore probabile corrispondente all'unità di peso è rappresentato da:

$$\sigma = {}^2/_3 \sqrt{\frac{[p\Delta\Delta]}{n-1}}$$

che nel nostro caso, essendo p sempre uguale a dieci, diventa

$$\sigma = {}^2/_3 \sqrt{\frac{10\,[\Delta\Delta]}{28}}$$

e fatto il calcolo coi due valori di $[\Delta\Delta]$ troviamo

$$\sigma_\alpha = \pm\, 0^s.027 = \pm\, 0''.41 \qquad \sigma_\delta = \pm\, 0''.44\,.$$

Complessivamente abbiamo dunque per tutte due le coordinate $\pm\, 0''.4$.

Come si vede questa è una buona conseguenza riportandola tutta allo strumento adoperato, tanto più buona dal mio punto di vista se si pensa che da esso io non pretendeva [1] maggior precisione di 2″ per una singola osservazione, ovvero sia 1″ su quattro. Questo dato bastò per iniziare con un mezzo così modesto un lavoro sistematico corrente di catalogo stellare, ed il Viaro con buone virtù lo portò a compimento con un successo maggiore dell'aspettazione. Di fronte a questo risultato, io, ripeto qui in fine quanto ho detto dapprincipio: che nel campo dell'astronomia di posizione converrà all'Osservatorio di Arcetri restar attivo con un cerchio meridiano maggiore di quello che ora possiede; ma, ciocchè è più, dello stesso identico tipo.

Matematica. — *Sulle soluzioni periodiche nel Calcolo delle Variazioni.* Nota di Leonida Tonelli, presentata dal Socio S. Pincherle [2].

L. Lichtenstein, nella sua recente Memoria, *Ueber einige Existenzprobleme der Variationsrechnung* (Methode der unendlichvielen Variabeln) [3], fondandosi sulla considerazione degli sviluppi in serie di Fourier e sfruttando la ben nota formula di Parseval, è giunto a stabilire l'esistenza della soluzione in certi problemi di Calcolo delle Variazioni, determinando precisamente i coefficienti degli sviluppi detti di tali soluzioni.

Riferendoci qui a quella parte del lavoro che tratta dei problemi nel piano (nei quali cioè la funzione incognita dipende da una sola variabile), vogliamo osservare che i teoremi d'esistenza in essa contenuti scendono tutti,

(1) Cfr. Pubbl. di Arcetri, fasc. 7, pag. 57.

(2) Pervenuta all'Accademia il 28 settembre 1915.

(3) Journal für die reine und angewandte Mathematik (november, 1914).

ad eccezione di quello del § 4 (cap. I), come casi particolari dai teoremi da me enunciati in due Note inserite nei Comptes rendus del giugno 1914 ([1]).

Nel § 4 citato, il Lichtenstein si occupa delle soluzioni periodiche del problema di minimo studiato, e stabilisce la seguente proposizione: « Sia $F(x, y)$ una funzione finita e continua, insieme con le sue derivate parziali $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, per tutti i valori reali di x e y; di più, valga sempre la relazione $F(x + 2\pi, y) = F(x, y)$, ed esista un numero positivo y_0 tale che, per ogni $y \geq y_0$, sia $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$, e, per ogni $y \leq -y_0$, $\frac{\partial F}{\partial y} < 0$. Ciò posto, fra tutte le funzioni $y(x)$, continue insieme con la propria derivata prima e soddisfacenti alla uguaglianza $y(x + 2\pi) = y(x)$, ne esiste almeno una che rende minimo l'integrale $\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + F(x, y) \right] dx$ ».

Nelle pagine che seguono, mi propongo di mostrare come il metodo da me indicato nelle Note sopra ricordate, permetta di trattare anche la questione delle soluzioni periodiche, e in modo assai più generale di quello che non sia consentito al Lichtenstein.

Non sarà poi male osservare che il mio metodo serve allo studio della medesima questione pure in quei problemi isoperimetrici dei quali è fatto cenno nelle mie Note citate, e fra i quali rientra, come caso particolarissimo, quello considerato dal Lichtenstein al cap. I, § 6 del suo lavoro.

1. Sia $f(x, y, y')$ una funzione finita e continua, insieme con le sue derivate parziali dei due primi ordini, in tutto il campo definito dalle disuguaglianze

$$(A) \qquad \begin{cases} a \leq x \leq b \\ -\infty < y < +\infty \\ -\infty < y' < +\infty. \end{cases}$$

Sia inoltre:

a) $f(a, y, y') = f(b, y, y')$, per tutti i valori ammessi per y e y';

b) $f_{y'y'} > 0$ in tutto il campo (A) ([2]);

c) $\left| \frac{f_y - f_{y'x} - y' f_{y'y}}{f_{y'y'}} \right| < y'^2 P(y) + Q(y)$, in tutti i punti di (A),

essendo $P(y)$ e $Q(y)$ due funzioni sottoposte alla sola condizione di essere

([1]) *Sur une méthode directe du Calcul des Variations.* La Memoria che contiene gli sviluppi degli enunciati di queste Note è uscita da poco nei Rendiconti del Circolo matematico di Palermo; essa nel seguito verrà indicata con (T).

([2]) Si potrebbe considerare anche il caso che, invece della $f_{y'y'} > 0$, fosse verificata la $f_{y'y'} \geq 0$: non lo facciamo qui per semplificare i ragionamenti.

continue per ogni y finito; e si possano determinare dei numeri positivi (>0) N, M, α, l, in modo che si abbia

d) $f > -N$ in tutti i punti di (A), e $f(x, y, y') > |y'|^{1+\alpha}\, m(y)$ in tutti quelli del campo parziale

$$(A') \qquad \begin{cases} a \leq x \leq b \\ -\infty < y < +\infty \\ |y'| \geq M, \end{cases}$$

essendo $m(y)$ una funzione continua, sempre maggiore di zero, tale che $|y|^{1+\alpha}\, m(y) \underset{|y| \to \infty}{\longrightarrow} \infty$;

e) $y f_y \geq 0$ in tutto il campo definito dalle disuguaglianze $a \leq x \leq b$, $|y| \geq l$, $-\infty < y' < +\infty$. Ciò posto dimostriamo che

fra tutte le funzioni $y = y(x)$, assolutamente continue nell'intervallo (a, b) e soddisfacenti alla condizione $y(a) = y(b)$, ve n'è almeno una che rende minimo l'integrale

$$J = \int_a^b f(x, y, y')\, dx,$$

che ha le sue due prime derivate finite e continue e che soddisfa alla equazione differenziale di Eulero e alla relazione $y'(a) = y'(b)$ [e quindi anche all'altra $y''(a) = y''(b)$].

Indichiamo con $\{y(x)\}$ l'insieme delle funzioni $y(x)$ di cui si parla nell'enunciato precedente, e con $\{y(x)\}_l$ quello delle funzioni di $\{y(x)\}$ che hanno almeno un valore compreso fra $-l$ e l (estremi inclusi). Siano i e i_l i limiti inferiori dell'integrale J rispettivamente in $\{y(x)\}$ e $\{y(x)\}_l$. Dico che è $i = i_l$. Sia, infatti, $y(x)$ una funzione di $\{y(x)\}$ non appartenente a $\{y(x)\}_l$. La $y(x)$ dovrà necessariamente soddisfare in tutto (a, b) alla disuguaglianza $y(x) > l$, oppure all'altra $y < -l$. Supponiamo, per fissare le idee, che sia soddisfatta la prima. Allora, detto m il minimo di $y(x)$ in (a,b), consideriamo la funzione definita dall'uguaglianza $\bar{y}(x) = y(x) - (m - l)$, la quale funzione, avendo il minimo uguale ad l, appartiene all'insieme $\{y(x)\}_l$. È

$$f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) = f(x, y(x) - (m - l), y'(x)),$$

e per la condizione *e*)

$$f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) \leq f(x, y(x), y'(x));$$

onde

$$\int_a^b f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))\, dx \leq \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx.$$

Questa disuguaglianza mostra che il limite inferiore i dell'integrale J in

$\{y(x)\}$ non può essere inferiore a quello i_l di J in $\{y(x)\}_l$. E poichè, d'altra parte, non può essergli inferiore, ne viene quanto avevamo asserito, $i = i_l$.

Dopo ciò, per i risultati del n. 33 della mia Memoria (T) citata, esiste in $\{y(x)\}_l$ una funzione $y_0(x)$, almeno, che rende minimo l'integrale J. E poichè, in seguito a quanto si è veduto or ora, $y_0(x)$ rende minimo J anche in $\{y(x)\}$, si può asserire (Cap. III della stessa Memoria) che $y_0(x)$ ha le sue due prime derivate finite e continue, e soddisfa all'equazione differenziale di Eulero. Per mostrare che è $y_0'(a) = y_0'(b)$, ricordiamo che $y_0(x)$ dà il minimo di J fra tutte le funzioni di $\{y(x)\}$, le quali, circa gli estremi dell'intervallo (a, b), sono sottoposte alla sola condizione $y(a) = y(b)$. La formula ai limiti, che dà la variazione di J relativa a $y_0(x)$, si riduce nel caso attuale a

$$(\delta J)_0 = f_{y'}(a, y_0(a), y_0'(a))\,(\delta y_0)_a, - f_{y'}(b, y_0(b) y_0'(b))\,(\delta y_0)_b,$$

e dovendo essere $(\delta J)_0 = 0$, $(\delta y_0)_a = (\delta y_0)_b$, risulta

$$f_{y'}(a, y_0(a), y_0'(a)) = f_{y'}(b, y_0(b), y_0'(b)) = f_{y'}(b, y_0(a), y_0'(b)),$$

ed anche per la condizione $a)$,

$$f_{y'}(a, y_0(a), y_0'(a)) = f_{y'}(a, y_0(a), y_0'(b)).$$

Questa uguaglianza mostra, in forza della condizione $b)$, che è $y_0'(a) = y_0'(b)$. La proposizione enunciata è dunque pienamente stabilita.

2. La condizione $d)$ del numero precedente si è posta solo per poter applicare i risultati di (T). Ora vogliamo osservare che quei risultati valgono anche se alla condizione detta se ne sostituisce un'altra un po' più generale e precisamente:

$d')$ se ad ogni numero positivo Y possono farsi corrispondere due numeri $\alpha(>0)$ e $M(>0)$, tali che, in tutto il campo (A'_Y) definito dalle disuguaglianze $a \leq x \leq b$, $|y| \leq Y$, $|y'| \geq M$, si abbia $f(x, y, y') > |y'|^{1+\alpha}$, e se, inoltre, fissato un qualsiasi Y, l'integrale J relativo ad una funzione assolutamente continua $y(x)$, avente almeno un valore minore in modulo di questo Y, tende a $+\infty$ col tendere all'infinito del massimo di $|y(x)|$.

Tale condizione risulta di certo verificata se si ha, p. es., $f(x, y, y') = \varphi(x, y') - \psi(x, y)$, con $\varphi(x, y') > c_1|y'|^{1+\alpha_1+\alpha_2}$, $\psi(x, y) < c_2|y|^{1+\alpha_1} + c_3$ $(c_1, c_2, c_3, \alpha_1, \alpha_2$, numeri $> 0)$. Ed invero, avendosi [ved. n. 8 di (T)]

$$\int_a^b |y'|^{1+\alpha_1+\alpha_2}\,dx \geq \frac{1}{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}\,(\overline{\overline{y}} - \overline{y})^{1+\alpha_1+\alpha_2},$$

dove $\overline{\overline{y}}, \overline{y}$ rappresentano, rispettivamente, il massimo e il minimo di $y(x)$ in (a, b), si ha

$$\int_a^b f(x, y, y')\, dx = \int_a^b \varphi(x, y')\, dx - \int_a^b \psi(x, y)\, dx >$$

$$> c_1 \int_a^b |y'|^{1+\alpha_1+\alpha_2}\, dx - \int_a^b \{c_2 |y|^{1+\alpha_1} + c_3\}\, dx >$$

$$> \frac{c_1}{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}} (\overline{\overline{y}} - \overline{y})^{1+\alpha_1+\alpha_2} - c_2(b-a)(\overline{\overline{y}} - \overline{y} + \mathrm{Y})^{1+\alpha_1} - c_3(b-a),$$

dovendosi supporre che un valore almeno di $y(x)$ sia, in modulo $< \mathrm{Y}$. Ora, se il massimo di $|y(x)|$ tende all'∞, tende all'∞ anche $\overline{\overline{y}} - \overline{y}$; e poichè è $\alpha_2 > 0$, l'integrale $\int_a^b f(x, y, y')dx$ supera anch'esso qualsiasi limite [1].

3. Sempre in merito alla condizione d), possiamo aggiungere che i risultati della Memoria (T) — eccettuati al più quelli relativi a campi limitati [2] e quegli altri concernenti i problemi isoperimetrici — restano ancora validi se la $f(x, y, y')$, invece di diventare infinita con $|y'| \to \infty$ di ordine $1 + \alpha > 1$ [come si è supposto in d) e in d')], lo diventa di ordine precisamente uguale a 1, purchè però si supponga sempre verificata la condizione c). Quest'ultima, poi, può in tutti i casi essere sostituita dall'altra, più generale,

$$\left| \frac{f_y - f_{y'x} - y' f_{y'y}}{f_{y'y'}} \right| < |y'|\, \mathrm{P}(y) \cdot f(x, y, y') + \mathrm{Q}(y),$$

ed anche dalla condizione che la derivata f_y diventi infinita, per $|y'| \to \infty$, di ordine non superiore a quello della f.

[1] Così la condizione d') è soddisfatta se si ha $f = y'^2 - y$, oppure $f = y'^4 - y^2$, per le quali non è invece soddisfatta la d). La d') è ancora verificata se è $f = y'^2 - cy^2$, con $c < \frac{\pi^2}{(b-a)^2}$: è infatti

$$\int_a^b \{y'^2 - cy^2\}\, dx = \left\{1 - c\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\right\} \int_a^b y'^2\, dx +$$

$$+ c\frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b \left\{y'^2 - \frac{\pi^2}{(b-a)^2} y^2\right\} dx \geq \left\{1 - c\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\right\} \int_a^b y'^2\, dx \geq$$

$$\geq \left\{1 - c\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\right\} \cdot \frac{1}{(b-a)^2} (\overline{\overline{y}} - \overline{y})^2,$$

essendo, anche qui, $\overline{\overline{y}}$ e $\overline{y}$ il massimo e il minimo di $y(x)$ in (a, b).

[2] Nei quali cioè la y non può variare liberamente da $-\infty$ a $+\infty$.

4. Supponiamo ora che, invece della condizione *e*) sia soddisfatta quest'altra:

e') esistono quattro numeri $l_1 < l_2 < l_3 < l_4$, tali che, nel campo definito dalle disuguaglianze $a \leq x \leq b$, $l_1 \leq y \leq l_2$, $-\infty < y' < +\infty$, sia $f_y < 0$ e in quello $a \leq x \leq b$, $l_3 \leq y \leq l_4$, $-\infty < y' < +\infty$, $f_y > 0$; inoltre, nei due campi detti la $f(x, y, y')$, come funzione di y', abbia un minimo assoluto per $y' = 0$ (¹).

Siano poi verificate le condizioni *a*), *b*), *c*), *d*) del n. 1, per tutti i valori di x e y' ivi considerati, e per quelli di y compresi fra l_2 e l_3 (estremi inclusi) Dico che, *limitandosi alle funzioni* $y(x)$ *assolutamente continue in* (a, b) *e tali che sia* $y(a) = y(b)$ *e* $l_1 \leq y(x) \leq l_4$, *vale anche qui il teorema analogo a quello del n. 1.* Ed invero, analogamente a quanto si è fatto al n. 4, si può, ad ogni funzione $y(x)$ di cui si parla, sostituirne sempre un'altra $\bar{y}(x)$ soddisfacente alla nuova condizione di verificare, in tutto (a, b), la disuguaglianza $l_2 \leq \bar{y}(x) \leq l_3$. Se la $y(x)$ soddisfa già da sè a questa nuova condizione, non vi sarà che da porre $\bar{y}(x) \equiv y(x)$; in caso contrario, detto $\bar{x}$ un valore di (a, b) in cui è $y(x) > l_3$, si consideri il massimo intervallo di (a, b) che lo contiene e in cui è sempre $y(x) \geq l_3$, e si definisca in questo intervallo (e così in tutti gli analoghi) la $\bar{y}(x)$ ponendola uguale a l_3. Analogamente si proceda per quei punti in cui è $y(x) < l_2$. Nei punti rimanenti si porrà infine $\bar{y}(x) = y(x)$. La nuova funzione $\bar{y}(x)$ appartiene alla classe di quelle del nostro enunciato; di più dà all'integrale J un valore di certo non superiore a quello relativo a $y(x)$, come risulta chiaramente dalla condizione *e'*). Dopo ciò non vi è che da ripetere il ragionamento fatto al n. 1 (²).

6. Poniamoci di nuovo nelle condizioni del n. 1 (³), escludendo l'ipotesi *e*), e aggiungendo invece quest'altra: esistono due numeri h e k, il secondo dei quali sia > 0, in modo da aversi, in tutto il campo (A),

$$(1) \qquad f(x, y, y') = k f(a + b - x \,,\, 2h - y \,,\, y').$$

Allora, *fra tutte le funzioni* $y(x)$ *assolutamente continue che verificano la condizione* $y(a) = y\left(\frac{a+b}{2}\right) = y(b) = h$, *ve n'è almeno una che rende*

(¹) Per es., la funzione $f = y'^2 + y^3 - y^2$ soddisfa alla nuova condizione *e'*), ma non alla *e*).

(²) In luogo della condizione *e*), può considerarsi anche la seguente: per ogni y maggiore in modulo di un certo Y, è $f(x, y, y') > |y|^\beta$, con $\beta > 0$, e ciò qualunque sia la x di (a, b) e la y' di $(-\infty, +\infty)$. Con questa condizione il teorema del n. 1 resta ancora vero.

(³) Naturalmente all'ipotesi *d*) può sempre sostituirsi la *d'*); e si possono anche tenere presenti le osservazioni del n. 3.

minimo l'integrale J, *che ha le due prime derivate finite e continue e che soddisfa all'equazione differenziale di Eulero e alla uguaglianza* $y'(a) = y'(b)$.

Per quanto è stabilito nella mia Memoria (T), esiste almeno una funzione $y_0(x)$, avente le due prime derivate continue e soddisfacente, in $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$, all'equazione differenziale di Eulero, la quale inoltre verifica l'uguaglianza $y_0(a) = y_0\left(\frac{a+b}{2}\right) = h$ e rende minimo l'integrale

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x, y, y')\, dx$$

fra tutte le funzioni assolutamente continue che assumono in a e $\frac{a+b}{2}$ lo stesso valore h. Completiamo la $y_0(x)$ in $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ mediante l'uguaglianza

$$y_0(x) = 2h - y_0(a + b - x). \tag{2}$$

La $y_0(x)$ risulta allora continua in tutto (a, b), insieme con le sue due prime derivate, e verifica le uguaglianze

$$y_0(a) = y_0\left(\frac{a+b}{2}\right) = y_0(b) = h \quad , \quad y_0'(a) = y_0'(b).$$

Inoltre essa soddisfa, in tutto (a, b), all'equazione differenziale di Eulero, come si vede subito fondandosi sulla (1) e sulla (2) e sul fatto che tale equazione è soddisfatta dalla $y_0(x)$ nel tratto $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$. Risulta poi immediatamente che la $y_0(x)$ dà il minimo richiesto.

6. Si supponga la funzione $f(x, y, y')$ definita non solo per i valori di x dell'intervallo (a, b), ma per tutti i valori reali da $-\infty$ a $+\infty$, e sempre finita e continua, insieme con le sue derivate parziali dei primi due ordini, e soddisfacente alla uguaglianza

$$f(x + b - a, y, y') = f(x, y, y').$$

Ferme restando le condizioni poste al n. 1, dal teorema ivi stabilito si deduce *l'esistenza di almeno una funzione* $y_0(x)$: 1°) *sempre finita e continua, insieme con le sue due prime derivate*; 2°) *soddisfacente ovunque all'equazione di Eulero*; 3°) *verificante, per ogni* x, *l'uguaglianza*

$$y_0(x + b - a) = y_0(x)$$

e quindi anche le altre due

$$y_0'(x+b-a)=y_0'(x)\ ,\ y_0''(x+b-a)=y_0''(x)\ ;$$

4°) *rendente minimo l'integrale* $J=\int_a^b f(x,y,y')\,dx$ *fra tutte le funzioni assolutamente continue che soddisfano alla relazione* $y(x+b-a)=y(x)$.

E un teorema analogo si deduce da quello del n. 4.

È bene osservare che, qualunque sia δ, la funzione $y_0(x)$, per la sua periodicità, dà il minimo anche dell'integrale $\int_{a+\delta}^{b+\delta} f(x,y,y')\,dx$, relativamente alla stessa classe di funzioni sopra considerate. Questa osservazione permette di dimostrare direttamente il teorema sopra enunciato, e l'analogo dedotto da quello del n. 4, senza far uso della formula ai limiti adoperata al n. 1. Ed invero, una volta stabilita l'esistenza di una funzione *minimum*, soddisfacente alla condizione $y(a)=y(b)$ ed avente in (a,b) le derivate prima e seconda finite e continue, l'osservazione precedente mostra senz'altro la validità delle due uguaglianze $y'(a)=y'(b)$ e $y''(a)=y''(b)$.

7. Anche dal teorema del n. 5, aggiungendo l'ipotesi fatta sulla f al principio del numero precedente, si deduce una proposizione d'esistenza per le soluzioni periodiche.

8. Infine, si possono ottenere dei teoremi d'esistenza per le soluzioni periodiche, analoghi a quelli stabiliti nelle mie Note *Sulle orbite periodiche* (¹).

Matematica. — *Gli autovalori e le autofunzioni dei nuclei simmetrici.* Nota I di Attilio Vergerio, presentata dal Socio T. Levi-Civita (²).

1. Il prof. G. Fubini, nella sua Memoria intitolata: *Equazioni integrali e valori eccezionali* (³), espone un metodo per la ricerca degli autovalori e delle corrispondenti autofunzioni di un nucleo simmetrico. Tale metodo però, se dal punto di vista teorico è molto semplice, da quello pratico, invece, presenta delle difficoltà, basandosi esso essenzialmente sulla conoscenza dei limiti superiore ed inferiore di un certo integrale.

Qui esponiamo un nuovo metodo, il quale, pur avendo con quello del prof. Fubini qualche punto di contatto, ha su questo il vantaggio di una maggior portata pratica.

(¹) Questi Rendiconti, 1912, pag. 251 e 332, 1° semestre.

(²) Pervenuta all'Accademia il 24 settembre 1915.

(³) Annali di Matematica; tomo XVII della serie III, pag. 111 e seg.

2. È necessario premettere alcune considerazioni.

Sia $K(st)$ una funzione simmetrica delle variabili s e t, che supporremo essere finita e continua; pur non escludendo che possa presentare delle discontinuità tali, però, da non infirmare i risultati dello Schmidt ([1]).

Indicheremo con $H(st)$ il $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{K_{2n}(st)}{\gamma^n}$, dove $\gamma = \lim\limits_{n=\infty} \gamma_n$ e $\gamma_n = \dfrac{U_{2n+2}}{U_{2n}}$; limite che, com'è noto ([2]), è una funzione continua positiva e non identicamente nulla. Analogamente con $H_1(st)$ il $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{K_{2n+1}(st)}{\gamma^n}$, il quale pure esiste finito e non identicamente nullo ([3]).

Supposto che λ_ν sia un autovalore di $K(st)$ e $\varphi_\nu(s)$ una sua corrispondente autofunzione, si moltiplichino successivamente i membri della seguente uguaglianza

$$\varphi_\nu(r) = \lambda_\nu \int_a^b K(rt)\, \varphi_\nu(t)\, dt$$

per $K(sr)dr$, e si integri da a a b. Dopo $2n$ integrazioni, s'otterrà

$$\frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu^{2n}} = \lambda_\nu \int_a^b K_{2n+1}(st)\, \varphi_\nu(t) dt ;$$

ed ancora, dividendo ambo i membri per γ^n e passando al limite per $n = \infty$,

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi_\nu(s)}{(\lambda_\nu^2 \gamma)^n} = \lambda_\nu \int_a^b H_1(st)\, \varphi_\nu(t)\, dt .$$

Ora, se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ indicano gli autovalori di $K(st)$, disposti in ordine crescente rispetto al loro valore assoluto, è noto ([4]) che sussistono le relazioni

$$\lim_{n=\infty} (\lambda_\nu^2 \gamma)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } \nu = 1 \\ \infty & \text{se } \nu > 1 \end{cases} ;$$

([1]) *Entwicklung willkürlicher functionen nach Systemen vorgeschriebener.* Inaugural Dissertation. Göttingen, 1905.

([2]) Schmidt, loc. cit., § 11.

([3]) Si ha infatti

$$H(st) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\gamma} \int_a^b K(sr) \frac{K_{2n+1}(rt)}{\gamma^n} dr = \frac{1}{\gamma} \int_a^b K(sr)\, H_1(rt)\, dr = \frac{1}{\gamma} \int_a^b H_1(sr)\, K(rt)\, dr$$

quindi, se $H_1(st)$ fosse identicamente nulla in s ed in t, tale dovrebbe pure essere anche $H(st)$; il che non è possibile.

([4]) Si sa infatti che $\left| \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}} \right|$ è il minimo valore assoluto delle λ_ν.

sarà quindi

$$(1) \qquad \lambda_\nu \int_a^b H_1(st)\, \varphi_\nu(t)\, dt = \begin{cases} \varphi_\nu(s) & \text{se } \nu = 1 \\ 0 & \text{se } \nu > 1 \end{cases} \text{ [1].}$$

Il nucleo $H_1(st)$ non potrà perciò ammettere autovalori diversi da $\pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, e di fronte a questi si comporterà come $K(st)$; inoltre i nuclei $H_1(st)$ e $K(st)$, per tali autovalori ammetteranno le stesse autofunzioni.

Dalle (1) infatti, risulta senz'altro che ogni autofunzione di $K(st)$, corrispondente ad uno degli autovalori $\pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, lo è anche di $H_1(st)$. Per dimostrare la proprietà inversa, basterà osservare che, se $\psi(s)$ è una autofunzione di $H_1(st)$, cioè se

$$(2) \qquad \psi(s) = \lambda_1 \int_a^b H_1(st)\, \psi(t)\, dt\,,$$

sarà

$$\psi(s) = \lambda_1 \int_a^b K(sr)\, dr \int_a^b H(rt)\, \psi(t)\, dt\,;$$

e poichè

$$\int_a^b H(rt)\, \psi(t)\, dt = \psi(r)\,,$$

come si vede subito moltiplicando i membri della (2) per $H(rs)\,ds$ ed integrando, sarà pure

$$\psi(s) = \lambda_1 \int_a^b K(st)\, \psi(t)\, dt\,.$$

Dalle (1) risulta ancora che le autofunzioni di $K(st)$ corrispondenti agli autovalori λ_ν $(\nu > 1)$, sono invece soluzioni dell'equazione

$$\int_a^b H_1(st)\, \theta(t)\, dt = 0\,.$$

3. Noteremo ancora che se $\varphi_1'^{(r)}(s)$ e $\varphi_1''^{(r)}(s)$ rappresentano rispettivamente le p_1 e p_2 autofunzioni linearmente indipendenti normalizzate del nucleo $K(st)$, corrispondenti agli autovalori $\lambda_1' = +\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ e $\lambda_1'' = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, la $H_1(st)$ può mettersi sotto la forma [2]

$$(3) \qquad H_1(st) = \sum_{r=1}^{p_1} \frac{\varphi'^{(r)}(s)\, \varphi'^{(r)}(t)}{\lambda_1'} + \sum_{r=1}^{p_2} \frac{\varphi''^{(r)}(s)\, \varphi''^{(r)}(t)}{\lambda_1''}\,.$$

[1] Qui, per comodità, a λ_1 attribuiamo ambedue i valori $\pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$.

[2] Schmidt, loc. cit., § 8.

Posto ora

$$\int_a^b H_1(ss)\, ds = \lim_{n=\infty} \int_a^b \frac{K_{2n+1}(ss)}{\gamma^n}\, ds = \lim_{n=\infty} \frac{U_{2n+1}}{\gamma^n} = U' \ (^1),$$

dalla (3) si deduce intanto, ponendo $t = s$ ed integrando.

$$(4) \qquad \frac{U'}{\sqrt{\gamma}} = p_1 - p_2 .$$

Nella (3) si muti s in r e si integri, dopo averne moltiplicati i membri per $H_1(sr)\, dr$. Essendo

$$\int_a^b H_1(sr)\, H_1(rt)\, dr = \lim_{n=\infty} \int_a^b \frac{K_{2n+1}(sr)}{\gamma^n} \frac{K_{2n+1}(rt)}{\gamma^n}\, dr =$$

$$= \lim_{n=\infty} \gamma \frac{K_{4n+2}}{\gamma^{2n+1}} = \gamma H(st) ,$$

avremo, ricordando che $\lambda_1'^2 \gamma = \lambda_1''^2 \gamma = 1$,

$$H(st) = \sum_{r=1}^{p_1} \varphi'^{(r)}(s)\, \varphi'^{(r)}(t) + \sum_{r=1}^{p_2} \varphi''^{(r)}(s)\, \varphi''^{(r)}(t) .$$

E poichè [2]

$$\int_a^b H(ss)\, ds = \lim_{n=\infty} \int_a^b \frac{K_{2n}(ss)}{\gamma^n}\, ds = \lim_{n=\infty} \frac{U_{2n}}{\gamma^n} = U \geq 1 ,$$

avremo infine, mediante integrazione da a a b, dopo aver posto $t = s$,

$$(5) \qquad U = p_1 + p_2 .$$

Dalle (4) e (5) si ricavano per p_1 e p_2 i seguenti valori

$$(6) \qquad p_1 = \frac{1}{2}\left(U + \frac{U'}{\sqrt{\gamma}}\right) \quad ; \quad p_2 = \frac{1}{2}\left(U - \frac{U'}{\sqrt{\gamma}}\right) .$$

Nel caso poi che $K(st)$ ammetta uno soltanto dei due valori $\pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$

(1) U' è una quantità finita. Infatti dall'uguaglianza $H_1(st) = \int_a^b K(sr)\, H(rt)\, dr$, facendo $t = s$ ed integrando, si ha l'altra: $U' = \int_b^b \int_a^b K(sr)\, H(sr)\, dr\, ds$; da cui, per la disuguaglianza dello Schwarz, si deduce

$$U'^2 \leq U_2 \cdot \int_a^b \int_a^b [H(sr)]^2\, ds\, dr .$$

(2) Schmidt, loc. cit., § 11.

come autovalore, uno dei due numeri p_1 e p_2 sarà nullo; dovrà quindi, sussistere una delle due seguenti uguaglianze

$$U \pm \frac{U'}{\sqrt{\gamma}} = 0 ;$$

le quali ci forniscono un criterio per riconoscere *a priori* quale dei due valori $\pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ è ammesso dal nucleo $K(st)$ come autovalore.

4. Ciò posto, si consideri la funzione simmetrica

$$F^{(2)}(st) = K(st) - H_1(st) ,$$

la quale, come ora dimostreremo, ha gli stessi autovalori e le stesse autofunzioni di $K(st)$, eccettuato il solo autovalore $|\lambda_1| = \left|\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right|$ e le corrispondenti autofunzioni.

Invero, se λ_ν è un autovalore di $K(st)$ e $\varphi_\nu(s)$ una sua corrispondente funzione, sarà

$$\lambda_\nu \int_a^b F^{(2)}(st)\, \varphi_\nu(t)\, dt = \lambda_\nu \int_a^b K(st)\, \varphi_\nu(t)\, dt - \lambda_\nu \int_a^b H_1(st)\, \varphi_\nu(t)\, dt ;$$

e poichè

$$\lambda_\nu \int_a^b H_1(st)\, \varphi_\nu(t)\, dt = \begin{cases} \varphi_\nu(t) & \text{se} \quad \nu = 1 \\ 0 & \text{se} \quad \nu > 1 \end{cases} ,$$

avremo, se $\nu = 1$,

$$\lambda_1 \int_a^b F^{(2)}(st)\, \varphi_1(t)\, dt = 0 \tag{7}$$

per ogni autofunzione $\varphi_1(s)$ corrispondente all'autovalore λ_1;
e se $\nu > 1$,

$$\lambda_\nu \int_a^b F^{(2)}(st)\, \varphi_\nu(t)\, dt = \lambda_\nu \int_a^b K(st)\, \varphi_\nu(t)\, dt = \varphi_\nu(t) .$$

Quindi tra gli autovalori e le autofunzioni di $F^{(2)}(st)$, figureranno gli stessi valori λ_ν e le stesse $\varphi_\nu(s)$ $(\nu > 1)$.

Inversamente, se λ è un autovalore di $F^{(2)}(st)$ e $\psi(s)$ una sua corrispondente autofunzione, sarà

$$\lambda \int_a^b F^{(2)}(st)\, \psi(t)\, dt = \lambda \int_a^b K(st)\, \psi(t)\, dt - \lambda \int_a^b H_1(st)\, \psi(t)\, dt = \psi(s) .$$

E poichè, moltiplicando il primo e l'ultimo membro per $\varphi_1(s)\,ds$ ed integrando, si ottiene, per la (7),

$$\int_a^b \varphi_1(s)\,\psi(s)\,ds = 0\,,$$

sarà anche

$$\int_a^b \mathrm{H}_1(st)\,\psi(t)\,dt = 0\;;$$

a quindi

$$\lambda \int_a^b \mathrm{K}(st)\,\psi(t)\,dt = \psi(s)\;;$$

il che prova che λ e $\psi(s)$ sono anche rispettivamente un autovalore ed una autofunzione di $\mathrm{K}(st)$.

Rimandiamo il seguito ad un'altra Nota.

Matematica. — *Sulle superficie di 6° ordine contenenti infinite coniche.* Nota II di EUGENIO G. TOGLIATTI, presentata dal Socio C. SEGRE [1].

Nella Nota presente, sèguito di quella pubblicata a pag.   di questi Rendiconti, enumero i tipi di F^6 irriducibili luoghi di coniche che ho trovato seguendo la via indicata nella Nota anzidetta. Essi son divisi in gruppi a seconda del genere p (variabile da 0 a 4) del fascio di coniche T che si considera sulla F^6; ciascun gruppo è diviso in sottogruppi, anzitutto, a seconda del genere π della sezione piana generica, ed ulteriormente prendendo di mira i caratteri proiettivi della sviluppabile formata dai piani delle coniche, e talora anche quelli della linea multipla della F^6. In alcune parti la classificazione è spinta molto innanzi; altrove (specialmente per superficie razionali) è solo iniziata. Per molte delle superficie trovate è riportata l'equazione in un sistema di coordinate omogenee x_0, x_1, x_2, x_3, la quale permette di verificare facilmente l'esistenza sulla superficie delle singolarità descritte; per altre, è data solo una costruzione geometrica che ne renda evidente l'esistenza. Si ricordi infine che, salvo esplicito avviso contrario, si tratta sempre di superficie normali in S_3.

1. — F^6 con un fascio di coniche di genere 4.

Esistono sulla F^6 due punti tripli uniplanari A, B, a ciascuno dei quali è successiva una retta tripla infinitesima; le coniche stanno a terne

[1] Pervenuta all'Accademia il 20 settembre 1915.

nei piani passanti per la retta AB, e coniche complanari si toccano in A ed in B. Non vi sono linee multiple, onde le sezioni piane generiche sono di genere 10. L'equazione della F^6 si può scrivere:

$$x_2^3 x_3^3 + x_2^2 x_3^2 \varphi_2(x_0, x_1) + x_2 x_3 \varphi_4(x_0, x_1) + \varphi_6(x_0, x_1) = 0,$$

dove $\varphi_2, \varphi_4, \varphi_6$ son forme delle variabili indicate dei gradi espressi dai loro indici (1). Come caso speciale i punti A, B possono anche coincidere.

2. — F^6 con un fascio di coniche di genere 3.

Si possono ripartire in tre gruppi a seconda del genere π delle sezioni piane generiche.

$\pi = 9$. — Le coniche stanno a coppie nei piani passanti per una retta r, doppia per F, contenente due punti quadrupli triplanari A, B: il cono tangente ad F in A (ad es.) si spezza in due piani per r, ed in un terzo piano (da contar 2 volte), che contiene nell'intorno di A una retta doppia infinitesima di F, e che è toccato in A da tutte le coniche del fascio. L'equazione di F è:

$$x_2^2 x_3^2 \varphi_2(x_0, x_1) + x_2 x_3 \varphi_4(x_0, x_1) + \varphi_6(x_0, x_1) = 0.$$

Come caso speciale i punti A, B possono coincidere.

$\pi = 8$. — 1°) F ha una conica doppia contenente due punti tripli uniplanari A, B, ciascuno dei quali ha nel suo intorno una retta tripla infinitesima. Le coniche stanno a terne nei piani per la retta AB; coniche complanari si toccano in A ed in B. L'equazione di F è:

$$x_0^2 \varphi_4(x_0, x_1) + x_0 Q \varphi_3(x_0, x_1) + Q^2 \varphi_2(x_0, x_1) + Q^3 = 0,$$

dove Q è una quadrica (2). La conica doppia può spezzarsi, i punti A, B possono coincidere: si hanno così in tutto 4 casi particolari.

2°) Le coniche stanno a coppie nei piani passanti per una retta r, che esse incontrano nei due medesimi punti A, B. La retta r è doppia tacnodale, e lungo essa vi è un piano tangente fisso σ; i punti A, B sono quadrupli biplanari: il cono tangente ad F in A (o in B) si compone di σ contato due volte, e di un altro piano (pure contato due volte) che contiene nell'intorno di A una retta doppia infinitesima di F, la cui equazione è:

$$\varphi_6(x_0, x_1) + Q \cdot \varphi_4(x_0, x_1) + x_1^2 Q^2 = 0.$$

I punti A, B possono coincidere.

(1) Simili spiegazioni sono in seguito sottintese.

(2) Idem, ibid.

$\pi = 7$. — L'equazione di F è ora la seguente:

$$x_1^2 \varphi_4(x_0, x_1) + x_1^2(x_3^2 + x_1 x_2) \varphi_2(x_0, x_1) +$$
$$+ x_1(x_3^2 + x_1, x_2)^2 \varphi_1(x_0, x_1) + (x_3^2 + x_1, x_2)^3 = 0;$$

essa mostra che le coniche stanno a terne nei piani passanti per una retta r, che esse toccano in un punto fisso A, triplo per F. Esiste poi una retta doppia oscnodale s, uscente da A (e distinta da r), lungo la quale rs è piano tangente fisso.

3. — F^6 con un fascio di coniche di genere 2.

Il genere π delle sezioni piane generiche può essere 7, 6, 5.

$\pi = 7$. — F ha una conica doppia, una retta doppia e su questa due punti quadrupli A, B; le sue coniche stanno a coppie nei piani per la retta AB, e passano per A, B. Equazione:

$$x_3^2 \varphi_4(x_0, x_1) + x_3 Q \varphi_3(x_0, x_1) + Q^2 \varphi_2(x_0, x_1) = 0.$$

I punti A, B possono coincidere; la conica doppia (irriducibile o spezzata) può anche stare in un piano passante per r: si hanno quindi molti casi speciali.

La conica doppia può anche degenerare in due rette doppie consecutive alla r: F ha allora una retta doppia oscnodale col piano tangente o variabile da punto a punto, oppure fisso, ed in quest'ultimo caso esistono ancora su r i punti quadrupli A, B (distinti o no). L'equazione di F è nei due casi:

$$\varphi_6(x_0, x_1) + (x_0 P + x_1 Q) \varphi_3(x_0, x_1) + (x_0 P + x_1 Q)^2 = 0,$$
$$\varphi_6(x_0, x_1) + x_1 Q \varphi_3(x_0, x_1) + x_1^2 Q^2 = 0.$$

$\pi = 6$. — 1°) Le coniche stanno a terne nei piani per una retta r, che esse incontrano in due punti fissi A, B. Vi sono due coniche doppie passanti per A, B, che sono punti tripli uniplanari, ognuno dei quali ha nel suo intorno una retta tripla infinitesima. L'equazione di F è:

$$x_0^2 x_1^2 \varphi_2(x_0, x_1) + x_0 x_1 Q \psi_2(x_0, x_1) + Q^2 \theta_2(x_0, x_1) + Q^3 = 0.$$

Si hanno 10 casi speciali secondochè i punti tripli A, B son distinti o no, e le coniche doppie sono irriducibili o spezzate, distinte o coincidenti in una conica doppia tacnodale.

2°) Le coniche stanno a coppie nei piani passanti per una retta r, doppia per F, che esse toccano in un punto fisso A, quadruplo per F, al quale è successivo (nella direzione r) un altro punto quadruplo. Si hanno

poi altre tre rette doppie, concorrenti in un punto, una delle quali incidente ad r in A; esse possono non esser tutte distinte. L'equazione di F è:

$$x_0^2 x_2^2 \varphi_2(x_0, x_1)) + x_2 x_3(x_3 + h x_0) \varphi_3(x_0, x_1) + \\ + x_3^2(x_3 + h x_0)^2 \psi_2(x^0, x_1) = 0.$$

Può darsi anche che r sia una retta doppia tacnodale a piano tangente fisso, contenente due punti quadrupli A, B (distinti o no), comuni a tutte le coniche di F; ed allora F, di equazione:

$$x_0^2 \varphi_4(x_0, x_1) + x_0 Q \varphi_3(x_0, x_1) + x_1^2 Q^2 = 0,$$

ha inoltre una conica doppia, passante per A e B, irriducibile o no, che può anche ridursi a due rette doppie consecutive alle prime due.

$\pi = 5$. — 1°) Le coniche stanno a terne nei piani per una retta r, su cui F ha due punti tripli consecutivi A = B, comuni a tutte le coniche. La linea doppia si compone d'una retta doppia oscnodale uscente da A, e d'una conica doppia passante per A, B, che può anche ridursi a due rette doppie consecutive alle prime tre. Equazione:

$$x_0^2 x_1^2(a_0 x_0^2 + a_1 x_0 x_1 + a_2 x_1^2) + x_0 x_1(x_3^2 + x_0 x_2)(b_0 x_0^2 + b_1 x_0 x_1 + b_2 x_1^2) + \\ + (x_3^2 + x_0 x_2)^2 \left(c_0 x_0^2 + c_1 x_0 x_1 + \frac{b_2^2}{4a_2}\right) + (x_3^2 + x_0 x_2)^3 = 0.$$

2°) Le coniche stanno a coppie nei piani per una retta r, doppia per F, che esse toccano in un punto fisso A. Esistono poi dne rette doppie d, d_1, uscenti da A, ed una retta doppia tacnodale incidente alle d, d_1, lungo la quale si ha un piano tangente fisso. L'equazione di F è:

$$x_0^2 x_1^2 x_2^2 + x_2 x_3^2 \varphi_3(x_0, x_1) + x_3^4 \varphi_2(x_0, x_1) = 0.$$

Le rette d, d_1 possono coincidere in una retta doppia tacnodale a piano tangente fisso.

Geometria. — *Le varietà algebriche con indice di singolarità massimo.* Nota II di GAETANO SCORZA (*), presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO (**).

4. Imporre a un complesso lineare di Σ la condizione di avere un punto singolare in un punto assegnato, cioè di avere per asse uno spazio di dimensione ≥ 1 passante per questo punto, equivale ad imporgli $2p-1$ condizioni lineari indipendenti; quindi, in corrispondenza agli ∞^{2p-1} punti di Σ:

L'ipersuperficie F *contiene* ∞^{2p-1} *spazî lineari aventi ciascuno la dimensione*

$$p(2p-1)-1-(2p-1)=p(2p-3).$$

È utile, per quel che segue, precisare questo risultato, ponendosi alla determinazione di tutti gli spazî lineari di F aventi la massima dimensione possibile.

Perchè i complessi di un fascio di complessi lineari di Σ siano tutti singolari, occorre e basta che essi abbiano almeno un punto singolare comune ([14]);

(*) La numerazione degli articoli o delle note è fatta in continuazione di quella della Nota I.

(**) Pervenuta all'Accademia il 17 settembre 1915.

([14]) Siano

$$\sum_{r,s}^{1\cdots 2p} a_{r,s}\, x_r\, y_s = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{r,s}^{1\cdots 2p} a'_{r,s}\, x_r\, y_s = 0 \qquad (a_{r,s}+a_{s,r}=0\ ;\ a'_{r,s}+a'_{s,r}=0)$$

le equazioni di due complessi lineari di Σ dotati ciascuno di un S_{2l-1} asse: e supponiamo che i loro due assi siano indipendenti, per modo che sarà $2l \leq p$.

Senza venir meno alla generalità possiamo supporre che l'asse del primo sia lo spazio rappresentato dalle equazioni:

$$x_{2l+1}=x_{2l+2}=\cdots=x_{2p}=0$$

e l'asse del secondo quello rappresentato dalle equazioni:

$$x_1=x_2=\cdots=x_{2l}=x_{4l+1}=x_{4l+2}=\cdots x_{2p}=0$$

Ciò val quanto dire che nell'equazione del primo complesso sono nulle tutte le a_{rs} per cui uno qualunque dei due indici è un numero della successione

$$1\,,2\,,\ldots,2l\,,$$

quindi gli spazî lineari di dimensione massima contenuti nell'ipersuperficie F si otterranno considerando in Σ i sistemi lineari di dimensione massima di complessi dotati genericamente di retta-asse e le cui rette-assi si taglino a due a due.

Ma se più rette si tagliano a due a due o stanno in un piano o passano per uno stesso punto, dunque:

In ogni caso gli spazî lineari di dimensione massima di F *hanno la dimensione* $p(2p-3)$; *però se* $p > 2$ *codesti* $S_{p(2p-3)}$ *di* F *costituiscono un unico sistema continuo* ∞^{2p-1}, *rispecchiantesi nel modo chiarito più sopra sugli* ∞^{2p-1} *punti di* Σ, *mentre se* $p=2$ *codesti spazî di* F (*che sono adesso degli* S_2) *si distribuiscono* (*come è ben noto, una volta che per* $p=2$ F *è una quadrica*) *in due sistemi continui* ∞^3 *rispecchiantisi l'uno, al solito modo sugli* ∞^3 *punti di* Σ, *l'altro sulle* ∞^3 *reti di complessi lineari speciali di* Σ *aventi per assi le rette dei singoli piani di* Σ.

Se un punto di Σ è razionale, è evidentemente razionale l' $S_{p(2p-3)}$ di S situato su F, che ad esso corrisponde; e se un $S_{p(2p-3)}$ di F è razionale,

---

e che nell'equazione del secondo complesso sono nulle tutte le $a'_{r,s}$ per cui uno qualunque dei due indici è un numero della successione

$$2l+1\,,\,2l+2\,,\ldots,\,4l\,.$$

Poichè l'asse di un complesso è il *luogo* dei suoi punti singolari, nessuno dei due complessi dati ha punti singolari esterni al proprio asse; e quindi, in virtù dell'ipotesi fatta, ciascuno dei due complessi induce sull'asse dell'altro un sistema nullo non singolare. Queste due osservazioni portano, in particolare, che i determinanti

$$\varDelta=\begin{vmatrix} 0 & a_{2l+1,2l+2} & \ldots & a_{2l+1,2p} \\ a_{2l+2,2l+1} & 0 & \ldots & a_{2l+2,2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2p,2l+1} & a_{2p,2l+2} & \ldots & 0 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \varDelta'=\begin{vmatrix} 0 & a'_{1,2} & \ldots & a'_{1,2l} \\ a'_{2,1} & 0 & \ldots & a'_{2,2l} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{2l,1} & a'_{2l,2} & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

sono entrambi diversi da zero.

Se i complessi del fascio determinato dai due complessi dati fossero tutti singolari l'equazione in $\frac{\lambda}{\mu}$ che si ottiene ponendo uguale a zero il determinante $|\lambda a_{r,s}+\mu a'_{r,s}|$ dovrebbe essere un'identità. Ma ciò è impossibile perchè, divisi per μ gli elementi delle prime $2l$ righe e fatto poi $\lambda=1$ e $\mu=0$, questo determinante si riduce al prodotto

$$\varDelta\,\varDelta',$$

dunque è assurdo supporre che i nostri due complessi generino un fascio di complessi tutti singolari; e ciò basta a dimostrare l'affermazione del testo quando si rifletta che, se i complessi di un fascio sono tutti singolari, l'asse del complesso generico ha una dimensione fissa.

Del resto la cosa stessa può dedursi da teoremi del sig. Palatini contenuti nella sua Nota: *Sui complessi lineari di rette negli iperspazi* (Giornale di Matematiche di Battaglini, vol. XLI, 1903, pp. 85-96).

tale è pure il corrispondente punto o piano di Σ, poichè in tal caso l'$S_{p(2p-3)}$ considerato contiene $p(2p-3)+1$ punti razionali indipendenti a cui rispondono in Σ altrettanti complessi singolari razionali, e gli assi (razionali) di questi complessi determinano il punto o il piano rispondente a quell'$S_{p(2p-3)}$. Quindi possiamo dire che:

L'ipersuperficie F *contiene infiniti spazî razionali della dimensione* $p(2p-3)$. *Se* $p>2$ *tali spazî razionali costituiscono un unico insieme riflettentesi sull'insieme dei punti razionali di* Σ; *se* $p=2$ *essi possono distribuirsi in due insiemi dei quali uno si rispecchia sull'insieme dei punti razionali di* Σ, *e l'altro sull'insieme dei piani razionali di* Σ.

5. Adesso supponiamo che V_p sia k volte singolare.

Poichè ogni relazione di Riemann di V_p dà luogo ad un *sistema nullo di* V_p ([15]), e quindi a un complesso razionale di A, possiamo dire che:

Se V_p *è* k *volte singolare, lo spazio* Σ' *contiene* $k+1$ *punti razionali indipendenti e non più.*

Chiamiamo μ l'S_k razionale contenente tutti i punti razionali di Σ'.

Poichè l'esistenza di un sistema regolare di integrali semplici di prima specie riducibili di V_p dà luogo all'esistenza di un sistema nullo (almeno) di V_p avente per asse l'asse del sistema, e poichè inversamente ad ogni sistema nullo singolare di V_p risponde *un* sistema regolare di integrali riducibili avente per asse l'asse del sistema ([16]), possiamo dire che:

La varietà V_p *ammette sistemi regolari* ∞^{q-1} *di integrali riducibili quando e solo quando* μ *contenga punti razionali appartenenti ad* $F^{(q)}$, *ma non ad* $F^{(q+1)}$ *se* $q<p-1$.

La corrispondenza, ora considerata, fra i sistemi regolari ∞^{q-1} di V_p e i sistemi nulli singolari di V_p dotati di un S_{2q-1} asse è biunivoca certamente se $q=p-1$, poichè un sistema nullo singolare di specie $2(p-1)$ in un S_{2p-1} è individuato dal suo asse, dunque:

Tanti sono i sistemi regolari ∞^{p-2} *di integrali riducibili di* V_p, *quanti sono i punti razionali di* μ *appartenenti ad* $F^{(p-1)}$.

6. Se lo spazio μ ha una dimensione $k \geq 2p-1$, ogni $S_{p(2p-3)}$ razionale di F taglia μ in uno spazio razionale S_t appartenente ad $F^{(1)}$ per la cui dimensione t si ha:

$$t \geq k+p(2p-3)-p(2p-1)+1 \geq 2p-1+ \\ +p(2p-3)-p(2p-1)+1=0\,;$$

dunque $F^{(1)}$ contiene intanto infiniti punti razionali. D'altro canto è facile persuadersi che gli infiniti punti razionali di $F^{(1)}$ a cui dànno luogo gli infiniti $S_{p(2p-3)}$ razionali di F riflettentisi sui punti razionali di Σ, non

([15]) Loc. cit. [3]), Nota II, n. 10.
([16]) Loc. cit. [3]), Nota II, n. 19.

possono rispondere che a infiniti sistemi regolari distinti di integrali riducibili di V_p, quindi:

Una varietà algebrica di irregolarità superficiale $p > 1$ *che sia almeno* $2p-1$ *volte singolare, contiene necessariamente infiniti sistemi regolari di integrali riducibili* ([17]).

Le dimensioni di questi sistemi regolari dipendono dalle molteplicità che presentano per $F^{(1)}$ i suoi punti razionali: in particolare la varietà conterrà integrali ellittici solo se $F^{(1)}$ contiene punti razionali semplici.

7. Se $k = p^2 - 1$ (e come dimostreremo tra poco questa ipotesi è pienamente legittima), lo spazio μ coincide con Σ'.

L'intersezione di μ, cioè di Σ', con un $S_{p(2p-3)}$ di F corrispondente a un punto M di Σ è lo spazio lineare di $F^{(1)}$, della dimensione

$$(p-1)^2 - 1,$$

che rappresenta i complessi lineari di A, aventi per spazio singolare la retta m uscente da quel punto e appoggiata a τ e $\bar{\tau}$.

Se l'$S_{p(2p-3)}$ di F che si considera è razionale, cioè se è razionale il punto M, tale è pure la sua intersezione con lo spazio razionale Σ' e la retta m; quindi questa retta m è l'asse di un integrale di V_p che risulta ellittico.

Si conclude che V_p ammette infiniti integrali ellittici, e che dell'insieme degli assi di questi integrali ne passa uno per ogni punto razionale di Σ'. Ma allora (come si riconosce subito segando, p. es., con un iperpiano razionale di Σ') ogni retta reale appoggiata a τ e $\bar{\tau}$ è retta limite dell'insieme degli assi di questi integrali, e quindi *ogni integrale semplice di 1ª specie di* V_p *è approssimabile mediante integrali ellittici.*

8. Adesso supponiamo inversamente che ogni integrale semplice di 1ª specie di V_p sia approssimabile mediante integrali ellittici.

Allora si riconosce subito che combinando linearmente questi integrali ellittici a due a due, a tre a tre, ... a $p-1$ a $p-1$ si ottengono *infiniti* sistemi regolari di integrali riducibili di V_p delle dimensioni $1, 2, \ldots, p-2$; e si vede pure, considerando l'asse di un sistema lineare ∞^{p-2} di integrali semplici di 1ª specie di V_p come lo spazio congiungente gli assi di $p-1$ integrali indipendenti del sistema, che codesto asse si può considerare come limite di assi di sistemi regolari di integrali riducibili di V_p aventi la dimensione $p-2$.

([17]) L'aver dimostrato che F non ammette spazî lineari di dimensione superiore a $p(2p-3)$ prova che con ragionamenti analoghi a quelli del testo non si può assicurare l'esistenza su V_p di sistemi regolari di integrali riducibili dalla sola ispezione dell'indice di singolarità di V_p, finchè questo indice è inferiore a $2p-1$. Del resto che questo non possa farsi in alcuna maniera può essere stabilito con esempî.

Ciò porta che su $F^{(p-1)}$ esistono infiniti punti razionali, e che ogni punto reale di $F^{(p-1)}$ è limite per l'insieme di codesti punti razionali.

Segue che lo spazio razionale μ contenente tutti i punti razionali di $F^{(1)}$ contiene tutti i punti reali di $F^{(p-1)}$, cioè $F^{(p-1)}$; e quindi μ coincide con lo spazio di appartenenza di $F^{(p-1)}$, cioè con Σ'. Il che val quanto dire che, *nell'ipotesi fatta, l'indice di singolarità di* V_p *è appunto* $p^2 - 1$.

9. Perchè le considerazioni dei due ultimi numeri non siano illusorie, e perchè resti compiutamente dimostrato il teorema enunciato nell'introduzione (Nota I), occorre e basta far vedere che:

Esistono effettivamente delle varietà algebriche V_p *di irregolarità superficiale* $p > 1$, *il cui indice di singolarità eguaglia* $p^2 - 1$.

Per questo, si consideri la matrice

$$\text{(I)} \qquad \left\| \begin{matrix} \omega_{1,1} & \omega_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \omega_{1,2p} \\ \omega_{2,1} & \omega_{2,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \omega_{2,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{p,1} & \omega_{p,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \omega_{p,2p} \end{matrix} \right\| ,$$

e posto

$$\omega_{j,r} = \alpha_{j,r} + i\beta_{j,r} \qquad (i = \sqrt{-1} \;;\; j = 1, 2, \ldots, p \;;\; r = 1, 2, \ldots, 2p)$$

con le $\alpha_{j,r}$ e $\beta_{j,r}$ reali, si supponga che le $\alpha_{j,r}$ e $\beta_{j,r}$ siano tutte numeri interi e che il determinante

$$\text{(II)} \qquad \left| \begin{matrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{1,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{p,1} & \alpha_{p,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{p,2p} \\ \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \beta_{1,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{p,1} & \beta_{p,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \beta_{p,2p} \end{matrix} \right|$$

sia diverso da zero.

Dico che la tabella (I) (ove si suppone naturalmente $p > 1$) può considerarsi come la tabella di $2p$ sistemi primitivi di periodi di un corpo di funzioni abeliane a p variabili indipendenti.

E infatti, in uno spazio Σ a $2p - 1$ dimensioni, nel quale sia fissato un sistema di coordinate proiettive omogenee, si considerino i punti ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_p$ le cui coordinate sono date dagli elementi delle righe della matrice (I); per l'ipotesi fatta sul determinante (II) i punti $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ saranno indipendenti, e l'S_{p-1}, τ, che li congiunge sarà indipendente dall'S_{p-1} imaginario coniugato $\bar{\tau}$.

Le $\frac{1}{2}p(p-1)$ rette che congiungono a due a due i punti ω_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$ e le $\frac{1}{2}p(p-1)$ rette che congiungono a due a due i punti imma-

ginarî coniugati ai punti ω_j hanno per coordinate numeri complessi aventi per parte reale e per coefficiente dell' imaginario i dei numeri interi; quindi perchè un complesso lineare di Σ rappresentato da una equazione del tipo

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} a_{r,s}\, x_r\, y_s = 0 \qquad (a_{r,s} + a_{s,r} = 0)$$

contenga tutte le rette di τ e $\overline{\tau}$ [per il che occorre e basta che contenga le $p(p-1)$ rette ora nominate], bisognerà che i coefficienti $a_{r,s}$ della sua equazione soddisfacciano a $p(p-1)$ equazioni lineari omogenee a coefficienti interi.

Segue che se si introduce, come più sopra, uno spazio S a $p(2p-1)-1$ dimensioni a rappresentare, nel modo già dichiarato, i complessi lineari di Σ, lo spazio Σ' di S, rappresentante i complessi lineari di Σ che contengono tutte le rette di τ e $\overline{\tau}$, è uno spazio razionale.

Ma allora, se $F^{(1)}$ è l' ipersuperficie di Σ' rispondente alla totalità dei complessi singolari di Σ che contengono le rette di τ e $\overline{\tau}$, esiste certo qualche punto razionale di S appartenente a Σ' e interno alla *prima falda* di $F^{(1)}$, poichè i punti reali di Σ' interni alla prima falda di $F^{(1)}$ costituiscono un dominio a p^2-1 dimensioni, e i punti razionali di S situati in Σ' costituiscono in Σ' un insieme di punti dovunque denso; quindi, in base all' interpretazione geometrica del teorema di esistenza delle funzioni abeliane che noi abbiamo stabilita altrove ([18]), la nostra affermazione relativa alla tabella (I) è pienamente dimostrata.

Ciò posto, si consideri una varietà abeliana di rango 1 appartenente alla tabella (I); cioè una varietà di dimensione p che ammetta una rappresentazione parametrica per funzioni abeliane di p parametri appartenenti alla tabella (I), la rappresentazione essendo tale da far corrispondere ad ogni punto della varietà, a meno di periodi, un sol gruppo di valori dei parametri.

Tale varietà abeliana sarà appunto di irregolarità superficiale $p > 1$ e avrà per indice di singolarità p^2-1.

([18]) Loc. cit. [5]), n. 55.

Geodesia. — *L'influenza della oscillazione del supporto sulle misure di gravità relativa compiute a S. Pietro in Vincoli coll'apparato di Sterneck a tripode.* Nota dell'ing. G. Cassinis, presentata dal Corrispondente V. Reina [1].

Nella Scuola d'applicazione per gli ingegneri di Roma, e nella sala stessa dove vennero compiute le memorabili misure di gravità assoluta dai professori Pisati e Pucci, vennero effettuate tre determinazioni di gravità relativa, una dal prof. Lorenzoni nel 1898, una seconda dal luogotenente Edler von Triulzi nel 1894, ed una terza dagli operatori dell'Istituto geografico militare prof. Guarducci, colonnello Baglione e prof. Andreini nel 1897.

Tutte e tre queste determinazioni vennero eseguite coll'apparato primitivo di Sterneck, monopendolare ed a tripode, poggiante su un pilastrino di blocchi di marmo costruito sul pavimento della sala e sempre nel posto medesimo che già era stato scelto dal prof. Lorenzoni, cioè presso la parete divisoria fra la sala stessa e la navata centrale della chiesa di S. Pietro in Vincoli, a metà lunghezza della sala. Il pilastrino veniva così a trovarsi verticalmente sopra uno degli arconi della navata destra della chiesa.

I valori ottenuti dai tre osservatori, riferiti al sistema di Potsdam, sono i seguenti:

Lorenzoni	$g = 980^{cm}.350$	$H = 59^{m}.0$
Edl. v. Triulzi	.345	"
Istituto geogr. mil. . .	.347	"

Costruito il nuovo apparato bipendolare con mensola a muro, del gabinetto di geodesia della Scuola per gli ingegneri, ed ottenuto, in seguito a lavori di sterro praticati nel frattempo nei sotterranei della Scuola, un più adatto locale, si decise di impiantarvi la nuova stazione gravimetrica, e nel 1912, per mezzo di un collegamento fatto direttamente con Potsdam, si ottenne [2]:

$$g = 980^{cm}.367\,; \quad H = 49^{m},3.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1915.

(2) V. Reina e G. Cassinis, *Determinazioni di gravità relativa eseguite nel 1912* ecc. Mem. della R. Accad. dei Lincei, 1913.

Se ai precedenti valori si aggiunge la correzione $+ 0^{cm}.003$, per ridurli dalla sala superiore al sotterraneo, si ottiene:

Lorenzoni	$g = 980^{cm}.353$
Edl. v. Triulzi	.348
Istituto geogr. mil. . .	.350
	$g = 980.350$

Questo valor medio differisce dunque per 17 unità della terza decimale del cm. in meno da quello determinato nel 1912 coll'apparato bipendolare.

Incaricato dal prof. Reina, nell'ottobre e novembre 1913, dopo il ritorno dalla campagna gravimetrica compiuta in quell'anno nell'Umbria ed in Toscana, eseguii una serie di ricerche intese a provare se la accennata differenza non fosse da attribuire alla mancata correzione per la oscillazione del supporto, correzione che, coll'apparecchio usato dai precedenti sperimentatori, non si era potuta nè constatare, nè, tanto meno, valutare.

Per attuare la ricerca, nella sala superiore, e nel posto stesso dove i precedenti osservatori avevano disposto il loro apparato, venne eretto un solido pilastro in mattoni la cui base aveva le dimensioni di $0^{m}.70 \times 0.30$, mentre l'altezza era di circa $1^{m}.50$. Su una delle facce verticali la mensola poteva essere fissata a diverse altezze dal pavimento. Si incominciò dal determinare la differenza di gravità fra il sotterraneo e la sala superiore. Nel sotterraneo la mensola venne applicata, come sempre, al grosso muro di divisione colla chiesa di s. Pietro in Vincoli, e nella sala superiore essa venne fissata ad una delle facce minori del pilastro in una posizione per la quale la lente del pendolo risultò all'altezza di $0^{m}.46$ sul pavimento. Le misure nella stazione inferiore vennero eseguite nei giorni 23 e 24 ottobre; in quella superiore, nei giorni 14 e 15 novembre. Non si riportano qui i particolari delle misure che vennero effettuate nei modi già indicati nella citata Memoria. Solo si aggiunge che le osservazioni astronomiche per le determinazioni di tempo vennero fatte collo strumento dei passaggi di Bamberg sistemato nel giardino della Scuola, e con un cronometro Kullberg, il quale, prima e dopo le osservazioni, veniva confrontato col pendolo Hawelk delle coincidenze. La correzione per la oscillazione del supporto venne determinata col metodo di Schumann (Mem., pag. 41), e le temperature vennero ricavate da due termometri Woytaček e da un pendolo-termometro di nuova costruzione, avente il bulbo (di circa 20^{cm}) estendentesi lungo tutta l'asta del pendolo. Le indicazioni dei tre termometri risultarono sempre assai bene concordanti.

Mi limiterò pertanto qui a dare lo specchio delle durate di oscillazione dei quattro pendoli adoperati, già corrette (per l'ampiezza, la tempe-

ratura, la pressione, l'andamento dell'orologio delle coincidenze, e la flessione del supporto):

DATA 1914		SERIE	DURATE DI OSCILLAZIONE RIDOTTE				S_m $0^s.507$
			S_{147} $0^s.507$	S_{148} $0^s.507$	S_{149} $0^s.507$	S_{150} $0^s.507$	
			Sotterraneo				
Ottobre	23	1	7285	5783	6777	4869	6178
»	23	2	93	87	73	65	79
»	24	3	90	79	71	63	76
»	24	4	301	80	71	71	81
			7292	5782	6773	4867	6178
			Sala superiore				
Novembre	14	1	7299	5782	6780	4870	6183
»	14	2	99	80	75	76	83
»	15	3	304	93	94	76	92
»	15	4	09	93	82	77	90
			7303	5787	6783	4875	6187

La differenza di gravità fra le due stazioni si può calcolare colla formola (Mem., pag. 79):

$$1)\qquad g' - g = 2g\,\frac{S - S'}{S} + 3g\left(\frac{S - S'}{S}\right)^2$$

adottando per la stazione inferiore il valore sopra riportato $g = 980^{cm}.367$, ed introducendovi le due durate medie di oscillazione dei quattro pendoli $S = 0^s.5076178$, $S' = 0.5076187$. Si ottiene:

$$g' - g = -\,0^{cm}.003_5 .$$

La differenza di livello delle due stazioni essendo $H = 10^m.2$, la variazione teorica della gravità, nel passaggio dalla stazione inferiore alla superiore sarebbe,

$$g' - g = -\,10^{-7}.3086\ H = -\,0^{cm}.003_1 .$$

Si ha dunque un perfetto accordo fra la differenza di gravità determinata sperimentalmente e quella teorica, ciò che prova che, nelle misure fatte col nostro apparato, si è potuto tenere esattamente calcolo di tutte le

cause perturbatrici, ed in particolare di quella che è più difficile a valutarsi, la oscillazione del supporto.

Per meglio esaminare l'influenza di quest'ultima causa pertubatrice, vi si dedicò una seconda parte della ricerca. Già si disse che, su una delle facce verticali del pilastro costruito nella camera superiore, la mensola poteva fissarsi a diverse altezze. Sempre adoperando il metodo di Schumann, si determinò la riduzione σ a supporto rigido, sia conservando la mensola in quella posizione nella quale si era determinata la differenza di gravità (altezza della lente del pendolo sul pavimento $0^{m}.46$), sia portandola in una posizione più elevata, per la quale la lente del pendolo aveva una altezza sul pavimento di $1^{m}.03$. I risultati ottenuti, come medie di ripetute determinazioni, sono i seguenti:

	σ	m_σ
Sotterraneo.	$\sigma = -4^{s}.3 \times 10^{-7}$	$m_\sigma = \pm 0^{s}.1 \times 10^{-7}$.
Sala superiore (alt. della lente $0^{m}.46$)	17.0	0.2
» » (alt. della lente $1^{m}.03$)	41.4	0.2

Questi risultati mostrano come cresca rapidamente la oscillazione del supporto coll'elevarsi della mensola sul pavimento. Potendosi il pilastro, per le sue notevoli dimensioni e la sua solidità, ritenere quasi rigido, ne segue che, coll'aumentare del braccio di leva della forza orizzontale sviluppata dal pendolo nel suo movimento, è il pavimento stesso, al quale esso è collegato, che entra in oscillazione.

Riferendoci alla posizione più elevata, è facile calcolare l'errore che si sarebbe commesso nel determinare la differenza di gravità fra il sotterraneo e la sala superiore, qualora non si fosse applicata la riduzione a supporto rigido. La 1) differenziata dà, a meno di un termine trascurabile,

$$d\,(g' - g) = \frac{2g}{S}\,(dS - dS')$$

che può anche scriversi

$$d\,(g' - g)^{cm} = 0^{cm}.0004\ (dS - dS')$$

intendendo dS e dS' espressi in unità della settima cifra decimale del secondo. Sostituendo in questa i valori precedentemente trovati (col segno cambiato)

$$dS = 4.3 \qquad dS' = 41.4,$$

si trova

$$d\,(g' - g) = -\,0^{cm}.015.$$

Senza la riduzione a supporto rigido, si sarebbe dunque trovato nella sala superiore un valore della gravità inferiore di 15 unità della terza decimale del cm. a quello sopra determinato.

Ora, da una comunicazione del prof. Guarducci al prof. Reina risulta che, nelle sue misure, egli osservava in piedi davanti all'apparato delle coincidenze; ne segue che i pendoli oscillanti sul tripode dovevano trovarsi ad un'altezza certamente non inferiore a quella corrispondente alla mia posizione di esperienza più elevata. Come effetto della oscillazione del supporto si spiegano allora le 17 unità da lui e dagli altri sperimentatori ottenute in meno, nel determinare il valore della gravità.

Prima di chiudere, si riuniscono nel seguente specchio i valori delle durate di oscillazione dei quattro pendoli e del pendolo medio nel sotterraneo, negli anni 1912, '13 e '14.

	Epoca	S_{147} $0^s.507$	S_{148} $0^s.507$	S_{149} $0^s.507$	S_{150} $0^s.507$	S_m $0^s.507$
(1)	1912.6	7283	5777	6757	4859	6169
(2)	1913.6	93	75	56	59	71
(3)	1914.8	92	82	73	67	78
(2) — (1)	...	10	— 2	— 1	0	2
(3) — (2)	...	— 1	7	17	8	7
(3) — (1)	...	9	5	16	8	9

Questi dati mostrano che la variazione dei pendoli è stata piccolissima: tutti hanno subìto un lieve allungamento.

Chimica. — *Studî intorno a gli indoni. II. Sintesi dell'α-metil-β-fenil-indone.* Nota di R. de Fazi [1], presentata dal Socio E. Paternò [2].

Per azione dell'acido solforico conc., a freddo, sull'etere etilico dell'acido α-etil- β-difenil-lattico, ho ottenuto l'α-etil-β-fenil-indone [3].

Nelle stesse condizioni, l'acido solforico ha reagito in modo simile sull'etere etilico dell'acido α-metil- β-difenil-lattico, dando luogo alla formazione dell'α-metil- β-fenil-indone.

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio chimico della Sanità.
[2] Pervenuta all'Accademia il 28 settembre 1915.
[3] R. de Fazi, Rend. Acc. Lincei, *24* (2), 150 (1915).

Questo è identico a quello che Rupe, Steiger e Fiedler [1] hanno ottenuto per azione del cloruro di tionile sull'acido α-metil- β-fenil-cinnamico, e che chiamano β-metil- γ-fenil-indone.

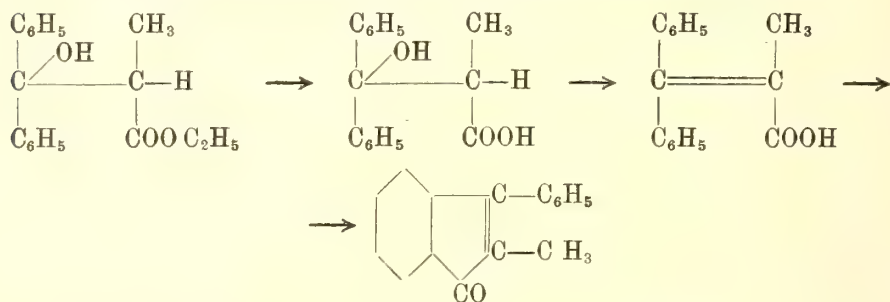
Ho preparato l'etere etilico dell'acido α-metil- β-difenil-lattico, secondo le indicazioni di Rupe, Steiger e Fiedler [2]. Questo etere, come ho già accennato nella mia Nota I [3], dà con H_2SO_4 conc., a freddo, una bella colorazione verde-smeraldo.

Per aggiunta di ghiaccio la colorazione verde scompare e la soluzione diviene di colore giallo intenso, mentre si deposita l'indone in fiocchi di colore arancio.

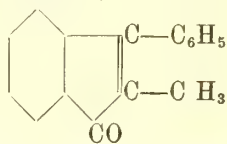
Come per l'α-etil- β-fenil-indone, così per l'α-metil- β-fenil-indone, è facile spiegare l'andamento della reazione.

L'acido solforico conc., ha prima saponificato l'etere dando l'acido α-metil- β-difenil-lattico, poi eliminato una molecola d'acqua dando luogo alla formazione dell'acido α-metil- β-fenil-cinnamico; quindi una seconda molecola d'acqua tra il carbossile e l'anello benzenico formando l'α-metil- β-fenil-indone.

La reazione sarebbe andata dunque secondo lo schema seguente:

$$(C_6H_5)_2C(OH)-CH(CH_3)-COOC_2H_5 \longrightarrow (C_6H_5)_2C(OH)-CH(CH_3)-COOH \longrightarrow (C_6H_5)_2C=C(CH_3)-COOH \longrightarrow C_6H_4<_{CO}^{C(C_6H_5)}>C-CH_3$$

Di questo indone ho ottenuto l'ossima, il semicarbazone ed il semiossamazone. In questa Nota descrivo anche il semicarbazone dell'α-etil-β-fenil-indone che ho preparato per confrontarlo con quello dell'α-metil-β-fenil-indone.

α-metil-β-fenil-indone.

$$C_6H_4<_{CO}^{C-C_6H_5}>C-CH_3$$

L'etere etilico dell'acido α-metil- β-difenil-lattico è stato preparato secondo le indicazioni di Rupe, Steiger e Fiedler [4].

[1] Rupe, Steiger e Fiedler, Ber. *47* (1), 66 (1914).

[2] Rupe Steiger e Fiedler, loc. cit.

[3] R. de Fazi, loc. cit.

[4] Rupe, Steiger e Fiedler, loc. cit.

Si disciolgono 20 gr. di benzofenone in 60 cc. di benzolo (disseccato su sodio), e si aggiungono poi 24 gr. di etere etilico dell'acido α-bromo-propionico e 7 gr. di zinco in granuli.

La reazione si fa in un pallone da 500 cc. a b. m. con refrigerante chiuso da un tubo a $CaCl_2$.

Si fa bollire per circa 2 ore. Poi si raffredda, e si decompone con H_2SO_4 diluito. Si separa quindi la soluzione benzenica e si lava bene con acqua; si filtra e si distilla il benzolo. Per raffreddamento, tutta la sostanza oleosa rimasta, cristallizza in ciuffi di aghi.

Ricristallizzata da una mescolanza di alcool etilico ed acqua (3:1) si ottengono fini aghi bianchi, che fondono a 101-102°, e che sono l'etere etilico dell'acido α-metil- β-difenil-lattico.

Da una preparazione si ottengono circa 20 gr. di questo etere.

A gr. 2 di etere etilico dell'acido α-metil- β-difenil-lattico si aggiungonc 10 cc. di H_2SO_4 conc. La soluzione diviene immediatamente di un bel colore verde-smeraldo.

Però, se si fa questa operazione con attenzione, si nota come la colorazione verde, pur essendo immediata è preceduta da una fugace colorazione gialla, poi arancio e rossa.

Si lascia reagire a temperatura ordinaria per 1 giorno.

Si aggiungono quindi dei piccoli pezzi di ghiaccio, mantenendo però a bassa temperatura (miscuglio di ghiaccio e sale) il recipiente in cui si fa questa operazione.

L'aggiunta dei piccoli pezzi di ghiaccio deve essere fatta lentamente. Dal colore verde, la soluzione passa al rosso, all'arancio al colore giallo intenso. Si sente un odore speciale, simile a quello notato per l'α-etil-β-fenil-indone (1).

Si aggiungono poi pochi cc. di acqua, sempre però a freddo. Si depositano allora dei fiocchi di colore arancio, che si raccolgono su filtro. Si disciolgono in alcool etilico bollente, nel quale sono molto solubili.

Per raffreddamento della soluzione si formano alla superficie lunghe lamelle, di colore giallo-arancio intenso, che si riuniscono per formare dei reticolati, i quali si depositano, volta per volta, al fondo del recipiente.

Avendo avuto occasione di cristallizzare più volte questo indone, sempre dall'alcool, ho ottenuto, non soltanto delle lamelle, ma anche dei cristalli di forma romboedrica.

Questo indone fonde a 86-87°.

Si dissecca e si analizza:

sostanza gr. 0,2054 CO_2 gr. 0,6564 H_2O gr. 0,1026.

(1) R. de Fazi, loc. cit.

Donde %:

	Trovato	Calcolato per $C_{16}H_{12}O$
C	87,15	87,24
H	5,58	5,49

Come l'α-etil- β-fenil-indone anche questo indone, con H_2SO_4 conc. a freddo, si colora in un bel verde smeraldo; a caldo, in rosso. La reazione è così sensibile che basta un cristallino perchè 100 cc. di H_2SO_4 conc. si colorino in verde smeraldo.

Con HNO_3 conc., a freddo, si colora in rosso.

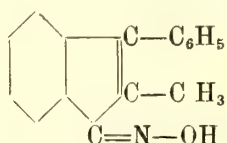
È una sostanza molto solubile in alcool etilico e metilico, benzolo, cloroformio, etere etilico ed etere acetico; meno in etere di petrolio.

Da una preparazione si ottiene circa 1 grammo di α-metil- β-fenil-indone.

Ossima dell'α-metil- β-fenil-indone.

C—C_6H_5

C—C H_3

C=N—OH

Si discioglie 1 gr. di α-metil- β-fenil-indone in 30 cc. di alcool etilico, e si aggiungono poi gr. 0,5 di cloridrato di idrossilammina disciolti in 5 cc. di acqua. Si fa bollire per 3 ore, e si filtra. Per raffreddamento della soluzione si depositano cristalli di colore giallo, che fondono, così impuri, a 195-197°.

Questa ossima, disciolta in molto alcool etilico, cristallizza, dopo aver lasciato la soluzione a svaporare a temperatura ordinaria per un giorno, in prismi di colore giallo-verde, e molto lucenti, che fondono a 199-200°.

Con H_2SO_4 conc., a freddo, si colorano in un bel rosso sangue. Con HNO_3 conc., a freddo, si colorano in rosso rubino.

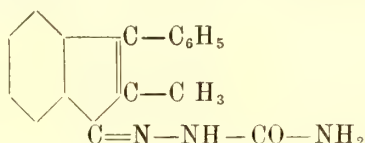
La sostanza disseccata a 100° si analizza:

sostanza gr. 0,2118 CO_2 gr. 0,6332 H_2O gr. 0,1082,

" gr. 0,2516 N. cc. 13,2 a 764 mm. e 22°.

Donde %:

	Trovato	Calcolato per $C_{16}H_{13}ON$
C	81,53	81,70
H	5,72	5,50
N	6,10	6,00

Questa ossima è insolubile in acqua; solubile in alcool etilico e metilico, cloroformio e benzolo; meno in etere di petrolio.

Semicarbazone dell'α-metil- β-fenil-indone.

$$C_6H_4 \cdot C(=N-NH-CO-NH_2) \cdot C(CH_3) = C(C_6H_5)$$

Si discioglie 1 gr. di α-metil- β-fenil-indone in 20 cc. di alcool etilico e si aggiunge poi 1 gr. di cloridrato di semicarbazide. Si fa bollire per un'ora e si filtra. Per raffreddamento della soluzione si depositano foglioline dentellate di colore arancio intenso, splendenti, che fondono a 216-218°. Ricristallizzate dall'alcool etilico si ottengono foglie dentellate, lucenti, e di colore rosso-arancio, che fondono a 219-220°.

Questo semicarbazone con H_2SO_4 conc., a freddo, dà una intensa colorazione bleu. Con HNO_3 conc., dà una colorazione rosso ciliegia.

La sostanza disseccata a 100° si analizza:

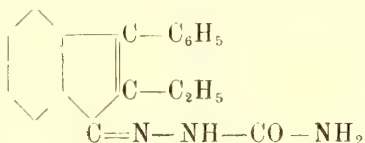
sostanza gr. 0,1618 CO_2 gr. 0,4356 H_2O gr. 0,0825,
" gr. 0,1922 N. cc. 25,2 a 758 mm. e 18°.

Donde %:

	Trovato	Calcolato per $C_{17}H_{15}N_3O$
C	73,42	73,59
H	5,73	5,45
N	15,34	15,19

Questo semicarbazone è molto solubile in alcool etilico e metilico, benzolo, cloroformio, etere etilico ed etere acetico; meno in etere di petrolio

Semicarbazone dell'α-etil- β-fenil-indone.

$$C_6H_4 \cdot C(=N-NH-CO-NH_2) \cdot C(C_2H_5) = C(C_6H_5)$$

Si discioglie 1 gr. di α-etil- β-fenil-indone in 20 cc. di alcool etilico, e si aggiunge poi 1 gr. di cloridrato di semicarbazide. Si fa bollire per 1 ora e si filtra. Per raffreddamento della soluzione si depositano fini aghi, di un bel colore arancio, che fondono, così impuri a 189-191°.

Ricristallizzati dall'alcool etilico si ottengono ciuffi di aghi lucenti, e di un colore giallo-arancio che fondono a 198-199°.

Questo semicarbazone dà, a freddo, con H_2SO_4 una intensa colorazione bleu. Con HNO_3 conc., a freddo, dà una colorazione rosso-ciliegia.

La sostanza disseccata a 100° si analizza:

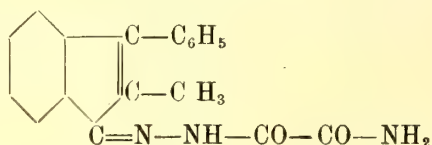
sostanza gr. 0,2208 CO_2 gr. 0,5995 H_2O gr. 0,1168,
" gr. 0,2080 N. cc. 26,2 a 758 mm. e 20°.

Donde %:

	Trovato	Calcolato per $C_{18}H_{17}N_3O$
C	74,05	74,20
H	5,92	5,80
N	14,64	14,40

Questo semicarbazone è molto solubile in alcool etilico e metilico, benzolo, cloroformio ed etere acetico; meno in etere di petrolio.

Semiossamazone dell'α-metil- β-fenil-indone.

$$C_6H_4<\begin{matrix} C—C_6H_5 \\ \| \\ C—C\ H_3 \end{matrix}>C{=}N—NH—CO—CO—NH_2$$

Si disciolglie 1 gr. di α-metil- β-fenil-indone in 50 cc. di alcool etilico e si aggiungono poi gr. 0,40 di semi-ossamazide.

Dopo aver fatto bollire a b. m. per 1 ora, si filtra. Per raffreddamento della soluzione si depositano aghi di colore giallo intenso.

Si cristallizzano dall'alcool etilico. Si hanno così ciuffi di aghi fini e lucenti di un bel colore giallo intenso che fondono a 203-205°.

Questa sostanza, con H_2SO_4 conc., a freddo, si colora in bleu. Con HNO_3 conc., in rosso ciliegia.

Il semiossamazone disseccato a 100° si analizza:

sostanza gr. 0,1032 N. cc. 12,8 a 23° e 761 mm.

Donde %:

	Trovato	Calcolato per $C_{18}H_{15}N_3O_2$
N	14,32	13,80

È una sostanza molto solubile in alcool etilico e metilico; solubile in etere, cloroformio, benzolo, ed etere acetico; meno in etere di petrolio.

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXIV. (1892-1915). Fasc. 7°. Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIV. (1892-1915). Fasc. 3-4.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XI. Fasc. 3.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

RENDICONTI — Ottobre 1915.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie, sino al 3 ottobre 1915.

ERRATA-CORRIGE

Nella Nota « *La frequenza nelle repliche del terremoto italiano — 13 gennaio 1915* » pubblicata in questi Rendiconti, vol. XXIV, 1° sem., fasc. 12, pag. 1223, sostituire alla formola

$$f' = \frac{73.03}{t + 0,6371}, \text{ l'altra } f' = \frac{77.03}{t + 0,6371}.$$

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 5 novembre 1915.* **N. 8.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXIV°. — Fascicolo 8°

2° Semestre.

Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie sino al 17 ottobre **1915.**

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

***pervenute all'Accademia durante le ferie del* 1915.**

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Matematica. — *Sulle superficie di rotolamento e le trasformazioni di Ribaucour*. Nota del prof. L. P. EISENHART (dell' Università di Princeton), presentata dal Socio LUIGI BIANCHI [1].

In una Nota [2], pubblicata nei Rendiconti di questa R. Accademia, Bianchi ha definito come *superficie di rotolamento* la superficie descritta da un punto invariabilmente connesso ad una superficie S_0, quando questa rotola sopra una superficie applicabile S, detta *superficie d'appoggio*, il movimento dipendendo da due parametri. Egli ha dimostrato che, data una superficie Σ, il problema di trovare le coppie di superficie applicabili S_0 ed S, tali che Σ sia superficie di rotolamento quando S_0 rotola sopra S, si riduce alla integrazione di un'equazione a derivate parziali del secondo ordine e di un'equazione di Riccati. In una Nota successiva [3], Bianchi considera il caso che la superficie Σ sia una superficie isoterma.

Si sa che Darboux [4] ha stabilito l'esistenza di trasformazioni D_m di una superficie isoterma Σ in altre superficie isoterme Σ_1, tali che Σ ed

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 ottobre 1915.

(2) *Sui problemi di rotolamento di superficie applicabili* (seduta del 4 gennaio 1914). Viene qui citata come Nota 1.

(3) *Sulle superficie isoterme come superficie di rotolamento* (seduta del 21 febbraio 1915), qui citata come Nota 2.

(4) *Sur la déformation des surfaces du second degré et sur les surfaces isotermiques* [Annales de l'École Normale Supérieure, IIIe série, tome XVI (1899)]. Ved. anche Bianchi, Annali di matematica, serie 3a, tomi XI e XII (1905).

una sua trasformata Σ_1 formano le due falde di un inviluppo di sfere a due parametri, le linee di curvatura corrispondendosi sopra Σ, Σ_1, ed a queste corrispondendo un sistema coniugato sulla superficie luogo dei centri delle sfere. Darboux trovò che la determinazione di queste trasformazioni D_m dipende dalla integrazione di un sistema differenziale lineare, completamente integrabile.

Nella Nota 2, Bianchi ha dimostrato che ogni trasformazione D_m di una superficie isoterma Σ dà luogo ad una soluzione del corrispondente problema di rotolamento, nella quale la superficie luogo dei centri delle sfere è la superficie d'appoggio S, e la rotolante S_0 resta intrinsecamente definita dalla proprietà che il sistema coniugato comune ad S e S_0 è appunto quello che corrisponde alle linee di curvatura di Σ.

Ora Ribaucour ha considerato, in generale, gli inviluppi di sfere a due parametri tali che le linee di curvatura si corrispondono sulle due falde dell'inviluppo. Diremo che queste due falde derivano l'una dall'altra per una *trasformazione di Ribaucour*. Evidentemente una trasformazione D_m di una superficie isoterma è una trasformazione di Ribaucour.

Nella presente Nota mi propongo di dimostrare che le trasformazioni D_m sono le uniche trasformazioni di Ribaucour che diano al tempo stesso una soluzione del problema di rotolamento.

2. Sia Σ una superficie, riferita alle sue linee di curvatura (u, v); r_1, r_2 indichino i raggi principali di curvatura normale; X_3, Y_3, Z_3 i coseni di direzione della normale a Σ, e

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2 \tag{1}$$

il quadrato dell'elemento lineare. Sia M un punto variabile sopra Σ, ed M_0 il corrispondente punto sulla superficie (rotolante) S_0, nel senso indicato da principio, situato quindi sulla normale alla Σ in M. Se adunque x, y, z sono le coordinate cartesiane di M, e x_0, y_0, z_0 quelle di M_0, avremo

$$x_0 = x + RX_3 \quad , \quad y_0 = y + RY_3 \quad , \quad z_0 = z + RZ_3 ,$$

dove R è una funzione di u, v da determinarsi.

Definiamo le funzioni h_1, h_2 colle formole

$$h_1 = \sqrt{E}\left(1 + \frac{R}{r_2}\right) \quad , \quad h_2 = \sqrt{G}\left(1 + \frac{R}{r_1}\right). \tag{2}$$

Bianchi ha dimostrato (Nota 1) che R deve soddisfare all'equazione

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{h_1 R}\frac{\partial R}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{h_2 R}\frac{\partial R}{\partial v}\right) = \sqrt{EG}\left\{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\right\}, \tag{3}$$

e che, inversamente, ogni soluzione di questa fornisce una superficie S (d'appoggio) per la superficie Σ come superficie di rotolamento.

3. Ho altrove dimostrato (¹) che le trasformazioni di Ribaucour di una superficie Σ dipendono dalle soluzioni del seguente sistema differenziale:

$$
(4)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\lambda}{\partial u}=\sqrt{E}\,\alpha \quad , \quad \frac{\partial\lambda}{\partial v}=\sqrt{G}\,\beta \\
&\frac{\partial\mu}{\partial u}=\sqrt{E}\,\frac{\alpha}{r_2} \quad , \quad \frac{\partial\mu}{\partial v}=\sqrt{G}\,\frac{\beta}{r_1} \\
&\frac{\partial\alpha}{\partial u}=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\beta-\frac{\sqrt{E}}{r_2}\mu+n\sigma(p+\sqrt{E}) \;,\; \frac{\partial\alpha}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\beta \\
&\frac{\partial\beta}{\partial u}=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\alpha \;,\; \frac{\partial\beta}{\partial v}=-\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\alpha-\frac{\sqrt{G}}{r_1}\mu+n\sigma(q+\sqrt{G}) \\
&\frac{\partial\log\sigma}{\partial u}=p\,\frac{\alpha}{\lambda} \quad , \quad \frac{\partial\log\sigma}{\partial v}=q\,\frac{\beta}{\lambda} \\
&\frac{\partial p}{\partial v}=q\left[\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}-\frac{\beta}{\lambda}(p+\sqrt{E})\right] \\
&\frac{\partial q}{\partial u}=p\left[\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}-\frac{\alpha}{\lambda}(q+\sqrt{G})\right],
\end{aligned}\right.
$$

tali che si abbia

$$(5)\qquad \alpha^2+\beta^2+\mu^2=2n\lambda\sigma,$$

dove n indica una costante. Quando una soluzione è nota, il raggio della corrispondente sfera inviluppante è dato da

$$(6)\qquad R=-\frac{\lambda}{\mu},$$

e l'elemento lineare della trasformata Σ_1 è

$$(7)\qquad ds_1^2=p^2\,du^2+q^2\,dv^2\,.$$

4. Ora dalla (6), derivando, si trova, per le (4),

$$\frac{\partial R}{\partial u}=-\frac{\alpha}{\mu}h_1 \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial v}=-\frac{\beta}{\mu}h_2,$$

e, nella ipotesi che questo valore di R soddisfi alla (3), dovremo avere

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{G}\,\frac{\alpha}{\lambda}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{E}\,\frac{\beta}{\lambda}\right)=\sqrt{EG}\left\{\frac{\mu^2}{\lambda^2}-\frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\right\}.$$

(¹) *Transformations of surfaces of Guichard and surfaces applicable to quadrics* (Annali di matematica, ser. 3ª, tomo XXII, pp. 194-197).

Calcolando colle (4) e (5), questa si riduce alla

$$p\sqrt{G}+q\sqrt{E}=0\,, \tag{8}$$

nella quale, come al solito, $\sqrt{E}$, $\sqrt{G}$ indicano i valori positivi dei radicali. Lo stesso significato avendo $\sqrt{E_1}$, $\sqrt{G_1}$, dove E_1, G_1 sono i corrispondenti coefficienti per la superficie trasformata Σ_1, abbiamo due diversi casi da considerare, e cioè

$$p=\sqrt{E_1}\quad,\quad q=\sqrt{G_1}\,, \tag{9}$$

ovvero l'altro

$$p=-\sqrt{E_1}\quad,\quad q=\sqrt{G_1}\,. \tag{10}$$

Ma il caso (9) è incompatibile colla (8), per la convenzione sui segni dei radicali; e resta quindi solo il caso (10), nel quale la (8) diventa

$$\sqrt{E}\cdot\sqrt{G_1}=\sqrt{G}\cdot\sqrt{E_1}\,.$$

Siccome le linee di curvatura sono le linee coordinate sopra Σ e Σ_1, ne segue che la rappresentazione dell'una superficie sull'altra è *conforme.* Ma Darboux ha dimostrato (loc. cit.) che le trasformazioni D_m delle superficie isoterme e quelle di Ribaucour colle sfere ortogonali ad una sfera fissa sono le uniche trasformazioni di Ribaucour per le quali la corrispondenza è conforme. Nello stesso tempo egli ha provato che per le trasformazioni del secondo tipo è il caso (9) che si presenta. Concludiamo quindi:

Le trasformazioni D_m *delle superficie isoterme sono le uniche trasformazioni di Ribaucour che dànno una soluzione del problema delle superficie di rotolamento.*

In una Nota successiva stabilirò un teorema, in certo modo duale di questo, che cioè le trasformazioni E_m delle superficie con rappresentazione isoterma delle linee di curvatura sono le uniche trasformazioni di Ribaucour che dànno una soluzione del problema degli *inviluppi di rotolamento*, per usare la terminologia usata da Bianchi in due Note in questi Rendiconti [1].

[1] Vol. 23, pag. 3; e vol. 24, pp. 366-369.

Matematica. — *Sulla necessità della condizione di Weierstrass per l'estremo degli integrali doppî.* Nota di EUGENIO ELIA LEVI, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI [1].

La teoria dei massimi e dei minimi degli integrali doppî, quale è esposta nei trattati più noti, presenta molte lacune: manca, ad esempio, la dimostrazione che la condizione di Weierstrass è necessaria. Per quanto tale dimostrazione non presenti difficoltà di natura essenziale, può essere utile l'esporla brevemente.

1. Supponiamo che l'integrale di cui si cerca l'estremo sia

$$(1)\quad \mathrm{I}[z]=\int\!\!\int_{\mathrm{C}} f(xyzpq)\,dx\,dy \quad ; \quad z=z(xy)\ ,\ p=\frac{\partial z}{\partial x}\ ,\ q=\frac{\partial z}{\partial y}\ ;$$

dove C rappresenta un'area assegnata del piano xy che si suppone limitata da una curva regolare c, $f(xyzpq)$ è una funzione finita e continua colle derivate dei primi due ordini in un certo campo R dello spazio (x, y, z) e per valori arbitrarii di p e di q. Sia $z=\zeta(xy)$ una funzione avente le derivate prime finite e continue, che dia ad (1) il massimo o il minimo valore rispetto alle superficie di un certo intorno di ordine 0, le quali assumono gli stessi valori sul contorno c di C.

Poniamo $\pi(xy)=\frac{\partial\zeta}{\partial x}$, $\chi=\frac{\partial\zeta}{\partial y}$; e in generale conveniamo che quando in una funzione contenente z e le sue derivate, si sostituiscono a queste ζ e le derivate corrispondenti, si indichi il risultato della sostituzione colla lettera greca corrispondente alla latina con cui quella è indicata.

Sappiamo che $\zeta(xy)$ deve essere tale che, per qualunque funzione $\omega(xy)$ avente derivate prime finite, sia

$$(2)\qquad \int\!\!\int_{\mathrm{C}} [\varphi_z\,\omega+\varphi_p\,\omega_x+\varphi_q\,\omega_y]\,dx\,dy=0\ ;$$

e si sa che perciò, se si ammette che $\zeta(xy)$ abbia pure le derivate seconde, essa deve essere un estremale, e cioè soddisfare all'equazione di Lagrange

$$(3)\qquad \varphi_z-\frac{\partial}{\partial x}\varphi_p-\frac{\partial}{\partial y}\varphi_q=0\,.$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 28 settembre 1915.

Ammettiamo soddisfatta questa condizione: e dimostriamo che *affinchè* $\zeta(xy)$ *dia a* $\mathrm{I}[z]$ *per es. il valore minimo, occorre che in ogni punto* $x_0 y_0$ *interno a* C *e per tutti i valori di* α *e* β

$$(14)\quad \begin{aligned} &\mathrm{E}(x_0\,, y_0\,, \zeta_0\,, \pi_0 + \alpha\,, \chi_0 + \beta\ ;\ \pi_0\,, \chi_0) = \\ &\qquad = f(x_0\,, y_0\,, \zeta_0\,, \pi_0 + \alpha\,, \chi_0 + \beta) - \varphi(x_0 y_0) - \\ &\qquad - \alpha\,\varphi_p(x_0 y_0) - \beta\,\varphi_q(x_0 y_0) \geq 0\ ; \end{aligned}$$

dove $\zeta_0 = \zeta(x_0 y_0)$, $\pi_0 = \pi(x_0 y_0)$, $\chi_0 = \chi(x_0 y_0)$, *e come si disse* $\varphi(x_0 y_0) = f(x_0 y_0 \zeta_0 \pi_0 \chi_0)$ *ecc.*

2. Per semplificare i calcoli che seguono, osserviamo che ci si può sempre ridurre al caso in cui $\alpha > 0$, $\beta = 0$, $x_0 = y_0 = 0$. Quando ciò non sia, poniamo

$$(5)\qquad \alpha = \varrho \cos\theta \quad , \quad \beta = \varrho \operatorname{sen}\theta\,, \qquad\qquad \varrho > 0\ ;$$

e facciamo il cambiamento di variabili

$$(6)\qquad x = x_0 + x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta \qquad y = y_0 + x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta\,.$$

Aggiungendo un apice indicheremo le quantità relative alle nuove variabili; così C′ indicherà il campo corrispondente a C nelle variabili $(x'y')$, sarà

$$(7)\qquad \begin{aligned} &z'(x'y') = z(xy) = \\ &\qquad = z(x_0 + x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta\ ,\ y_0 + x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta)\,, \end{aligned}$$

e quindi

$$(8)\qquad \left\{ \begin{aligned} p' &= \frac{\partial z'(x'y')}{\partial x'} = \quad p\cos\theta + q\operatorname{sen}\theta\,, \\ q' &= \frac{\partial z'(x'y')}{\partial y'} = -p\operatorname{sen}\theta + q\cos\theta\,. \end{aligned} \right.$$

ed analogo significato avranno ζ' , π' , χ'. La funzione $\zeta'(x'y')$ darà il minimo all'integrale

$$(9)\qquad \mathrm{I}'[z'] = \iint_{C'} f'(x'y'z'p'q')\,dx'\,dy'\,,$$

dove

$$(10)\qquad \begin{aligned} &f'(x'y'z'p'q') = f(xyzpq) = \\ &\qquad = f(x_0 + x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta\ ,\ y_0 + x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta\ , \\ &\qquad\qquad z'\,, p'\cos\theta - q'\operatorname{sen}\theta\ ,\ p'\operatorname{sen}\theta + q'\cos\theta)\,. \end{aligned}$$

D'altra parte indicando ancora con E′ la funzione analoga a E costrutta

mediante la f' e la ζ' avremo identicamente da (8) e (10)

$$(11) \qquad E(x_0, y_0, \zeta_0, \pi_0 + \alpha, \chi_0 + \beta; \pi_0, \chi_0) = \\ = E'(0, 0, \zeta'_0, \pi'_0 + \varrho, \chi'_0; \pi'_0, \chi'_0);$$

cosicchè per dimostrare la (4), basterà dimostrare la disuguaglianza

$$E'(0, 0, \zeta'_0, \pi'_0 + \varrho, \chi'_0; \pi'_0, \chi'_0) \geq 0,$$

che è l'analoga della (4) per l'integrale (9), e per $\alpha = \varrho > 0$, $\beta = 0$, $x_0 = y_0 = 0$.

Ci limiteremo dunque a dimostrare che per il minimo, occorre che

$$(12) \qquad E(0, 0, \zeta_0, \pi_0 + \alpha, \chi_0; \pi_0, \chi_0) = \\ = f(0, 0, \zeta_0, \pi_0 + \alpha, \chi_0) - \varphi(0, 0) - \alpha\varphi_p(0, 0) \geq 0; \qquad \alpha > 0.$$

3. Ciò posto, prendiamo due numeri a e b positivi e tali che il rettangolo di vertici $(0, -a)$, $(b, -a)$, (b, a), $(0, a)$ sia interno a C: e sia ε un numero tale che

$$0 < \varepsilon < a \quad , \quad \varepsilon^3 < b.$$

Il rettangolo R_ε di vertici $(0, -\varepsilon)$, $(b, -\varepsilon)$, (b, ε), $(0, \varepsilon)$ è allora interno a C: ed il punto $(\varepsilon^3, 0)$ è interno a R_ε. Costruiamo allora una funzione variata $z(x, y; \varepsilon)$ colle regole seguenti:

1°) nel campo $C - R_\varepsilon$ sia

$$(13) \qquad z(x, y; \varepsilon) = \zeta(x, y);$$

2°) nel triangolo T_ε di vertici $(0, -\varepsilon)$, $(\varepsilon^3, 0)$, $(0, \varepsilon)$ sia

$$(14) \qquad z(xy; \varepsilon) = \zeta(x, y) + \alpha x;$$

3°) nel campo $R_\varepsilon - T_\varepsilon$ (che è un poligono concavo di 5 lati) poniamo

$$(15) \qquad z(xy; \varepsilon) = \zeta(xy) + \omega(xy; \varepsilon),$$

dove $\omega(xy; \varepsilon)$ è una funzione avente le derivate prime quasi ovunque e soddisfacente in $R_\varepsilon - T_\varepsilon$ alle disuguaglianze

$$(16) \qquad |\omega(xy; \varepsilon)| < l\varepsilon^2 \quad , \quad \left|\frac{\partial\omega}{\partial x}\right| \leq l\varepsilon^2 \quad , \quad \left|\frac{\partial\omega}{\partial y}\right| \leq l\varepsilon^2,$$

e che sul contorno del campo $R_\varepsilon - T_\varepsilon$ prende gli stessi valori già dati dalle formule (13), (14); e cioè sui tre lati r_ε appartenenti al contorno di R_ε è nulla; mentre sui due lati t'_ε, t''_ε di T_ε, i quali rispettivamente congiungono i punti $(0, -\varepsilon)$ $(\varepsilon^3, 0)$ e $(0, \varepsilon)$ $(\varepsilon^3, 0)$ e quindi hanno le equazioni

$$(17)' \quad x = \varepsilon^2(y + \varepsilon) \qquad \text{e} \qquad (17)'' \quad x = -\varepsilon^2(y - \varepsilon),$$

prende i valori

$$(18)' \qquad \alpha\varepsilon^2(y+\varepsilon) \qquad \text{e} \qquad (18)'' \quad -\alpha\varepsilon^2(y-\varepsilon)$$

rispettivamente. Per dare un esempio del modo in cui tale funzione può costruirsi, si ponga ad esempio,

$\omega(x, y; \varepsilon) = \alpha\varepsilon^2(y+\varepsilon)$ nel triangolo $T_{1\varepsilon}$ di vertici $(0, -\varepsilon), (\varepsilon^3, 0), (b, -\varepsilon)$

$\omega(x, y; \varepsilon) = -\alpha\varepsilon^2(y-\varepsilon)$ nel triangolo $T_{2\varepsilon}$ di vertici $(0, \varepsilon), (\varepsilon^3, 0), (b, \varepsilon)$

$\omega(x, y; \varepsilon) = \alpha\varepsilon^3 \dfrac{x-b}{\varepsilon^3-b}$ nel triangolo $T_{3\varepsilon}$ di vertici $(\varepsilon^3, 0), (b, \varepsilon), (b, -\varepsilon)$.

Si verifica subito che con tale definizione valgono le (16) e risultano soddisfatte tutte le altre condizioni.

Assegnato un intorno arbitrario di ordine 0 della $z = \zeta(xy)$, è chiaro che per ε convenientemente piccolo, la $z = z(xy; \varepsilon)$ appartiene a detto intorno: dovrà quindi essere $I[z(xy;\varepsilon)] - I[\zeta(xy)] \geq 0$, e quindi pure

$$(19) \qquad \lim_{\varepsilon=0} \frac{I[z(xy;\varepsilon)] - I[\zeta(xy)]}{\varepsilon^4} \geq 0 .$$

Andremo ora a calcolare tale limite.

4. Indichiamo con $I_{1\varepsilon}[z], I_{2\varepsilon}[z], I_{3\varepsilon}[z]$ i tre integrali analoghi a (1) estesi ai tre campi $C - R_\varepsilon, T_\varepsilon, R_\varepsilon - T_\varepsilon$ rispettivamente. Sarà identicamente

$$(20) \qquad I[z] = I_{1\varepsilon}[z] + I_{2\varepsilon}[z] + I_{3\varepsilon}[z] .$$

Per (13) intanto sarà evidentemente

$$(21) \qquad I_{1\varepsilon}[z(x, y; \varepsilon)] = I_{1\varepsilon}[\zeta(x, y)] .$$

Inoltre si ha per (14)

$$(22) \qquad \frac{I_{2\varepsilon}[z(x, y; \varepsilon)] - I_{2\varepsilon}[\zeta(x, y)]}{\varepsilon^4} = \\ = \frac{1}{\varepsilon^4} \int\!\!\int_{T_\varepsilon} \{ f(x, y, \zeta + \alpha x, \pi + \alpha, \chi) - f(x, y, \zeta, \pi, \chi) \} \, dx \, dy .$$

Ma si ha

$$(23) \quad \begin{cases} f(x, y, \zeta + \alpha x, \pi + \alpha, \chi) = f(0, 0, \zeta_0, \pi_0 + \alpha, \chi_0) + \\ \quad + x \dfrac{df(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\zeta} + \alpha\bar{x}, \bar{\pi} + \alpha, \bar{\chi})}{dx} + y \dfrac{df(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\zeta} + \alpha\bar{x}, \bar{\pi} + \beta, \bar{\chi})}{dy} \\ f(x, y, \zeta, \pi, \chi) = f(0, 0, \zeta_0, \pi_0, \chi_0) + \\ \quad + x \dfrac{df(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{\zeta}}, \bar{\bar{\pi}}, \bar{\bar{\chi}})}{dx} + y \dfrac{df(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}, \zeta, \bar{\bar{\pi}}, \bar{\bar{\chi}})}{dy} ; \end{cases}$$

dove $(\bar{x}, \bar{y})$, $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$ sono coppie di valori del tipo $(\theta x, \theta y)$ con $\theta < 1$, $\bar{\zeta}, \bar{\bar{\zeta}}$, ecc. i valori delle funzioni $\zeta, \pi, \ldots$ calcolati in detti punti, ed i simboli $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}$ indicano le derivate totali di f rapporto a x e y. Se chiamiamo M il massimo valore assoluto delle derivate parziali prime di $f(xyzpq)$ per i valori di (x, y) in R_ε, e per $z = \zeta(x, y)$, $p = \pi(x, y)$, $q = \chi(x, y)$, o per $z = \zeta(x, y) + \alpha x$, $p = \pi(x, y) + \alpha$, $q = \chi(x, y)$ e μ il massimo valore delle derivate prime e seconde di $\zeta(xy)$ nel campo stesso, avremo quindi da (23)

$$(24) \quad |\{f(x, y, \zeta + \alpha x, \pi + \alpha, \chi) - f(x, y, \zeta, \pi, \chi)\} - \\ - \{f(0, 0, \zeta_0, \pi_0 + \alpha, \chi_0) - f(0, 0, \zeta_0, \pi_0, \chi_0)\}| < M_1 [|x| + |y|]$$

con

$$M_1 = 2M(1 + 3\mu + \alpha).$$

E quindi, osservando che in T_ε è $|x| \leq \varepsilon^3 < \varepsilon$, $|y| \leq \varepsilon$, e che l'area di T_ε è ε^4 avremo, sostituendo in (22),

$$\left|\frac{I_{2\varepsilon}[z(xy; \varepsilon)] - I_{2\varepsilon}[\zeta(xy)]}{\varepsilon^4} - \{f(0, 0, \zeta_0, \pi_0 + \alpha, \chi_0) - f(0, 0, \zeta_0, \pi_0, \chi_0)\}\right| < \\ < \frac{1}{\varepsilon^4} M_1 \iint_{T_\varepsilon} [|x| + |y|]\, dx\, dy \leq 2 M_1 \varepsilon .$$

Onde infine si avrà

$$(25) \quad \lim_{\varepsilon=0} \frac{I_{2\varepsilon}[z(xy; \varepsilon)] - I_{2\varepsilon}[\zeta(xy)]}{\varepsilon^4} = \\ = f(0, 0, \zeta_0, \pi_0 + \alpha, \chi_0) - f(0, 0, \zeta_0, \pi_0, \chi_0) .$$

5. Resta che calcoliamo la parte relativa a $I_{3\varepsilon}$: e cioè, per (15), il limite

$$(26) \quad \lim_{\varepsilon=0} \frac{I_{3\varepsilon}[z(xy; \varepsilon)] - I_{3\varepsilon}[\zeta(xy)]}{\varepsilon^4} = \\ = \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\varepsilon^4} \iint_{R_\varepsilon - T_\varepsilon} [f(x, y, \zeta + \omega, \pi + \omega_x, \chi + \omega_y) - f(x, y, \zeta, \pi, \chi)]\, dx\, dy .$$

Ora si ha

$$(27) \quad \iint_{R_\varepsilon - T_\varepsilon} [f(x, y, \zeta + \omega, \pi + \omega_x, \chi + \omega_y) - f(x, y, \zeta, \pi, \chi)]\, dx\, dy = \\ = \iint_{R_\varepsilon - T_\varepsilon} [\varphi_z\, \omega + \varphi_p\, \omega_x + \varphi_q\, \omega_y]\, dx\, dy + \frac{1}{2} \iint_{R_\varepsilon - T_\varepsilon} \{\bar{f}_{z^2}\, \omega^2 + 2\, \bar{f}_{zp}\, \omega\, \omega_x + \\ + 2\, \bar{f}_{zq}\, \omega\, \omega_y + \bar{f}_{p^2}\, \omega_x^2 + 2\, \bar{f}_{pq}\, \omega_x\, \omega_y + \bar{f}_{q^2}\, \omega_y^2\}\, dx\, dy ;$$

dove $\overline{f}_{z^2} \ldots$ sono valori delle derivate seconde di $f(x, y, z, p, q)$ in punti della forma $(x, y, \zeta + \theta\omega, \pi + \theta\omega_x, \chi + \theta\omega_y)$. Se quindi N è il massimo valore assoluto delle derivate seconde di $f(x, y, z, p, q)$ in un intorno dei valori per cui xy è in R_ε, $z = \zeta(xy)$, $p = \pi(xy)$, $q = \chi(xy)$, avremo per (16), se ε è sufficientemente piccolo

$$(28) \quad \iint_{R_\varepsilon - T_\varepsilon} \left\{ \overline{f}_{z^2}\, \omega^2 + 2\overline{f}_{zp}\, \omega\, \omega_x + \cdots + \overline{f}_{y^2}\, \omega_y^2 \right\} dx\, dy <$$

$$< g\, N\, l^2 \varepsilon^4 \iint_{R_\varepsilon - T_\varepsilon} dx\, dy < g\, N\, l^2\, b\, \varepsilon^5 ,$$

poichè l'area di $R_\varepsilon - T_\varepsilon$ è minore di quella di R_ε e cioè di $b\varepsilon$.

D'altra parte integrando per parti al modo di Lagrange nel primo termine del secondo membro di (27), e rammentando che ζ soddisfa la (3), e che $\omega(xy)$ è nulla sul contorno di $R_\varepsilon - T_\varepsilon$ fuorchè sui segmenti t'_ε e t''_ε di equazioni (17), in cui essa assume i valori (18), avremo

$$(29) \quad \iint_{R_\varepsilon - T_\varepsilon} [\varphi_z\, \omega + \varphi_p\, \omega_x + \varphi_q\, \omega_y]\, dx\, dy =$$

$$= \alpha\varepsilon^2 \left[\int_0^{-\varepsilon} (y + \varepsilon)\, [\varphi'_p - \varphi'_q\, \varepsilon^2]\, dy - \int_\varepsilon^0 (y - \varepsilon)\, [\varphi''_p + \varphi''_q\, \varepsilon^2] \right] dy ,$$

dove φ'_p, φ'_q indicano le φ_p, φ_q calcolate nei punti $(17)'$, e φ''_p e φ''_q quelle calcolate nei punti $(17)''$. Ma per le ipotesi da noi fatte è sempre in R_ε

$$|\varphi_q(xy)| < M$$

$$|\varphi_p(xy) - \varphi_p(0\,0)| < 4\, N\, \mu\, [|x| + |y|] ;$$

quindi avremo per (29)

$$(30) \quad \left| \iint_{R_\varepsilon - T_\varepsilon} [\varphi_z\, \omega + \varphi_p\, \omega_x + \varphi_q\, \omega_y]\, dx\, dy + \alpha\varepsilon^4\, \varphi_p(0\,0) \right| =$$

$$= \left| \alpha\varepsilon^2 \left[\int_0^{-\varepsilon} (y + \varepsilon) \left\{ [\varphi'_p - \varphi_p(0\,0)] - \varphi'_q\, \varepsilon^2 \right\} dy - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_\varepsilon^0 (y - \varepsilon) \left\{ [\varphi''_p - \varphi_p(0\,0)] + \varphi''_q\, \varepsilon^2 \right\} dy \right] \right| \leq$$

$$\leq \alpha\varepsilon^2 \left[(8\, N\, \mu\, \varepsilon^2 + M\, \varepsilon^3) \int_{-\varepsilon}^0 dy + (8\, N\, \mu\, \varepsilon^2 + M\, \varepsilon^3) \int_0^\varepsilon dy \right] \leq$$

$$\leq \alpha\varepsilon^5 (16\, N\, \mu + 2\, M\, \varepsilon) ,$$

poichè nei punti di t'_ε e t''_ε è sempre $|x| + |y| < 2\varepsilon$.

Da (26), (27), (28) e (30) deduciamo

$$(31) \qquad \lim_{\varepsilon=0} \frac{I_{3\varepsilon}[z(xy\,;\,\varepsilon)] - I_{3\varepsilon}[\zeta(xy)]}{\varepsilon^4} = -\,\alpha\varphi_p(0\,0)\,.$$

Per (21), (25), (31) la disuguaglianza (19) si traduce nella (12), la quale risulta pertanto dimostrata.

6. È chiaro che dalla condizione di Weierstrass si deduce come per le funzioni di una variabile quella di Legendre.

Inoltre, quando si volesse confrontare la $z = \zeta(xy)$ solo con quelle funzioni $z(xy)$, le quali soddisfacciano ad es. ad una limitazione della forma $(p-\pi)^2 + (q-\chi)^2 \leq m$, basterebbe nella disuguaglianza (4) supporre $\alpha^2 + \beta^2 \leq m$.

Geometria. — *Sulle superficie algebriche d' ordine 6 con infinite coniche.* Nota II di GIUSEPPE MARLETTA, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO [1].

In questa Nota si assegnano le superficie algebriche d'ordine $n=6$, con infinite coniche tali che i loro piani costituiscano un inviluppo di classe $\mu = 3$, ovvero $\mu = 2$. Essa dunque, insieme con un'altra mia Nota [2], completa la classificazione delle superficie algebriche d'ordine $n=6$, con infinite coniche i cui piani costituiscano un inviluppo di classe $\mu > 1$.

1. Sia γ una superficie algebrica irriducibile d'ordine $n=6$, avente un fascio [3] di coniche (k) generalmente irriducibili.

Indichiamo con (π) l'inviluppo (irriducibile) costituito dai piani di queste, con μ la sua classe, e con s il numero di coniche di (k) esistenti in un piano generico di (π).

È noto [4] essere

$$(1) \qquad 12 = 2\mu s + \delta + 2\delta',$$

ove δ è il numero dei punti doppi dell'involuzione I_2^1 secata dalle coniche di (k) sopra una sezione piana generica c di γ; e δ' è il numero di quei punti (distinti o no) di c, su ognuno dei quali cadono (su due rami) due punti coniugati della detta I_2^1.

[1] Pervenuta all'Accademia il 9 ottobre 1915.

[2] *Sulle superficie algebriche d'ordine 6 con infinite coniche.* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXIV, ser. 5ª (1915)].

[3] È noto essere un fascio ogni sistema (necessariamente) ∞^1 irriducibile di coniche (generalmente irriducibili) esistente sopra una superficie algebrica d'ordine $n > 4$. Vedi De Franchis, *Le superficie irrazionali di 5° ordine con infinite coniche* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XV, serie 3ª (1906)].

[4] Vedi il mio studio *Sulle superficie algebriche con infinite coniche, e, in particolare, su quelle di ordine 5* [Atti dell'Accademia Gioenia, Catania, ser. 5ª, vol. VIII, (1915)], n.° 2.

Si noti, inoltre, che, indicando con p_c il genere di c, e con p_i il genere di I_2^1, cioè di (k), è (per la formula di Zeuthen) $\delta = 2(p_c + 1) - 4p_i$.

§ 1.

2. Sia $\mu = 3$.

Giacchè è $\delta > 0$ e $\delta' \geq 0$, dalla (1) si deduce $s = 1$.

Inoltre, siccome certamente esistono piani tangenti a tre coniche di (k), ma non a tutte le coniche di questo *fascio*, così è sempre $\delta \geq 3$; anzi $\delta \geq 4$ e, quindi, $\delta' < 2$.

3. Cominciamo a supporre che (π) sia gobbo (e quindi razionale).

Per $\delta' = 0$ la (1) dà $\delta = 6$, e quindi (n.° 1) $p_c = 2$.

Dunque γ è proiezione della superficie γ_1, dell'S_5, rappresentata, nel piano, dal sistema lineare $|\lambda^4{}_{1^2, 2, 3, 4, 5, 6, 7}|$, ove i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sono in posizione generica tra loro.

I piani delle coniche di γ_1, rappresentate dal fascio $|\lambda_1^1|$, generano una varietà (a tre dimensioni) la quale, come facilmente si dimostra, è d'ordine tre. Proiettando dunque γ_1 da una retta generica, dell'S_5 ambiente, in uno spazio ordinario, si ottiene una superficie γ avente un fascio di coniche (k), e i piani di queste costituiscono un inviluppo gobbo di classe $\mu = 3$.

4. Per $\delta' = 1$ la (1) dà $\delta = 4$, e quindi (n.° 1) $p_c = 1$.

La superficie γ è dunque proiezione della superficie γ_1, dell'S_6, rappresentata nel piano dal sistema lineare $|\lambda^3_{1, 2, 3}|$. I piani delle coniche del fascio (k_1), rappresentato da $|\lambda_1^1|$, generano una varietà (a tre dimensioni) d'ordine quattro. Ne segue che, per ottenere la superficie γ in esame, basta proiettare γ_1 da un piano ω che incontri (genericamente) un solo π_1 dei piani generatori della detta varietà. La traccia, nello spazio ordinario su cui si proietta, dell'$S_4 \equiv \omega\pi_1$, è quella retta (doppia per γ) che, contata due volte, è una conica del fascio (k) proiezione di (k_1).

5. Supponiamo, ora, che l'inviluppo (π) sia conico, e indichiamo con V il suo punto-base, punto che o non appartiene a γ, ovvero è triplo per questa e punto-base per (k).

Sia $p_i = 0$, cioè (π) sia razionale.

Ragionando come nel n.° 3, si dimostra che, per $\delta' = 0$, γ è proiezione di una superficie γ_1, dell'S_5, rappresentata nel piano dal sistema $|\lambda_{1^2, 2, 3, 4, 5, 6, 7}|$, ove i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 non sono in posizione generica tra loro, ma come ora si dirà.

Se i punti 2, 3, 4, 5, 6, 7 appartengono ad una stessa conica c', questa è immagine di una conica c_1 di γ_1, sulla quale le coniche del fascio (k_1), rappresentato da $|\lambda_1^1|$, segnano un'involuzione (quadratica); sia V_1 il centro di questa. È chiaro che, proiettando γ_1 da una retta generica, si ottiene nello spazio ordinario una superficie γ avente un fascio di coniche (k), i

cui piani inviluppano un cono razionale di classe $\mu = 3$; e il vertice V di questo cono, proiezione di V_1, non appartiene a γ.

6. Se supponiamo, in particolare, che i 7 punti (n.° 5) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 giacciano in una stessa conica c', questa rappresenta un punto V_1 che è triplo per γ_1 e punto-base per il fascio (k_1). Ne segue che, proiettando γ_1 da una retta generica, si ottiene una superficie γ con un fascio di coniche (k), i cui piani inviluppano un cono razionale di classe $\mu = 3$; il vertice di questo cono è un punto V triplo per γ e punto-base per (k).

7. Sia ora $\delta' = 1$, pur essendo ancora (π) razionale; sarà $\delta = 4$, e, quindi, $p_c = 1$.

La superficie γ è dunque proiezione della superficie γ_1, dell'S_6, rappresentata nel piano dal sistema lineare $|\lambda^3_{1, 2, 3}|$.

a) Siano 1, 2, 3 in posizione generica tra loro. Allora le coniche di γ_1 del fascio (k_1), rappresentato da $|\lambda^1_1|$, punteggiano proiettivamente le rette sghembe aventi per immagini il punto 1 e la retta $\lambda^1_{2, 3}$; le congiungenti i punti omologhi generano quindi una schiera rigata. Ebbene, si scelga come piano centro di proiezione un piano generico ω che incontri (in un sol punto P non di γ_1) questa schiera rigata, e si proietti γ_1 in uno spazio ordinario Σ; si otterrà la superficie γ richiesta. Infatti per P passa una generatrice g della schiera trasversale di quella detta poco sopra, generatrice che è incontrata da tutti i piani delle coniche di (k_1). Ne segue che per il punto V, traccia in Σ dello spazio ωg, passeranno tutti i piani delle coniche del fascio (k) proiezione di (k_1). Inoltre quella conica di (k_1), complanare con P, dà la retta doppia di γ, retta che, contata due volte, è una conica di (k); evidentemente l'inviluppo (π) dei piani delle coniche di (k), è razionale e di classe $\mu = 4 - 1 = 3$. Si noti, infine, che il punto V non appartiene a γ.

b) Supponiamo, invece, che i punti 1 e 2 siano infinitamente vicini tra loro, onde γ_1 è dotata di un punto doppio V_1 che è punto-base per (k_1). In questo caso, proiettando γ_1 da un piano ω che incontri genericamente un (solo) piano di una conica di (k_1), si ottiene una superficie γ con un fascio (k) di coniche, i cui piani inviluppano un cono razionale e di classe $\mu = 4 - 1 = 3$. Inoltre esiste una retta doppia di γ, la quale, contata due volte, è conica di (k). Si noti, infine, che il vertice V, del detto cono, è triplo per γ e punto-base per (k).

8. Supponiamo ora $p_i = 1$, cioè che l'inviluppo (π) sia ellittico. Per $\delta' = 0$, dalla (1) segue $\delta = 6$ e, quindi (n.° 1), $p_c = 4$. L'esistenza della superficie γ si può dimostrare con ragionamenti analoghi a quelli fatti nel n.° 8 della mia Nota citata per la prima. Comunque, eccone dimostrata l'esistenza per altra via ([1]).

([1]) Ancora: l'esistenza di γ è contemplata nel seguente teorema generale (che dimostrerò in un mio prossimo lavoro): *Per $s = 1$, $n = 2\mu$ e (k) dotato di punto-base, la superficie γ esiste.*

a) Stabilendo un'omografia tra i piani di uno spazio ordinario Σ e le quadriche, di un altro spazio ordinario Σ', passanti per sei punti generici di un cono cubico ellittico γ', si viene a stabilire fra Σ e Σ' una trasformazione doppia, in virtù della quale a γ' corrisponde in Σ una superficie γ d'ordine $n = 6$, con un fascio ellittico (k) di coniche i cui piani inviluppano un cono (ellittico) di classe $\mu = 3$ [1]. Il vertice di questo cono è, evidentemente, il punto V di Σ corrispondente a V', punto V che, dunque, è triplo per γ e punto-base per (k).

b) Fra i piani di un inviluppo (π) ellittico di classe $\mu = 3$, e le quadriche di un fascio $(\varkappa)$, esista una corrispondenza (2, 1), tale che esistano due piani di (π), ad ognuno dei quali corrisponda in $(\varkappa)$ una quadrica (degenere) della quale quel piano sia parte. Il luogo della conica comune a due elementi omologhi è, a prescindere dai detti due piani, la superficie γ richiesta.

Secondo che il vertice V del cono inviluppato da (π) appartiene ovvero no alla base di $(\varkappa)$, V sarà triplo per γ e punto-base per (k), ovvero non appartiene a γ.

9. Per $\delta' = 1$ è $\delta = 4$, e, quindi, $p_c = 3$.

Da quanto è noto [2] circa le superficie a sezioni piane di genere tre, la superficie γ esiste.

a) Sia γ_1 la superficie, dell'S_6, rappresentabile sul cono cubico ellittico mediante il sistema lineare delle curve segate dalle quadriche che toccano il cono in un punto fisso [3]. Proiettando γ_1 da uno generico dei piani incidenti essa in due punti, e incidenti il piano di una conica del fascio (ellittico) di coniche esistente in γ_1 stessa, si ottiene la superficie γ richiesta. La proiezione di detta conica sarà la retta doppia di γ che, contata due volte, è una conica del fascio di coniche (k) esistente in γ. I piani di queste coniche inviluppano, evidentemente, un cono ellittico di classe $\mu = 6 - 3 = 3$, il cui vertice V è triplo per γ e punto-base per (k).

b) La superficie γ è una di quelle studiate dal prof. Scorza [4]. In questo caso il vertice V, del cono inviluppato dai piani di (π), non appartiene a γ.

(1) Infatti la quartica base del fascio di quadriche passanti pei sopradetti sei punti, per il vertice V' di γ', e per un punto generico (di Σ'), seca ulteriormente γ' in $4 \cdot 3 - 6 - 3 = 3$ punti, onde nel detto fascio esistono tre (sole) quadriche che contengano generatrici di γ'.

(2) Castelnuovo, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere 3* [Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, vol. XXV (1890)]; e Scorza, *Le superficie a curve sezioni di genere 3* [Annali di matematica, ser. 3ª, tomo XVI].

(3) Castelnuovo, loc. cit., n.° 9.

(4) Scorza, loc. cit., n.i 26 e 50.

§ 2.

10. Sia $\mu = 2$.

Giacchè è $\delta > 0$ e $\delta' \geq 0$, dalla (1) si deduce $s < 3$.

11. Sia $s = 1$.

Cominciamo dall'osservare che il vertice V del cono quadrico, inviluppato dai piani di (π), o è doppio per γ e non punto-base per (k), ovvero è quadruplo per γ e punto-base per (k).

Dalla (1), inoltre, si deduce (n.° 2) $\delta' < 3$.

Per $\delta' = 0$ la (1) dà $\delta = 8$ e, quindi, (n.° 1) $p_c = 3$.

a) La superficie γ è dunque [1] proiezione della superficie γ_1, dell'S_4, rappresentata nel piano dal sistema lineare $|\lambda_{1^3, 2, 3, 4, \ldots\ldots, 11}^{5}|$, coi punti $1, 2, 3, 4, \ldots, 11$ in posizione generica tra loro.

I piani delle coniche del fascio (k_1), rappresentato da $|\lambda_1^1|$, costituiscono un S_0-cono quadrico, e il vertice V_1 di questo è doppio per γ_1. Proiettando dunque γ_1 da un punto generico dell'S_4 ambiente, si ottiene una superficie γ con un fascio di coniche (k) i cui piani inviluppano un cono quadrico, e il vertice V di questo è doppio per γ e non punto-base per (k).

b) Se, in particolare, i punti 2, 3, 4, 5, 6 sono collineari, siccome la loro retta rappresenta un punto V_1 quadruplo per γ_1 e punto-base per (k_1), così la proiezione di γ_1 sarà una superficie γ con un fascio di coniche (k) i cui piani inviluppano un cono quadrico, e il vertice V di questo è quadruplo per γ e punto-base per (k).

12. Per $\delta' = 1$ è $\delta = 6$ e quindi $p_c = 2$.

La superficie γ è dunque proiezione della superficie γ_1, dell'S_5, rappresentata nel piano dal sistema lineare $|\lambda_{1^2, 2, 3, 4, 5, 6, 7}^{4}|$.

a) Se i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sono in posizione generica tra loro, siccome i piani delle coniche del fascio (k_1), rappresentato da $|\lambda_1^1|$, generano una varietà cubica, proiettando γ_1 da una generica retta incidente uno (solo) π_1 di questi piani, si ottiene una superficie γ con un fascio di coniche (k) i cui piani inviluppano un cono quadrico, e il vertice V di questo è doppio per γ e non punto-base per (k).

b) Se, invece, i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 appartengono ad una stessa conica, allora, proiettando γ_1 come ora si detto, V risulta quadruplo per γ e punto-base per (k).

In ambedue i casi la traccia, nello spazio di γ, dello spazio ordinario individuato da π_1 e dalla retta centro di proiezione, è la retta doppia di γ, tale che, contata due volte, sia conica di (k).

13. Per $\delta' = 2$ è $\delta = 4$ e, quindi, $p_c = 1$.

La superficie γ è dunque proiezione della superficie γ_1, dell'S_6, rappresentata nel piano dal sistema lineare $|\lambda_{1, 2, 3}^{3}|$, qualora si scelga, come piano

[1] Castelnuovo, loc. cit.

centro di proiezione, uno generico ω dei piani, dell' S_6, incidenti, genericamente, due dei piani delle coniche del fascio (k_1) rappresentato da $|\lambda_1^1|$. Le tracce, nello spazio di γ, degli spazî a quattro dimensioni individuati da questi due piani con ω, sono due rette doppie per γ e, contate due volte, coniche del fascîo (k) proiezione di (k_1).

Il vertice V del cono quadrico inviluppato da (π), sarà

a) doppio per γ e non punto-base per (k), in generale;

b) mentre se i punti 1 e 2 sono infinitamente vicini tra loro, V sarà quadruplo per γ e punto-base per (k).

14. Sia, infine, $s = 2$, e, quindi, $\delta = 4$ e $\delta' = 0$.

L' ulteriore intersezione di γ con un piano generico di (π) è una conica irriducibile, la quale genera, al variare del piano, un fascio razionale (k') distinto da (k). Ne segue che γ è razionale, e, quindi, anche (k) sarà razionale; dunque è $p_c = 1$.

Ciò posto, si consideri la superficie γ_1, dell' S_6, rappresentata nel piano dal sistema lineare $|\lambda^3_{1,2,3}|$, ove i punti 1 e 2 sono infinitamente vicini tra loro. Indi si assegni un omografia tra le coppie di una g_2^1 del fascio $|\lambda_1^1|$, e le rette del fascio $|\lambda_3^1|$. Una coppia e una retta omologhe costituiscono l'immagine di una sezione iperpiana di γ_1. Si ottengono, così, ∞^1 iperpiani tali che per un punto generico, dell' S_6 ambiente, ne passano due (soli), onde essi appartengono tutti ad un S_3. Proiettando quindi γ_1 da un piano generico di questo spazio, si ottiene la superficie γ richiesta; il vertice V del cono quadrico inviluppato dai piani delle coniche di (k), sarà doppio per γ e punto-base per (k).

15. Dallo studio fatto possiamo concludere che

le superficie d'ordine $n = 6$, con infinite coniche i cui piani costituiscano un inviluppo di classe $\mu = 3$ ovvero $\mu = 2$, sono le diciassette superficie date nei numeri 3, 4, 5, 6, 7 (*a*, *b*), 8 (*a*, *b*), 9 (*a*, *b*), 11 (*a*, *b*), 12 (*a*, *b*), 13, (*a*, *b*,) 14.

Matematica. — *Gli autovalori e le autofunzioni dei nuclei simmetrici.* Nota II di ATTILIO VERGERIO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [1].

5. Calcoliamo i nuclei iterati di $F^{(2)}(st)$ [2]; si ha

$$F_2^{(2)}(st) = \int_a^b [K(sr) - H_1(sr)]\,[K(rt) - H_1(rt)]\,dr\,;$$

essendo

$$\int_a^b K(sr)\,H_1(rt)\,dr = \lim_{n=\infty} \int_a^b K(sr)\,\frac{K_{2n+1}(rt)}{\gamma^n}\,dr =$$

$$= \gamma \lim_{n=\infty} \frac{K_{2n+2}(st)}{\gamma^{n+1}} = \gamma H(st)\,,$$

ed anche (ved. § 3)

$$\int_a^b H_1(sr)\,H_1(rt)\,dr = \gamma H(st)\,,$$

otterremo

$$F_2^{(2)}(st) = K_2(st) - \gamma H(st)\,.$$

Analogamente

$$F_3^{(2)}(st) = K_3(st) - \gamma H_1(st)\,;$$

ed in generale

$$F_{2n}^{(2)}(st) = K_{2n}(st) - \gamma^n H(st)$$

$$F_{2n+1}^{(2)}(st) = K_{2n+1}(st) - \gamma^n H_1(st)\,.$$

Posto ora

$$U'_{2n} = \int_a^b \int_a^b \{F_n^{(2)}(st)\}^2\,ds\,dt \quad ; \quad \Gamma_2^{(n)} = \frac{U'_{2n+1}}{U'_{2n}}\,.$$

sarà

$$U'_{4n+2} = U_{4n+2} - \gamma^{2n+1} U$$

$$U'_{4n} = U_{4n} - U\gamma^{2n} U\,;$$

da cui

$$\Gamma_2^{(n)} = \gamma\,\frac{\dfrac{U_{4n+2}}{\gamma^{2n+1}} - U}{\dfrac{U_{4n}}{\gamma^{2n}} - U}\,.$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 24 settembre 1915.
[2] Ved. la mia Nota I.

Ed ancora, posto

$$\Gamma_2 \lim_{n=\infty} \Gamma_2^{(n)},$$

si avrà

$$\Gamma_2 = \gamma \lim_{n=\infty} \frac{\frac{U_{4n+2}}{\gamma^{2n+1}} - U}{\frac{U_{4n}}{\gamma^{2n}} - U}.$$

E poichè il minimo modulo degli autovalori di $F^2(st)$ è $\left|\frac{1}{\sqrt{\Gamma_2}}\right|$, avremo, per $|\lambda_2|$, la seguente espressione:

$$|\lambda_2| = \frac{1}{|\sqrt{\gamma}|} \left| \lim_{n=\infty} \frac{\frac{U_{4n}}{\gamma^{2n}} - U}{\frac{U_{4n+2}}{\gamma^{2n+1}} - U} \right|^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{|\sqrt{\gamma}|} \left| \lim_{n=\infty} R_n^{(1)} \right|^{\frac{1}{2}} \text{ (1)}.$$

Si presentano ora tre casi:

1°) $\lim_{n=\infty} R_n^{(1)} = 1$, e quindi $|\lambda_2| = \left|\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right|$. Il nucleo $K(st)$ ammette allora ambedue i valori $+\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ e $-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, come autovalori;

2°) $\lim_{n=\infty} R_n^{(1)} > 1$ e finito; si ha allora per $|\lambda_2|$ un valore maggiore di $|\lambda_1|$ (2);

3°) il rapporto $R_n^{(1)}$ non tende ad alcun limite; allora la ricerca degli autovalori è esaurita, e $K(st)$ ammette uno solo dei due valori $\pm\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, come autovalori. Questo caso si presenta quando $F^{(2)}(st) = 0$; le costanti γ_n di $K(st)$ sono allora tutte eguali tra loro, ed i due termini di $R_n^{(1)}$ sono sempre nulli, qualunque sia n.

6. Supposto che quest'ultimo caso non si verifichi, si consideri la funzione

$$F^{(3)}(st) = F^{(2)}(st) - H_1^{(2)}(st),$$

(1) Si osservi che essendo $\frac{U_{4n+2}}{\gamma^{2n+1}} \leq \frac{U_{4n}}{\gamma^{2n}} \leq U$ (Schmidt, loc. cit., § 11), il rapporto $R_n^{(1)}$, per ogni n finito, è sempre positivo: tale dovrà quindi essere anche il suo limite, quando esiste. Inoltre, essendo $R_n^{(1)} \geq 1$, dovrà essere $\lim_{n=\infty} R_n^{(1)} \geq 1$.

(2) In questo caso, $K(st)$ ammetterà uno solo dei due autovalori $\pm\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$; per stabilirne il segno, ci si potrà servire del criterio esposto alla fine del § 3.

dove

$$H_1^{(2)}(st) = \lim_{n=\infty} \frac{F_{2n+1}^{(2)}(st)}{\Gamma_2^n} ;$$

e si ripeta per la $F^{(3)}(st)$ il ragionamento fatto per la $F^{(2)}(st)$. Arriveremo così a trovare per $|\lambda_3|$ la seguente espressione:

$$|\lambda_3| = \frac{1}{|\sqrt{\Gamma_3}|} = \frac{1}{|\sqrt{\Gamma_2}|} \left| \lim_{n=\infty} \frac{\frac{U'_{4n}}{\Gamma_2^{2n}} - U'}{\frac{U'_{4n+2}}{\Gamma_2^{2n+1}} - U'} \right|^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{|\sqrt{\Gamma_2}|} \left| \lim_{n=\infty} R_n^{(2)} \right|^{\frac{1}{2}} ,$$

dove potremo ripetere per limite di $R_n^{(2)}$ le stesse considerazioni fatte più sopra per $R_n^{(1)}$ e continuare, nel caso, la ricerca di nuovi autovalori considerando la funzione

$$F^{(4)}(st) = F^{(3)}(st) - H_1^{(3)}(st) ;$$

e così via indefinitamente, sino a ricerca esaurita. Si arriverà così ad ottenere tutti gli autovalori di $K(st)$.

7. Vediamo ora come si possano determinare tutte le autofunzioni del del nucleo $K(st)$. Evidentemenle basterà limitarsi a mostrare come si possano trovare quelle corrispondenti agli autovalori $\pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, perchè, nello stesso modo, si potranno trovare quelle di $F^{(2)}(st)$, $F^{(3)}(st)$, ... relative agli autovalori $\pm \frac{1}{\sqrt{\Gamma_2}}$ $\pm \frac{1}{\sqrt{\Gamma_3}}$, ... ; le quali, come già sappiamo, sono le autofunzioni di $K(st)$ corrispondenti agli autovalori λ_2, λ_3, ...

Osserviamo, anzitutto, che, se $\chi(s)$ è una funzione qualunque finita ed integrabile, le autofunzioni di $K(st)$, relative all'autovalore $+\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, saranno *tutte* rappresentate dall'espressione

$$\int_a^b H(st)\, \chi(t)\, dt + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \int_a^b H_1(st)\, \chi(t)\, dt . \tag{8}$$

Invero si consideri l'equazione integrale di 2ª specie

$$\chi(r) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \int_a^b K(rt)\, \chi(t)\, dt = \varphi(r) ,$$

dove $\varphi(r)$ è un'autofunzione di $K(st)$ relativa all'autovalore $+\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$.

Essendo $K(rt)$ una funzione simmetrica, l'equazione precedente ammetterà [1] almeno una soluzione $\chi_1(t)$; moltiplicandone allora ambo i membri per $H(sr)\,dr$, ed integrando, si otterrà [2]

$$\int_a^b H(sr)\,\chi_1(r)\,dr + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\int_a^b H_1(sr)\,\chi_1(r)\,dr = \varphi(s)\,,$$

il che prova quanto si voleva.

Potremo allora scegliere p_1 (ved. § 3) funzioni $\chi_1(s)\,,\chi_2(s)\,,\ldots,\chi_{p_1}(s)$ tali che, per esse, la (8) rappresenti le p_1 autofunzioni linearmente indipendenti cercate.

In modo affatto analogo si dimostrerebbe che tutte le autofunzioni di $K(st)$, corrispondenti all'autovalore $-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, sono rappresentate dall'espressione

$$\int_a^b H(st)\,\chi(t)\,dt - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\int_a^b H_1(st)\,\chi(t)\,dt\,, \tag{9}$$

e che le p_2 autofunzioni linearmente indipendenti, relative all'autovalore $-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, si potranno avere mediante la scelta opportuna di p_2 funzioni $\chi(s)$.

Ripetendo il ragionamento precedente per le funzioni $F^{(2)}(st)\,,F^{(3)}(st)\,,\ldots$ si arriverà a trovare le autofunzioni linearmente indipendenti di $K(st)$ relative agli autovalori $\lambda_2\,,\lambda_3\,,\ldots$

Osservazione — Se per funzione $\chi(t)$ assumiamo la $H(t\,,r')$, dove r' indica un valore qualunque di r, entro il suo campo di variabilità, le (8) e (9) diventano rispettivamente

$$H(sr') + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}H_1(sr') \tag{8'}$$

$$H(sr') - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}H_1(sr'): \tag{9'}$$

e può darsi che sia possibile di trovare p_1 e p_2 valori r_i di r tali che, per essi, le (8') e (9') rappresentino rispettivamente le p_1 e p_2 autofunzioni linearmente indipendenti cercate. Perchè ciò accada, è sufficiente che, per

[1] Schmidt, loc. cit., § 10. La soluzione sarà unica se $K(st)$ non ammette $-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ come autovalore; in caso contrario, ve ne saranno infinite, essendo le autofunzioni di $K(st)$, relative a $-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, ortogonali alla $\varphi(r)$.

[2] È facile il vedere che $\int_b^a H(sr)\,\varphi(r)\,dr = \varphi(r)$; basta ragionare come al § 2.

tali valori r_i, il wronskiano delle funzioni

$$H(sr_i) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} H_1(sr_i) \qquad (i = 1, 2, .., p_1)$$

e quello delle

$$H(sr_i) - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} H_1(sr_i) \qquad (i = 1, 2 ...., p_2)$$

siano diversi da zero.

Nel caso, poi, che $K(st)$ ammetta uno solo dei due valori $\pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, come autovalore, una delle due funzioni (8) e (9) dovrà esser nulla, qualunque sia la $\chi(t)$; e quindi tale anche una delle (8') e (9'), per ogni valore di r; dovrà cioè sussistere una delle due seguenti uguaglianze:

$$H(st) \pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}} H_1(st) = 0,$$

la quale ci fornirà un secondo criterio (ved. § 3) per riconoscere quale dei due valori $\pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ la $K(st)$ ammetta come autovalore.

Microbiologia. — *Ulteriori ricerche sull'attività proteolitica dei fermenti lattici. I. L'influenza della temperatura* [1]. Nota del prof. COSTANTINO GORINI, presentata dal Socio G. BRIOSI [2].

Nel 1897 [3] ho dimostrato come la scomposizione del lattosio e della caseina per opera di uno stesso batterio stia in rapporto colle condizioni di temperatura, nel senso che la peptonificazione della caseina si compie preferibilmente a bassa temperatura (mentre la scomposizione del lattosio si compie preferibilmente ad alta temperatura); la medesima osservazione ho ripetuto in successivi lavori [4] descrivendo varî tipi di batterî acido-proteditici che isolai dalle mammelle vaccine e dal formaggio; in un più recente studio [5] sulla differenziazione dei fermenti lattici ho fatto risaltare

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Batteriologia della R. Scuola superiore di Agricoltura di Milano.

[2] Pervenuta all'Accademia il 21 settembre 1915.

[3] Gorini C., Boll. Uff. del Minist. Agricoltura, Roma 1897; *Annales de Micrographie*, Paris 1897, IX, pag. 433.

[4] Gorini C., Rend. R. Ist. Lomb. Sc. e Lett., 1907, XL, pag. 47; Rend. R. Acc. Lincei, 1910, pag. 150 e 1911, pag. 284.

[5] Gorini C., Rend. R. Acc. Lincei, 1912, pag. 790.

la particolarità di certe specie che solamente a bassa temperatura rivelano il loro potere caseolitico, onde misi in guardia contro il possibile errore di ritenere non proteolitici certi fermenti lattici in causa dell'elevata temperatura a cui sono coltivati [1]. Siffatto errore è tanto più facile quando si tratta di germi dotati di una scala termometrica di sviluppo ristretta, che pigramente vegetano alla temperatura bassa più confaciente per la proteolisi. Ho indicato però come si possa anche in simili casi accertare l'azione peptonizzante dei fermenti lattici, pur che si abbia cura di promuoverne dapprima lo sviluppo alla temperatura *optimum* e di portarli poi per tempo alla temperatura bassa voluta, facendo entrare in giuoco gli endo- ed ecto-enzimi proteolitici elaborati dai batterî durante il florido sviluppo iniziale.

Richiamai inoltre l'attenzione sulla diversità delle qualità organolettiche che presenta il siero di peptonificazione dato da un medesimo fermento lattico a seconda della temperatura di sviluppo; diversità di caratteri organolettici che lascia presumere differenze nei prodotti di caseolisi.

Volendo controllare con dati analitici siffatte constatazioni, ho pensato che, di fronte alle difficoltà e incertezze tuttora esistenti nella identificazione dei singoli derivati di degradazione proteica, potesse bastare, a titolo di saggio, la determinazione comparativa dell'azoto solubile che è precipitato dall'acido tannico, dal solfato ammonico e dall'acido fosfovolframico [2]. Ho voluto vedere cioè se prendendo culture in latte rigorosamente parallele di un medesimo batterio, tenute a diverse temperature, e sottoponendole ai suddetti trattamenti, si ottenessero differenze di risultato sufficienti per farsi un' idea circa l' influenza della temperatura sull'attività peptonizzante di quel batterio.

Ho scelto come soggetti due specie di fermenti lattici appartenenti al gruppo dei miei batterî acidopresamigeni che a siffatta influenza termica si palesavano soggetti anche giudicando semplicemente all'aspetto ed al sapore del siero di solubilizzazione.

Queste due specie diversificano fra loro nelle culture in latte per i seguenti caratteri, in conformità ai criterî da me stabiliti per la differenziazione dei fermenti lattici [3].

[1] A conferma delle mie ricerche, Chr. Barthel di Stoccolma ha riferito ultimamente, al sesto Congresso internazionale di latteria di Berna 1914, di fermenti lattici del tipo *Streptococcus* che gli si rivelarono capaci di peptonificare la caseina pur che fossero coltivati *a temperature basse* fra 15 e 20° C.

[2] Senza entrare nel dibattito tuttora vivo fra gli Autori, ricorderò solamente che dalla maggioranza si ritiene: *a*) che l'acido tannico precipiti tanto le albumosi quanto i peptoni, di cui però alcuni sarebbero solubili in eccesso; *b*) che il solfato ammonico precipiti le albumosi e non i peptoni; *c*) che l'acido fosfotungstico precipiti i peptoni e fors'anco gli aminoacidi. Ora poi si è trovato che alcuni di questi precipitati proteici sono ridisciolti parzialmente nel lavaggio (Van Slyke, Handb. d. biochem. Arbeitsmethoden, vol. V, pag. 1017).

[3] Gorini C., Rend. R. Acc. Lincei, 1912, XXI, pag. 790.

La specie A ha forma bacillare; presenta una scala termometrica di sviluppo assai ampia, prosperando pressochè ugualmente bene fra 25° e 35° C.; coagula il latte in 24 ore con un potenziale acidificatore abbastanza alto che può toccare il 9 per mille in acido lattico; appartiene ai fermenti lattici che ho chiamato *precocemente proteolitici.*

La specie B ha forma coccica o cocco-batterica; presenta una scala termometrica di sviluppo ristretta, con un *optimum* circoscritto attorno ai 35° C.; coagula il latte in due tre giorni con un potere acidificatore debole che a stento raggiunge il 5 per mille in acido lattico; appartiene ai fermenti lattici che ho designato *tardivamente proteolitici.*

Per le ricerche, di cui è parola, ho coltivato questi batterî in beute Erlenmeyer da 300 centimetri cubici contenenti ciascuna 250 cm^3 di latte sterilizzato in autoclave per 20 minuti a 120° C. Trattandòsi di indagini comparative assai delicate, ho curato che il latte fosse della medesima qualità e appartenesse alla medesima seduta di sterilizzazione; ciò in omaggio alle mie precedenti osservazioni sull'influenza che divarii anche minimi e inafferrabili sia nelle qualità originarie, sia nella sterilizzazione del latte, possono esercitare nel comportamento delle culture.

Le seminagioni venivano fatte con quantità uguali (1 cm^3) di una medesima cultura ben sviluppata in latte di ciascun batterio, e le culture venivano messe per un dato tempo a temperature diverse, agitandole quotidianamente fino al giorno dei saggi chimici.

In tale giorno si facevano anzitutto debiti trapianti in latte e in agar-lattosato per accertare che il batterio era ancora in vita e ancora allo stato di purezza (Queste verifiche risultarono sempre positive). Indi la cultura, che era stata pesata all'inizio, veniva riportata con acqua stillata al peso originario, a compensazione delle perdite dovute ad evaporazione durante l'incubazione, la quale talora si protrasse fino a 45 giorni.

Poscia la cultura veniva filtrata attraverso carta e sul siero filtrato si procedeva alle varie determinazioni.

A tal uopo il siero veniva diviso in porzioni da 10 cm^3 ciascuna, che servivano per le seguenti operazioni:

1) Determinazione dell'acidità con soluzione decinormale di soda (indicatore fenolftaleina). (Questa determinazione era consigliabile, ben conoscendo che anche l'acidità per sè sola può influire sulla proteolisi).

2) Trattamento con acido nitrico per vedere se il siero filtrato contenesse ancora albuminoidi non solubilizzati (Ciò non si verificò mai, o solamente in minime traccie).

3) Trattamento con acido tannico a freddo, fino ad avere eccesso di precipitante.

4) Trattamento con solfato ammonico a saturazione a freddo.

5) Trattamento con reattivo Scheibler all'acido fosfovolframico a freddo fino ad eccesso di precipitante (Il reattivo Scheibler si compone, come è noto, di acido fosfovolframico gr. 0,30, alcool a 96°, gr. 20, acqua stillata gr. 180, acido cloridrico gr. 1).

I precipitati che si ottenevano nei singoli trattamenti, venivano raccolti su filtri Berzelius tarati e poi pesati previa essiccazione a 100° C. fino a costanza di peso.

Quanto al precipitato del solfato ammonico, non essendo esso suscettibile di lavaggio, veniva dosato il solfato d'ammonio contenuto e, per differenza, si otteneva il peso del precipitato proteico.

I saggi eseguiti sono ripartibili in quattro gruppi: due col fermento A e due col fermento B. I risultati ottenuti sono consegnati nella sottostante tabella, ove i valori dei singoli precipitati, che chiamo *valori di proteolisi*, rappresentano le percentuali in rapporto al siero filtrato. L'acidità vi è espressa in acido lattico. Le temperature di cultura poste a raffronto sono tre: termostato a 35° C., termostato a 25° C., e temperatura ambiente fra 15° e 20° C.

In ciascuna finca delle temperature è indicato il tempo durante il quale la cultura stette alla temperatura corrispondente.

Gruppo	Cultura	Batterio	Temperatura della cultura			Acidità (°/oo acido lattico)	Valori di proteolisi precipitati con:		
			35° C.	25° C.	15°-20° C.		Acido tannico	Acido fosfotungstico	Solfato ammonico
I	1	A	1 giorno		4 giorni	4.85	0.44	2.81	1.16
	2	»		5 giorni		5.94	0.57	2.40	0.88
	3	»	5 giorni			5.94	0.65	1.07	0.25
II	4	»		45 giorni		9.00	2.07	5.05	1.23
	5	»	45 giorni			8.55	2.46	2.32	0.72
III	6	B		19 giorni		2.29	1.43	1.14	0.94
	7	»	2 giorni	17 giorni		2.74	1.77	2.83	1.68
	8	»	19 giorni			2.96	1.22	1.31	1.20
IV	9	»	2 giorni		24 giorni	2.70	1.94	3.77	1.97
	10	»		26 giorni		3.69	1.645	1.78	1.03
	11	»	26 giorni			4.86	2.42	1.79	1.42

Da uno sguardo d'assieme alla tabella emerge che differenze nei valori di proteolisi (che per brevità designerò con VP) se ne sono avute, e differenze anche abbastanza apprezzabili, a seconda della temperatura di sviluppo.

All' incontro non si nota nessun legame fra i VP e i gradi di acidità (che per brevità designerò con GA); vero è che ai più alti GA segnati nella tabella (ved. gruppo II) corrispondono anche i più alti VP, ma ciò è in relazione col più progredito sviluppo delle culture 4 e 5 che sono durate 45 giorni, per cui si ebbe naturalmente un più profondo attacco, come della caseina (peptonizzazione), così del lattosio (acidificazione). Ma se paragoniamo le culture parallele degli altri gruppi, scorgiamo talora anzi un rapporto inverso fra acidificazione e peptonificazione, che è quanto dire un rapporto diretto fra acidificazione e temperatura di sviluppo, lo che viene a rafforzare la mia antica osservazione sul vantaggio che l'attacco microbico del lattosio, oppostamente a quanto accade per l' attacco della caseina, risente dalle temperature elevate. Il fatto poi che fra le culture 4 e 5 la più acidificata è quella tenuta a temperatura più bassa (a 25° invece che a 35° C.), si spiega quando si faccia distinzione fra rapidità e intensità di attacco del lattosio, per cui a temperatura alta la cultura si inacidisce più precocemente ma, col progredire dell'età, essa raggiunge un massimo di acidificazione superiore a bassa che ad alta temperatura; col medesimo meccanisme si capisce come le culture 2 e 3 sebbene tenute a diversa temperatura abbiano, in capo a cinque giorni, raggiunto pari grado di acidità.

Passando ora ad esaminare nel loro complesso le tre finche dei VP, osserviamo alcune discordanze specialmente fra i precipitati tannici e gli altri due precipitati; talora il primo è in aumento, mentre i secondi sono in diminuzione (v. ad es. il gruppo I), e viceversa (v. ad es. il gruppo III). Invece i due precipitati dati dall'acido fosfovolframico e dal solfato ammonico presentano fra loro una concordanza costante, se non sempre proporzionata, negli aumenti e nelle diminuzioni. Le discrepanze della reazione tannica parmi trovino fondamento nell'indeterminatezza degli Autori circa il potere precipitante dell'acido tannico sui derivati azotati solubili, alcuni dei quali verrebbero anzi ridisciolti in eccesso di reattivo. Del resto tanto queste disparità nella reazione tannica, quanto la deficienza di proporzionalità fra le reazioni del solfato ammonico e dell'acido fosfotungstico, possono interpretarsi altresì come indizî di quella sopraenunciata diversità *qualitativa*, oltrechè quantitativa, di prodotti proteolitici che un medesimo batterio potrebbe dare a seconda della temperatura, in accordo con la diversità di caratteri organolettici che ho notato nel siero di peptonificazione a seconda della temperatura della cultura.

Comunque sia di ciò, appagandomi per ora di valutare la quantità complessiva dei prodotti proteolitici, ritengo miglior consiglio di porre in seconda linea i valori dei precipitati tannici e di assumere come guida i valori cumulativi delle altre due reazioni. Analizziamo adunque partitamente i risultati dei singoli gruppi per vedere se e come essi depongano in appoggio

delle mie constatazioni precedenti, se e come cioè l'azione caseolitica sia favorita dalla bassa temperatura.

Nel gruppo I abbiamo tre culture del bacillo A (a scala termica ampia) tenute a temperature diverse per cinque giorni; si nota un valore di peptonificazione sensibilmente maggiore nella cultura 2 tenuta a 25° C., che nella cultura 3 tenuta a 35° C. pur avendo raggiunto pari grado di acidità; maggiore ancora poi è il valore di peptonificazione nella cultura 1, che venne tenuta a 35° C. per 1 giorno, affine di accelerarne lo sviluppo iniziale, e poi alla temperatura ambiente per 4 giorni, sebbene abbia raggiunto un grado di acidità inferiore.

Nel gruppo II abbiamo due culture del medesimo fermento A tenute a diversa temperatura per un mese e mezzo, raggiungendo un GA molto più elevato delle culture del gruppo I, ma differenti fra loro, per le ragioni sovraesposte. Anche qui la cultura 4 tenuta a 25° C. è assai più peptonificata della cultura 5 tenuta a 35° C.

Nel gruppo III abbiamo tre culture del fermento B (a scala termica ristretta) tenute per ugual tempo a diverse temperature, raggiungendo un grado di acidità diverso. Qui ci troviamo davanti a fatti parzialmente contradittorî. Se badiamo all'acidità, confrontando la cultura 6 colle culture 7 e 8, scorgiamo un rapporto diretto fra il VP e il GA; infatti la 6 con acidità di 2.29 ha minor VP delle 7 ed 8 con GA maggiore; ma confrontando invece le culture 7 ed 8 fra loro, il rapporto diventa inverso, poichè quest'ultima con acidità di 2.96 presenta un VP decisamente più basso della 7 che ha un'acidità di soli 2.74. Se badiamo invece alla temperatura di sviluppo, ravvisiamo nelle culture 6 e 8 un risultato opposto a quello osservato nel fermento A; la cultura 8 tenuta a 35° C. presenta un VP maggiore della cultura 6 tenuta per ugual tempo a 25° C.; all'incontro nelle culture 7 ed 8 abbiamo un fatto analogo a quello dell'A. Come si spiegano questi divari contradditorî? Basta riflettere che il fermento B ha una scala termica di sviluppo più ristretta; mentre l'A si sviluppa ugualmente bene tanto a 35° C. quanto a 25° C., il B si sviluppa più lentamente a 25° C. che a 35° C., onde questo ritardo nella moltiplicazione cellulare si esplica così in un GA minore, come in un VP minore. Ma se, come nel caso 6, si ha cura di promuovere inizialmente la moltiplicazione cellulare tenendo la cultura dapprima per un paio di giorni alla temperatura eugenesica di 35° C., allora, sebbene venga poi messa a 25° C., essa, pur restando arretrata nel processo di acidificazione in confronto alla cultura conservata sempre a 35° C., rivela un processo di peptonificazione più intenso non solamente della consorella tenuta per ugual tempo sempre a 25° C., ma anche di quella tenuta per ugual tempo sempre a 35° C.

Ancora più convincente appare siffatto comportamento nelle tre culture del gruppo IV, appartenenti al medesimo fermento B, che furono tenute per

ugual tempo una a 35° C., una seconda a 25° C. e la terza in parte a 35° C. e in parte a 15-20° C. Fra le culture 10 e 11, raggiunse un VP alquanto maggiore la 11 con una temperatura di sviluppo e un GA superiori; ma entrambe furono superate di parecchio nel VP dalla cultura 9, sebbene questa sia stata tenuta, almeno per la maggior parte del tempo, a temperatura molto inferiore ed abbia raggiunto un GA notevolmente minore delle consorelle.

Riassunto e deduzioni. — Riassumendo adunque le presenti ricerche recano un nuovo contributo analitico alla dimostrazione da me già data da tempo (1897) circa l'*influenza favorevole che le basse temperature esercitano sull'attività proteolitica dei fermenti del latte.* Da esse inoltre scaturiscono varie deduzioni interessanti per lo studio sulla biologia dei fermenti lattici.

In primo luogo ne deriva che *l'attività caseolitica dei fermenti lattici va studiata, in modo particolare, nelle culture tenute a bassa temperatura.* Ciò è consigliabile anche qualora a questa temperatura lo sviluppo della cultura fosse inceppato, imperocchè in tal caso basta ricorrere all'*espediente* di tenerla dapprima, solo per breve tempo, alla temperatura *optimum* per lo sviluppo iniziale, e portarla poi alla temperatura bassa, opportuna per la proteolisi.

In secondo luogo le mie ricerche vengono ad *allargare sempre più la schiera dei miei fermenti lattico-proteolitici capaci di peptonizzare la caseina in ambiente acido.* Infatti esse permettono di presumere che molte specie di fermenti lattici che gli Autori dichiararono sprovviste o quasi di potere caseolitico, tali apparissero loro unicamente perchè erano state studiate soltanto in culture tenute a temperature elevate, le quali saranno state propizie bensì per lo sviluppo del germe e per l'attacco del lattosio, ma non erano confacienti all'attacco della caseina. Tutto ciò viene a provare lucidamente che *la temperatura optimum non è la medesima per tutte le funzioni di un dato microbio.*

In terzo luogo torna acconcio ribadire in questa occasione l'ammonimento che ho già dato altre volte [1], *essere insostenibile il nesso*, ammesso dagli Autori, *fra la forma e l'attività fisiologica dei fermenti lattici.* Qui noi abbiamo constatato, infatti, che il medesimo comportamento nei riguardi dell'attività proteolitica rispetto alla temperatura, si è manifestato tanto presso un fermento lattico di forma bacillare (A), quanto presso un fermento lattico di forma coccica (B). Molte differenze di attività fisiologica che sono state ravvisate fra certi bacilli e certi cocchi lattici devono verisimilmente essere legate piuttosto a questioni di razze o varietà di una stessa specie, che non a questioni di forma.

[1] Gorini C., Rend. R. Acc. Lincei, 1912, XXI, pag. 472.

Da ultimo i valori di proteolisi indicati nella tabella, a seconda dei reattivi usati, mostrano la possibilità di verificare pure per via analitica una *differenza non soltanto quantitativa, ma anche qualitativa nei prodotti proteolitici* dati dai fermenti lattici a norma della temperatura; ciò in appoggio a quanto io ho pure messo in luce circa la diversità nei caratteri organolettici del siero di peptonificazione che è dato da un medesimo fermento lattico a seconda della temperatura di sviluppo (1).

Volendo ora darsi ragione della maggiore attività caseolitica a temperatura bassa, deve aver peso la considerazione che a questa temperatura i fermenti lattici attaccano più lentamente il lattosio, onde il latte raggiunge più tardivamente, che a temperatura alta, un grado di acidità capace di attenuare e arrestare lo sviluppo dei batteri, i quali possono così continuare più a lungo l'attacco della caseina. Questa spiegazione però non è sufficiente, almeno non per tutti i casi, imperocchè il fenomeno della maggiore attività caseolitica a temperatura bassa si verifica anche quando si abbia cura di aggiungere al latte del carbonato di calce, in guisa da neutralizzare gradatamente la formantesi acidità. Ritornerò su questo punto in altra occasione.

(1) Idem, ibid., pag. 790.

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXIV. (1892-1915). Fasc. 8º. Sem. 2º.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIV. (1892-1915). Fasc. 5-6.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XI. Fasc. 3.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XV. Fasc. 1-2.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.º — *Roma, Torino e Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa e Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie, sino al 17 ottobre 1915.

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 24 novembre 1915.* **N. 9.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 novembre 1915.

Volume XXIV°. — Fascicolo 9°

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 novembre 1915.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla generazione, per rotolamento, delle superficie isoterme e delle superficie a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI [1].

1. In due successive Note pubblicate in questi Rendiconti [2], applicando i teoremi generali sul rotolamento di superficie applicabili, ho dedotto, da ogni trasformazione D_m di Darboux di una superficie isoterma, una generazione della superficie stessa come superficie di rotolamento; e similmente, da ogni trasformazione E_m di Eisenhart di una superficie Σ a rappresentazione isoterma delle sue linee di curvatura, una generazione di Σ come inviluppo di rotolamento. Indicando con (S, S_0) le corrispondenti coppie di superficie applicabili, di cui la prima, S, è la superficie d'appoggio, e la seconda, S_0, la superficie rotolante, nel primo caso è un punto O, satellite di S_0, che descrive la superficie isoterma quando si fa rotolare S_0 sopra S; nel secondo è un piano π (satellite di S_0) che inviluppa la superficie Σ a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura. Alla questione, già posta nelle Note citate, di caratterizzare, dal punto di vista della deformazione, queste speciali coppie di superficie applicabili (S, S_0), siamo ora in grado

[1] Pervenuta all'Accademia il 3 novembre 1915.

[2] Fasc. 4° e 5°, 1° semestre 1915 (sedute del 21 febbraio e del 7 marzo). Saranno qui citate come Nota 1), e Nota 2).

di rispondere in modo tanto più completo, in quanto le recenti ricerche di Eisenhart ([1]) permettono di invertire in certo modo i miei primi risultati.

Si osservi, intanto, che le superficie S d'appoggio nelle nostre coppie (S, S_0) di superficie applicabili sono già perfettamente caratterizzate come luoghi dei centri delle sfere dell'inviluppo nella corrispondente trasformazione D_m, ovvero nella E_m. Ma per questo secondo caso si determineranno ulteriormente dalle loro relazioni colle deformate del paraboloide rotondo (ved. n. 8).

Quanto poi alle superficie rotolanti S_0, le potremo caratterizzare da una proprietà geometrica del sistema (u, v) coniugato, comune alla S_0 ed alla sua deformata S, sistema che è sempre reale e corrisponde alle linee di curvatura delle due falde dell'inviluppo. La proprietà in discorso è la seguente:

A) *Nel caso delle superficie isoterme il sistema coniugato permanente* (u, v) *della superficie rotolante* S_0 *si proietta, dal punto satellite* O, *sopra una sfera di centro* O, *in un sistema ortogonale.*

B) *Nel caso delle superficie a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura, il sistema coniugato permanente* (u, v) *di* S_0 *si proietta ortogonalmente sul piano satellite* π *in un sistema ortogonale.*

È chiaro che, siccome la proiezione centrale sulla sfera è una proiezione ortogonale, le superficie S_0 del caso B) sono da riguardarsi come un caso limite dell'altro, A), quando il centro O si allontani all'infinito, in una determinata direzione.

2. Comincieremo dal riscontrare che la proprietà A) si verifica nelle superficie rotolanti S_0 corrispondenti ad una trasformazione D_m, e la B) in quelle che corrispondono ad una E_m.

Indicando con

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$

il quadrato dell'elemento lineare della superficie Σ (prima falda dell'inviluppo), con r_1, r_2 i raggi principali di curvatura di Σ, e con R il raggio della sfera inviluppante, l'elemento lineare ds_0 comune alle due superficie applicabili S_0, S è dato da

$$ds_0^2 = E\left(1 + \frac{R}{r_2}\right)^2 du^2 + G\left(1 + \frac{R}{r_1}\right)^2 dv^2 + dR^2.$$

Ora, nel caso delle superficie isoterme e di una trasformazione D_m, il raggio R rappresenta altresì la distanza del punto (u, v) variabile di S_0 dal punto satellite O: e per ciò, indicando con $d\sigma$ l'elemento lineare della

([1]) *Sulle superficie di rotolamento e le trasformazioni di Ribaucour* (questi Rendiconti, ottobre 1915).

proiezione centrale di S_0 fatta da O sulla sfera unitaria di centro O, abbiamo

$$ds_0^2 = R^2 d\sigma^2 + dR^2 ,$$

e, paragonando colla precedente, risulta

$$d\sigma^2 = \frac{ds_0^2 - dR^2}{R^2} = E\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r_2}\right)^2 du^2 + G\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r_1}\right)^2 dv^2 .$$

Questo ha effettivamente la forma ortogonale, e sussiste quindi la proprietà A).

Nell'altro caso, di una trasformazione E_m, il raggio R rappresenta la distanza del punto (u, v) di S_0 dal piano satellite π. Indicando questa volta con $d\sigma^2$ il quadrato dell'elemento lineare della proiezione ortogonale di S_0 su π, abbiamo

$$ds_0^2 = d\sigma^2 + dR^2 ,$$

e, per ciò,

$$d\sigma^2 = E\left(1 + \frac{R}{r_2}\right)^2 du^2 + G\left(1 + \frac{R}{r_1}\right)^2 dv^2 ,$$

che ha nuovamente la forma ortogonale. Dunque, se la S_0 appartiene ad una trasformazione E_m, ha luogo la proprietà B).

3. Prima di procedere all'inversione di questi risultati, ritorniamo sul primo caso di una superficie Σ isoterma per constatare un'ulteriore proprietà che possiede la proiezione centrale del sistema coniugato permanente di S_0, e che è del resto una conseguenza della A).

Riferendoci alle formole della Nota 1), abbiamo qui

$$E = G = e^{2\theta} \quad , \quad R = -\frac{\varphi}{w} ,$$

indi

$$d\sigma^2 = e^{2\theta}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{w}{\varphi}\right)^2 du^2 + e^{2\theta}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{w}{\varphi}\right)^2 dv^2 .$$

Dalle mie ricerche sulle superficie isoterme [1] si sa che in quest'elemento lineare sferico le linee (u, v) sono le immagini delle linee di curvatura di una nuova supeficie isoterma $\bar{\Sigma}$, precisamente di quella che in (M_2) è indicata come proveniente da Σ per una trasformazione T_m, associata alla D_m di Darboux. Nel caso A) ha dunque luogo l'ulteriore proprietà che: *Le proiezioni centrali sulla sfera delle linee del sistema coniugato permanente di S_0 sono le immagini delle linee di curvatura di un'altra superficie isoterma $\bar{\Sigma}$.*

[1] Ved. le due Memorie nei tomi XI, XII, serie 3ª, degli Annali di matematica (1905). Qui saranno citate con (M_1), (M_2).

Osserviamo ancora, perchè utili per il seguito, le formole che, supposta nota la $\overline{\Sigma}$, dànno la S_0. Se chiamiamo $\overline{X}_3, \overline{Y}_3, \overline{Z}_3$ i coseni di direzione della normale a $\overline{\Sigma}$, e x_0, y_0, z_0 le coordinate del punto (u, v) di S_0, abbiamo

$$x_0 = \frac{\varphi}{w}\overline{X}_3 \quad , \quad y_0 = \frac{\varphi}{w}\overline{Y}_3 \quad , \quad z_0 = \frac{\varphi}{w}\overline{Z}_3 .$$

D'altra parte si è dimostrato, in (M_2) § 3, che alla D_m di Σ corrisponde una D_{-m} per $\overline{\Sigma}$, e la corrispondente $\overline{w}$ è data [ibid., formole (16)] da $\overline{w} = \frac{w}{\varphi}$. Per ciò le precedenti si scrivono anche

$$(1) \qquad x_0 = \frac{\overline{X}_3}{\overline{w}} \quad , \quad y_0 = \frac{\overline{Y}_3}{\overline{w}} \quad , \quad z_0 = \frac{\overline{Z}_3}{\overline{w}} .$$

4. Per dimostrare che le proprietà del sistema coniugato permanente, enunciate in A), B), caratterizzano le superficie rotolanti S_0 nelle coppie di superficie applicabili dedotte da una trasformazione D_m, ovvero da E_m, noi cominciamo dallo stabilire le due proposizioni seguenti:

A′) *Se una superficie* S_0 *possiede un sistema coniugato permanente* (u, v), *che, proiettato da un punto* O *sopra una sfera di centro* O, *dà un sistema ortogonale, ed è* S *la corrispondente deformata, allora, quando* S_0 *si fa rotolare sopra* S, *il punto* O *descrive una superficie* Σ *le cui linee* (u, v) *sono quelle di curvatura.*

B′) *Se una superficie* S_0 *possiede un sistema coniugato permanente* (u, v), *che sopra un piano* π *si proietta in un sistema ortogonale, allora, rotolando* S_0 *sulla deformata* S, *il piano* π *inviluppa una superficie* Σ *le cui linee* (u, v) *sono quelle di curvatura.*

A questo oggetto ricorriamo ad alcune formole generali della teoria degli inviluppi di sfere, che qui per brevità mi limito a citare riserbando ad altra occasione i relativi sviluppi.

Consideriamo un inviluppo di ∞^2 sfere, la cui superficie S luogo dei centri, riferita ad un sistema curvilineo qualunque (u, v), abbia le due forme quadratiche fondamentali

$$(2) \qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

$$(3) \qquad D\,du^2 + 2\,D'du\,dv + D''dv^2 ,$$

e sia $R = R(u, v)$ il raggio della sfera inviluppante. L'inviluppo si compone di due falde, e noi vogliamo scrivere l'equazione differenziale delle linee di curvatura sull'una o sull'altra falda. Denotiamo con $\Delta_1 R$ il parametro differenziale primo di R, calcolato rispetto alla forma (2), e con

R_{11}, R_{12}, R_{22} le derivate seconde covarianti di R, e poniamo

$$(4)\qquad \begin{cases} \tau_{11} = R_{11} + \varepsilon D\sqrt{1-\Delta_1 R} \quad , \quad \tau_{12} = R_{12} + \varepsilon D'\sqrt{1-\Delta_1 R} \ , \\ \qquad\qquad \tau_{22} = R_{22} + \varepsilon D''\sqrt{1-\Delta_1 R} \ , \end{cases}$$

dove $\varepsilon = \pm 1$, il segno distinguendo le due falde dell'inviluppo. Se poniamo inoltre

$$(5)\qquad E_0 = E - \left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2 \quad , \quad F_0 = F - \frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v} \quad , \quad G_0 = G - \left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)^2 ,$$

l'equazione differenziale delle linee di curvatura dell'inviluppo si scrive

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} E_0\,du + F_0\,dv & F_0\,du + G_0\,dv \\ \tau_{11}\,du + \tau_{12}\,dv & \tau_{12}\,du + \tau_{22}\,dv \end{vmatrix} = 0 .$$

Ciò premesso, e riferendoci dapprima al caso A'), supponiamo che la superficie S ammetta una deformata S_0 per la quale R sia la distanza del punto (u, v) di S_0 dall'origine O. Per le formole relative alle derivate seconde covarianti della funzione $\varrho = \frac{1}{2}R^2$, calcolate al § 69, vol. I, delle *Lezioni*, avremo

$$(7)\qquad R R_{11} = E_0 + D_0 W \quad , \quad R R_{12} = F_0 + D_0' W \quad , \quad R R_{22} = G_0 + D_0'' W ,$$

dove D_0, D_0', D_0'' sono i coefficienti della seconda forma fondamentale di S_0, e W la distanza dell'origine dal piano tangente in (u, v). Se con

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

indichiamo il quadrato dell'elemento lineare sferico per la proiezione centrale fatta dal punto sulla sfera unitaria, avremo, come al n. 2,

$$d\sigma^2 = \frac{ds^2 - dR^2}{R^2} ,$$

e, per ciò,

$$(8)\qquad E_0 = R^2 e \quad , \quad F_0 = R^2 f \quad , \quad G_0 = R^2 g .$$

Ora, supposto che per la superficie S_0 abbia luogo la proprietà descritta in A'), prendiamo a sistema coordinato quello coniugato permanente, ed avremo, per le nostre ipotesi,

$$D' = 0 \quad , \quad D_0' = 0 \quad , \quad f = 0 ;$$

indi, dalle (4), (7) e (8),

$$F_0 = 0 \quad , \quad \tau_{12} = 0 .$$

Così l'equazione differenziale (6) diventa

$$du\,dv = 0 ,$$

le cui linee integrali $u = \cos t$, $v = \cos t$ sono dunque le linee di curvatura per ambedue le falde dell'inviluppo, c. d. d.

Un risultato del tutto analogo si avrà nel caso B'), supponendo che il sistema coniugato permanente (u, v) di S_0, proiettato sul piano π, dia un sistema ortogonale. Allora R rappresenta la distanza del punto (u, v) di S_0 dal piano π, e si ha quindi

$$R_{11} = D_0 Z \quad , \quad R_{12} = D'_0 Z \quad , \quad R_{22} = D''_0 Z \,,$$

essendo Z il seno dell'angolo d'inclinazione della normale a S_0 sul piano π. Qui il quadrato dell'elemento lineare per la proiezione piana di S_0 su π è

$$d\sigma^2 = ds^2 - dR^2 \,.$$

E prendendo per sistema coordinato (u, v) quello coniugato permanente, ne dedurremo ancora

$$F_0 = 0 \quad , \quad \tau_{12} = 0 \,,$$

ciò che porta alla medesima conclusione come nel primo caso. Le proposizioni A'), B') sono, così, stabilite.

5. Ai risultati ottenuti associando ora i teoremi inversi dovuti ad Eisenhart, facilmente proviamo che le proprietà A), B) sono caratteristiche per le superficie S_0 rotolanti nelle coppie (S, S_0) di superficie applicabili dedotte da una trasformazione D_m, ovvero da una E_m. E invero, se consideriamo il primo caso e supponiamo che il sistema coniugato (u, v) di S_0 si proietti da O sulla sfera in un sistema ortogonale, e sia inoltre sistema coniugato comune ad S_0 e ad una sua deformata S, considereremo le sfere che hanno i centri nei punti di S_0 e passano per O. Il teorema A') prova che, quando S_0 si deforma in S, seco trasportando le sfere, sulle due falde Σ, Σ_1 dell'inviluppo di sfere le linee di curvatura corrispondono al detto sistema coniugato comune, e per ciò Σ, Σ_1 sono trasformate di Ribaucour l'una dell'altra. Ma poichè, quando S_0 rotola su S, il punto O descrive la falda Σ, dal citato teorema di Eisenhart segue che: *le due superficie* Σ, Σ_1 *sono isoterme, e la trasformazione di Ribaucour è una* D_m.

Similmente, nel secondo caso, considereremo le sfere coi centri sopra S_0 e tangenti al piano π. Deformando S_0 in S, sulle due falde Σ, Σ_1 dell'inviluppo di sfere le linee (u, v) saranno, pel teorema B'), quelle di curvatura. Dopo ciò, dal relativo teorema inverso di Eisenhart segue ora: *le due superficie* Σ, Σ_1 *hanno rappresentazione isoterma delle loro linee di curvatura, e la trasformazione di Ribaucour è qui una* E_m.

Così abbiamo riconosciuto, in effetto, che le proprietà A), B) sono caratteristiche per le nostre superficie rotolanti, e possiamo concludere:

Teorema I). *Se una superficie* S_0 *possiede un sistema coniugato permanente che da un punto fisso* O *si proietta, sopra una sfera col*

centro in O, *in un sistema ortogonale, facendo rotolare* S_0 *sulla relativa deformata* S, *il punto* O *descrive una superficie isoterma.*

TEOREMA II). *Se una superficie* S_0 *possiede un sistema coniugato permanente che si proietta sopra un piano* π *in un sistema ortogonale, quando* S_0 *rotola sulla deformata* S, *il piano* π *inviluppa una superficie a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura.*

Che inversamente ogni superficie isoterma possa generarsi (infinite volte) nel primo modo, ed ogni superficie a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura nel secondo, è già stato dimostrato nelle Note 1) e 2).

6. Le proprietà caratteristiche che offrono le nostre superficie rotolanti S_0 in riguardo alle proiezioni ortogonali del loro sistema coniugato permanente sulla sfera, o sul piano, rendono opportune alcune osservazioni sulle proiezioni in generale, che, per quanto molto semplici, non mi consta siano state completamente rilevate altrove.

Se si trasforma una qualunque superficie S, mediante un'omologia di centro O, in un'altra S′, è ovvio che sopra S, S′ si corrispondono le linee asintotiche (o, ciò che torna lo stesso, i sistemi coniugati), e le coppie P, P′ di punti corrispondenti sono allineati con O. Ma diciamo che inversamente: *Se due superficie* S, S′, *non sviluppabili, si corrispondono punto a punto in guisa che le asintotiche si cangino in asintotiche, e le coppie di punti corrispondenti siano allineate con un punto fisso* O, *si passa da* S *a* S′ *con un'omologia di centro* O.

In modo più breve, si può enunciare la stessa proprietà così: *Le uniche proiezioni centrali di una superficie non sviluppabile sopra un'altra, che conservano le asintotiche* (*i sistemi coniugati*), *sono le omologie col centro nel centro di proiezione.*

Analiticamente la proprietà si dimostra [1] ricordando che le coordinate

[1] Il prof. Bertini ha dato di questa proprietà la seguente dimostrazione sintetica
Siano L, Λ le due asintotiche partenti da un punto generico P di una superficie, ed L′, Λ' le loro corrispondenti uscenti dal punto corrispondente P′ dell'altra superficie. Le asintotiche L_1, Λ_1, infinitamente e rispettivamente vicine a L, Λ, seghino queste in Q, R, e si seghino fra loro in M. Si osservi, dapprima, che i quattro punti P, Q, M, R (e analogamente i quattro corrispondenti P′, Q′. M′, R′) formano un proprio tetraedro, non potendo manifestamente accadere, per l'ipotesi, che essi giacciano in un piano. I due tetraedri corrispondenti PQRM, P′Q′R′M′ sono, pure per l'ipotesi, omologici e, considerando (ad es.) i due punti S, N in cui l'asintotica Λ_2, infinitamente vicina a Λ_1, incontra L, L_1, sono parimenti omologici i due tetraedri corrispondenti RMNS, R′M′N′S′. Il piano d'omologia di quelli coincide col piano d'omologia di questi, perchè i due primi hanno comuni tre punti, cioè il punto RS.R′S′ (queste due rette, ancora per l'ipotesi, trovandosi nei piani tangenti QPR, Q′P′R′), il punto MN.M′N′ per analoga ragione, e infine il punto RM.R′M′: i quali tre punti non sono in linea retta, per l'osservazione fatta dianzi. Continuando, si hanno infinite coppie di tetraedri omologici collo stesso piano d'omologia: e quindi le due superficie hanno i piani tangenti in punti corrispondenti segantisi sopra un piano, e ciò evidentemente basta per concludere il teorema.

x, y, z di un punto mobile sulla superficie, espresse in funzione dei parametri u, v delle asintotiche, godono della proprietà *caratteristica* di soddisfare ad un sistema differenziale della forma (*Lezioni*, vol. I, § 66)

$$(a) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u^2} = a\dfrac{\partial\theta}{\partial u} + b\dfrac{\partial\theta}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \alpha\dfrac{\partial\theta}{\partial u} + \beta\dfrac{\partial\theta}{\partial v}, \end{cases}$$

dove a, b, α, β sono funzioni di u, v. Il sistema (a) è completamente integrabile, e la sua soluzione generale θ ha la forma

$$\theta = Ax + By + Cz + D,$$

con A, B, C, D costanti. Ora, se il centro di proiezione è a distanza finita, poniamovi l'origine, e denotando con x', y', z' le coordinate del punto di S' corrispondente a (x, y, z) di S, potremo scrivere

$$x' = \frac{x}{T}, \quad y' = \frac{y}{T}, \quad z' = \frac{z}{T}.$$

E poichè x', y', z' debbono essere soluzioni di un sistema come (a), facilmente si vede che T stessa deve essere una soluzione del sistema (a), onde risultano le formole

$$x' = \frac{x}{Ax + By + Cz + D}, \quad y' = \frac{y}{Ax + By + Cz + D},$$
$$z' = \frac{z}{Ax + By + Cz + D},$$

che sono appunto quelle di un'omologia col centro nell'origine.

Se il centro di proiezione è all'infinito, p. es., nella direzione dell'asse z, le formole si scriveranno

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z + T;$$

e nuovamente T dovrà essere una soluzione delle (a), ciò che porta al medesimo risultato.

Applichiamo queste osservazioni generali al caso che di una superficie S_0 si faccia la proiezione centrale sopra una sfera. Siccome sulla sfera i sistemi coniugati coincidono cogli ortogonali, avverrà che i sistemi coniugati di S_0 si proietteranno in ortogonali sulla sfera nel solo caso che la S_0 sia una trasformata omologica della sfera col centro d'omologia nel centro O della sfera, cioè quando la S_0 sia una quadrica rotonda di cui il punto O sia fuoco principale.

La proiezione centrale di una quadrica rotonda fatta da un fuoco principale F *sopra una sfera, che ha il centro in* F, *cangia i sistemi coniugati della quadrica in sistemi ortogonali sulla sfera.*

In ogni altro caso di proiezione centrale sulla sfera vi ha un solo sistema coniugato di S_0, *sempre reale*, che si proietta sulla sfera in un sistema ortogonale. Questo è, sulla sfera, il sistema delle bisettrici delle proiezioni delle asintotiche; esso corrisponde alle linee di curvatura della *polare* di S_0 rispetto al centro di proiezione [1].

Similmente, se si proietta ortogonalmente una superficie S_0 sopra un piano π, vi è un solo sistema coniugato di S_0 cui corrisponde sul piano un sistema ortogonale: questo è il sistema delle bisettrici delle proiezioni delle asintotiche. L'unico caso di eccezione è quando S_0 è un paraboloide rotondo, ed il piano di proiezione è normale all'asse; allora ogni sistema coniugato del paraboloide si proietta in un sistema ortogonale.

Per queste proprietà delle quadriche rotonde i teoremi I) e II) del n. 5 dànno in particolare i seguenti risultati: 1°) se una quadrica rotonda rotola sopra una qualunque sua deformata, un fuoco principale della quadrica descrive una superficie isoterma; 2°) se un paraboloide rotondo rotola su qualunque sua deformata, un piano normale all'asse inviluppa una superficie a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura. Queste proprietà sono ben note e maggiormente precisate nei teoremi di Guichard, perchè nel primo caso la superficie generata dal fuoco è a curvatura media costante e. nel secondo l'inviluppo del piano è parallelo ad una superficie d'area minima.

7. Ritorniamo a considerare le coppie (S, S_0) di superficie applicabili dedotte da una trasformazione D_m di una superficie isoterma Σ. Si è visto, al n. 3, che la proiezione centrale, sulla sfera, del sistema coniugato permanente di S_0 dà altresì l'immagine sferica delle linee di curvatura di un'altra superficie isoterma $\overline{\Sigma}$. dedotta da Σ con la T_m associata alla D_m.

Ora consideriamo quelle superficie rotolanti che indicheremo con $\overline{S}_0$, le quali dipendono da Σ come S_0 da $\overline{\Sigma}$, cioè tali che abbiano per proiezione centrale, su la sfera, del loro sistema coniugato permanente (u, v) l'imagine delle linee di curvatura di Σ.

Per le formole (1), le coordinate $\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0$ di un punto di S_0 saranno date da

$$\overline{x}_0 = \frac{X_3}{w} \quad , \quad \overline{y}_0 = \frac{Y_3}{w} \quad , \quad \overline{z}_0 = \frac{Z_3}{w} . \tag{10}$$

Su queste noi passiamo a constatare, ricorrendo alle formole della Nota 1), che il sistema (u, v) è, in effetto, coniugato permanente sopra $\overline{S}_0$, ciò che ci farà riconoscere altre circostanze degne di nota. Dalle (10), derivando, abbiamo

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \overline{x}_0}{\partial u} &= \frac{e^\theta}{r_2 w^2} (w X_1 - \lambda X_3) \\ \frac{\partial \overline{x}_0}{\partial v} &= \frac{e^\theta}{r_1 w^2} (w X_2 - \mu X_3) , \end{aligned} \right. \tag{11}$$

[1] Ved. Darboux, *Leçons*, 2ème part., pag. 288.

e d'altra parte, indicando con x, y, z le coordinate di un punto mobile sulla superficie S dei centri delle sfere, abbiamo

$$\frac{\partial x}{\partial u} = e^\theta \left(\frac{1}{w} - \frac{\varphi}{w^2 r_2} \right) (w X_1 - \lambda X_3)$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = e^\theta \left(\frac{1}{w} - \frac{\varphi}{w^2 r_1} \right) (w X_2 - \mu X_3) .$$

Confrontando colle precedenti, si hanno le altre

$$\frac{\partial \overline{x}_0}{\partial u} = \frac{1}{r_2 w - \varphi} \frac{\partial x}{\partial u} \quad , \quad \frac{\partial \overline{x}_0}{\partial v} = \frac{1}{r_1 w - \varphi} \frac{\partial x}{\partial v} ,$$

le quali dimostrano che $\overline{S}_0$, S si corrispondono per parallelismo di normali e delle tangenti alle linee coordinate (u, v). Il sistema (u, v) è coniugato *permanente* sopra S, e, per ciò, anche su $\overline{S}_0$.

Indichiamo con S_0 la relativa deformata di S; con $\overline{S}$ quella della $\overline{S}_0$; e siano (x_0, y_0, z_0) $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ le coordinate di punti corrispondenti sopra S_0, $\overline{S}$. Possiamo allora applicare il teorema generale di Peterson sui sistemi coniugati permanenti (ved. *Lezioni*, vol. II, pag. 43), e ne dedurremo che, nota p. es. S_0, si troverà la $\overline{S}$ con quadrature dalle formole

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial u} = \frac{1}{r_2 w - \varphi} \frac{\partial x_0}{\partial u} \quad , \quad \frac{\partial \overline{x}}{\partial v} = \frac{1}{r_1 w - \varphi} \frac{\partial x_0}{\partial v} .$$

Possiamo riepilogare questi risultati come segue:

In corrispondenza ad ogni trasformazione D_m *di superficie isoterme si presentano due delle nostre coppie di superficie applicabili* (S, S_0) $(\overline{S}, \overline{S}_0)$, *tali che la rotolante di ciascuna delle due coppie ha a comune l'immagine sferica del sistema coniugato permanente colla superficie di appoggio nell'altra coppia. Le due superficie isoterme* $\Sigma, \overline{\Sigma}$ *generate dal punto satellite nel rotolamento di* S_0 *sopra* S, *e di* $\overline{S}_0$ *sopra* $\overline{S}$, *sono trasformate per la* T_m *associata alla* D_m, *e l'immagine sferica delle loro linee di curvatura coincide colla proiezione centrale, sulla sfera, del sistema coniugato permanente per la superficie rotolante relativa all'altra superficie.*

8. Passando alle coppie (S, S_0) di superficie applicabili dedotte da una E_m, è da osservare, in primo luogo, che la superficie S d'appoggio è il luogo dei centri delle sfere dell'inviluppo colle due falde Σ, Σ_1 a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura. Ora, per quanto è dimostrato nella Nota 2), si può con una *trasformazione di Combescure* cangiare quest'inviluppo di sfere in un altro (di Guichard) le cui due falde sono superficie Σ', Σ'_1 ad area minima, e la superficie dei centri, che diremo P, è una deformata del paraboloide rotondo P_0. Le superficie minime Σ', Σ'_1 hanno la stessa immagine delle linee di curvatura delle Σ, Σ', ed il corrispondente sistema

(u, v) è, tanto sulla coppia di superficie applicabili (S, S_0), come sulla (P, P_0), il sistema coniugato permanente.

Viceversa, qualunque trasformazione di Combescure, applicata ad un inviluppo di sfere di Guichard colle due falde Σ, Σ' ad area minima, e colla superficie P dei centri deformata del paraboloide rotondo, dà luogo ad un inviluppo di sfere le cui falde (Σ, Σ') sono in trasformazione E_m.

Ora si osservi, di più, che le normali in punti corrispondenti di S, P sono parallele, come parallele alle rispettive corde di contatto, e per ciò la S ha a comune con P l'immagine sferica del sistema coniugato permanente. Concludiamo quindi:

Per avere tutte le superficie S *d'appoggio nelle nostre coppie* (S, S_0) *di superficie applicabili, si consideri una qualunque deformata* P *del paraboloide rotondo* P_0, *e, presa l'immagine sferica* (u, v) *del suo sistema coniugato permanente, si consideri una qualunque superficie* S *che abbia* (u, v) *per immagine sferica di un sistema coniugato.*

Ed ora torniamo ad applicare alle due coppie (S, S_0) (P, P_0) il teorema di Peterson dal quale risulta che anche S_0, P_0 si corrispondono per parallelismo di normali, e per sistema coniugato permanente (u, v). Ma si è visto che la S_0 è caratterizzata dalla proprietà che la proiezione ortogonale del sistema (u, v) sul piano π satellite è un sistema ortogonale, ed abbiamo quindi il risultato finale:

Per ottenere tutte le superficie S_0 *di cui un sistema coniugato permanente si proietta, sopra un piano fisso, in un sistema ortogonale, si consideri sul paraboloide rotondo* P_0 *un sistema coniugato permanente (arbitrario)* (u, v) *e si prenda una qualunque superficie* S_0 *che abbia a comune con* P_0 *l'immagine sferica di questo sistema coniugato.*

Si osservi che, a causa della proprietà del paraboloide rotondo di cui al n. 6, se si fa la stessa costruzione supponendo soltanto che (u, v) sia coniugato (non permanente) su P_0, la proiezione del sistema coniugato (u, v) della S_0 su π è ancora ortogonale, ma il sistema (u, v) non sarà più coniugato permanente per S_0.

Le nostre ricerche precedenti ci assicurano che *tutte* le superficie rotolanti S_0 nelle coppie (S, S_0) di superficie applicabili dedotte da una E_m si ottengono, nel modo descritto, dai sistemi coniugati permanenti del paraboloide di rotazione.

Matematica. — *Sulle superficie di 6° ordine contenenti infinite coniche.* Nota III di EUGENIO G. TOGLIATTI, presentata dal Socio C. SEGRE [1].

4. — F^6 con un fascio di coniche di genere 1.

Il genere π della sezione piana generica può essere 5, 4, 3.

$\pi = 5$. — Le coniche stanno a coppie nei piani per una retta r, doppia per F, che ha inoltre una C^4 doppia di 1ª specie [2].

Oppure r è una retta doppia tacnodale, ed esiste poi una C^3 piana doppia incidente ad r; l'equazione di F è allora:

$$\varphi_4(x_0, x_1)\,A^2 + \varphi_2(x_0, x_1)\,A(x_0 P + x_1 Q) + (x_0 P + x_1 Q)^2 = 0\,,$$

dove A è una forma di 1° grado, e P, Q di 2°.

$\pi = 4$. — 1°) Le coniche stanno a terne nei piani di un fascio, il cui asse contiene due punti tripli A, B, distinti o no, comuni a tutte le coniche; si ha poi una C^6 doppia di genere 4 (intersezione d'una quadrica Q con un cono cubico ellittico Γ). Ponendo:

$$Q \equiv x_3^2 + x_3\,\psi_1(x_0, x_1, x_2) + \psi_2(x_0, x_1, x_2)\,;$$
$$\Gamma \equiv x_3^3 + x_3^2\,\varphi_1(x_0, x_1) + x_3\,\varphi_2(x_0, x_1) + \varphi_3(x_0, x_1)\,,$$

l'equazione della F^6 è:

$$Q^3 - (3x_3^2 + 2x_3\varphi_1 + \varphi_2)\,Q^2 + (3x_3 + \varphi_1)\,Q\Gamma - \Gamma^2 = 0\,.$$

La C^6 doppia può ridursi a 3 coniche doppie passanti per A, B (il cono Γ si spezza in 3 piani per AB); si ha così la F^6:

$$x_0^2 x_1^2 (x_0 - x_1)^2 + x_0 x_1 (x_0 - x_1)\,Q\,\varphi_1(x_0, x_1) + Q^2\,\varphi_2(x_0, x_1) + Q^3 = 0\,.$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 20 settembre 1915; sèguito di quella pubblicata a pag. 329 di questo stesso volume.

Durante la stampa di queste Note mi pervenne un lavoro del Marletta sullo stesso argomento [*Sulle superficie algebriche d'ordine 6 con infinite coniche,* questi Rendiconti, vol. presente, pag. 109]; delle quattro F^6 considerate dal Marletta, la 2ª non è qui riportata (vedi n. 4, caso $\pi = 3$), la 4ª coincide con quella descritta al n. 4 ($\pi = 3$, 1°), la 1ª e la 3ª rientrano in quelle del n. 5 ($\pi = 1$).

[2] Noether, *Ueber eine Fläche 6ter Ordnung vom Flächengeschlecht* — 1, Math. Ann., 21 (1883), pp. 399-410.

Infine, se il cono Γ si riduce ad un piano da contar 3 volte, si ha una F^6 con conica tripla e due punti tripli:

$$x_3^3\varphi_3(x_0, x_1) + x_3^2 Q \varphi_2(x_0, x_1) + x_3 Q^2 \varphi_1(x_0, x_1) + Q^3 = 0.$$

Queste tre superficie (che dànno luogo tutte a molti casi speciali, dipendenti dal coincidere dei punti A, B e dallo spezzarsi delle linee multiple) son proiezioni della F^6 di S_4 intersezione di una V_3^2 con una V_3^3 cono cubico ellittico di 2ª specie (luogo di piani), F^6 rappresentabile sull'ordinario cono cubico ellittico col sistema di C^6 segato da tutte le quadriche passanti per una conica.

2°) Le coniche stanno a coppie nei piani per una retta r. Allora F può esser proiezione della stessa F^6 di S_4 sopra descritta (da un punto del cono V_3^3), nel qual caso r è retta doppia tacnodale a piano tangente fisso σ, contenente due punti quadrupli A, B (comuni a tutte le coniche), ed esiste poi una C^4 doppia di 1ª specie bitangente a σ in A, B; tale C^4 può anche spezzarsi, ad es. in due coniche doppie passanti per i punti quadrupli.

Se invece F è normale in S_3, la sua linea doppia comprende, oltre r, una retta doppia tacnodale s, incidente ad r, con rs come piano tangente fisso, e una C^3 sghemba avente s come corda e tangente al piano rs:

$$(x_0\alpha + x_3^2)^2 \varphi_2(x_0, x_1) +$$
$$+ x_0(x_0\alpha + x_3^2)(x_0\alpha' + x_3\beta')\varphi_1(x_0, x_1) + x_0(x_0\alpha' + x_3\beta')^2 \psi_1(x_0, x_1) = 0$$

(con α, α', β' forme lineari); oppure una retta doppia oscnodale s, incidente ad r, con rs come piano tangente fisso, ed una conica incidente ad s (che può anche spezzarsi in due rette uscenti da un punto di s): l'equazione si ha dalla precedente (nel caso più generale) ponendo $\beta' \equiv x_3$; oppure una retta tripla s incidente ad r e due rette doppie incidenti ad s:

$$x_3^2(x_3 + hx_0)^2 \varphi_2(x_0, x_1) +$$
$$+ x_3(x_3 + hx_0)(x_3\alpha + x_0x_2)\psi_2(x_0, x_1) + x_0(x_3\alpha + x_0x_2)^2 \varphi_1(x_0, x_1) = 0.$$

3°) Le coniche stanno una per una nei piani tangenti di un cono ellittico di 3ª classe. F ha ora una C^6 doppia di genere 1 contenente un punto triplo (per la C^6 e per F), ed ha un punto triplo ulteriore (vertice del cono, punto base del fascio di coniche); essa si rappresenta sul cono cubico ellittico col sistema lineare di C^6, segato dalle quadriche passanti per 6 punti generici del cono; la si costruisce trasformando il cono col sistema omaloidico di F^3 passanti per la C^3 sghemba determinata da quei

6 punti e per la C^3 piana, sezione del cono, determinata dalle 3 intersezioni ulteriori della C^3 sghemba col cono stesso ([1]).

La C^6 doppia può ridursi a una retta tripla con 3 rette doppie ad essa incidenti; allora, dei 6 punti base del sistema lineare rappresentativo, ve ne sono 3 allineati, e la F^6 si ha trasformando il cono col sistema omaloidico di quadriche contenenti la retta di quei tre punti e gli altri tre.

La C^6 doppia può anche ridursi a tre coniche doppie passanti per due punti (e non situate su una quadrica), uno dei quali può coincidere col vertice del cono inviluppato dai piani delle coniche; l'equazione è:

$$x_0^2(x_0 - hx_1)^2 (x_0 - kx_1)^2 +$$
$$+ x_0(x_0 - hx_1)(x_0 - kx_1)[a\{x_1 P - x_2(x_0 - hx_1)(x_0 - kx_1)\} - bx_0 P] +$$
$$+ \varphi_2 [x_1 P - x_2(x_0 - hx_1)(x_0 - kx_1), -x_0 P] -$$
$$- P[P + hx_2(x_0 - kx_1)][P + kx_2(x_0 - hx_1)] = 0.$$

$\pi = 3$. — Escluse le superficie (di S_3 ed ivi normali) determinate dallo Scorza ([2]), che contengono tutte un fascio ellittico di coniche (e perciò rientrano fra le nostre), si hanno qui delle F^6 normali in S_4. Esistono in S_4 due tipi diversi di F^6 con un fascio ellittico di coniche e sezioni iperpiane di genere 3: la prima è l'intersezione (completa) d'una V_3^3 cono cubico ellittico di 2ª specie, e d'una V_3^2 cono quadrico, aventi in comune una retta generatrice e lungo questa lo stesso S_3 tangente; la seconda è l'intersezione (residua) d'una V_3^4 cono quartico ellittico di 1ª specie luogo di piani, e di una V_3^2 cono quadrico di 1ª specie contenente due piani generatori del primo cono situati in uno stesso S_3.

1°) La più generale proiezione in S_3 della prima di queste F^6 ha due punti tripli consecutivi $A \equiv B$, situati su tutte le sue coniche, le quali stanno a terne nei piani per AB. La linea doppia si compone d'una retta s uscente da A, e d'una C^6 sghemba con due punti doppî su s; ma può anche darsi che s sia una retta doppia oscnodale, nel qual caso esistono ancora due coniche doppie passanti per A e B; infine la C^6 doppia può degenerare in due rette triple (distinte o no) uscenti da un punto di s (e che possono coincidere con s, una o entrambe).

2°) Se il centro di proiezione sta sulla V_3^3, si ha in S_3 una F^6 con una retta doppia tacnodale r a piano tangente fisso (le cui coniche stanno a coppie nei piani per r), una retta doppia s incidente ad r, e una C^4 doppia di 1ª specie con un punto doppio su s e tangente ad r nel punto rs.

([1]) Noether, *Ueber die eindeutigen Raumtransformationen, insbesondere in ihrer Anwendung auf die Abbildung algebraischer Flächen,* Math. Ann., 3 (1871), pp. 547-580, § 7; Cremona, *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen,* ibid., 4 (1871), pp. 213-230, 8. Beispiel, applicano questa trasformazione ad una F^3 generica passante per la C^3 piana.

([2]) Scorza, *Le superficie a curve sezioni di genere tre,* Ann. di Matem., (3) 16 (1909), pp. 255-326.

3°) La più generale proiezione in S_3 della seconda F^6 di S_4 ha le sue coniche situate una per una nei piani tangenti d'un cono di 4ª classe ellittico, e possiede una retta doppia contenente due punti tripli (in uno dei piani bitangenti del cono), una C^6 doppia di genere 2 con due punti doppî nei punti tripli anzidetti, ed un tacnodo nel vertice del cono (punto base del fascio di coniche), l'altro piano bitangente del cono essendo ivi tangente alla F^6.

La C^6 doppia può ridursi a due rette triple uscenti da un punto della retta doppia.

4°) Prendendo il centro di proiezione sulla V_3^4 (ma non su uno dei suoi piani doppî), la F^6 di S_3 ha due rette doppie incidenti r, s ed una C^5 doppia avente un punto doppio su r, passante per il punto rs e appoggiata ad s in altri due punti; i piani delle coniche inviluppano un cono di terza classe ellittico.

5°) Prendendo il centro di proiezione su uno dei piani doppî della V_3^4, si hanno in S_3 due F^6 le cui coniche stanno a coppie nei piani per una retta doppia r. Una ha come linea doppia una C^4 con punto doppio insieme con le sue tangenti nodali e una retta (la r) uscente dal punto doppio; l'altra una C^3 sghemba con un triangolo inscritto e con la tangente (r) in un vertice del triangolo.

5. — F^6 razionali luoghi di coniche.

Il genere π della sezione piana generica può variare da 4 ad 1.

Per $\pi = 4$ si hanno le F^6 con retta quadrupla, senza altre linee multiple, normali in S_3.

Per $\pi = 3$ si hanno delle F^6 normali in S_4, rappresentate sul piano da sistemi lineari di C^5 con un punto base triplo e 10 semplici. Le F^6 di S_4, così ottenute, sono di due tipi: uno ottenuto segando una V_3^2 cono quadrico di 1ª specie con una V_3^4 contenente due piani del cono d'uno stesso sistema; l'altro ottenuto segando una V_3^2 cono quadrico di 2ª specie con una V_3^3 passante per l'asse del cono.

Come proiezioni delle precedenti in S_3 si hanno: una F^6 con C^7 doppia di genere 5, le cui coniche stanno una per una nei piani tangenti di un cono quadrico [1]; una F^6 con una C^6 doppia ed una retta doppia corda della C^6, le cui coniche stanno a coppie nei piani per la retta doppia; una F^6 con una retta quadrupla ed una doppia, fra loro incidenti, od anche consecutive (ma complanari).

[1] Caporali, *Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane*, Mem. di geom., pp. 171-203, n. 4°; Reye, *Ueber quadratische Transformationen und rationale Flächen mit Kegelschnittschaaren*, Math. Ann., 48 (1897), pp. 113-141, § 5; Lo Piano, *Intorno ad una superficie dell'ordine* $n+2$ *dotata di una curva doppia dell'ordine* $\frac{n(n-1)}{2}+1$, Rend. Napoli, (3) 6 (1900), pp. 130-135.

Per $\pi = 2$ si hanno le proiezioni della F^6 di S_5 rappresentata sul piano dal sistema lineare delle C^4 con un punto base doppio e 6 semplici. Essa è l'intersezione d'una V_4^2 con una V_3^3 razionale luogo di piani (che può essere la V_3^3 razionale generale luogo di piani (1), oppure un cono di 1ª o di 2ª specie). Sulle proiezioni in S_3 di questa F^6 le coniche possono stare una per una nei piani osculatori d'una C^3 sghemba (o nei piani tangenti d'un cono razionale di 3ª classe) oppure a terne nei piani d'un fascio, ed allora F ha una C^8 doppia di genere 3 con due punti tripli (2), oppure una C^5 doppia ed una sua quadrisecante come retta tripla, oppure una conica tripla ed una doppia con due punti comuni.

Se i piani delle coniche inviluppano un cono quadrico, F ha una retta doppia ed una C^7 doppia avente su quella retta due punti doppî ed uno semplice.

Se le coniche stanno a coppie nei piani d'un fascio, la linea doppia di F si compone dell'asse del fascio, d'una retta ad esso incidente e d'una C^6 con due punti doppî sulla seconda retta e due semplici sulla prima (le due rette doppie possono essere consecutive).

Infine F può avere una retta quadrupla e due doppie (distinte o no) a distanza finita o infinitesima dalla retta quadrupla.

Per $\pi = 1$ si hanno F^6 di S_3 proiezioni della F^6 di S_6 rappresentata sul piano dal sistema lineare delle C^3 passanti per tre punti. Tra esse rientrano tutte le F^6 con più fasci di coniche: tre al massimo. La più generale ha una C^9 doppia con 4 punti tripli (3). Rileviamo poi una F^6 con retta quadrupla e tre rette doppie ad essa incidenti; la F^6 (4) luogo del punto comune a tre piani omologhi in una corrispondenza trilineare posta fra i piani osculatori d'una C^3 sghemba. Altre proiezioni son note (5) (*).

(1) Segre, *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani*, Atti Acc. Torino, 21 (1885-1886), pp. 95-115, nota a pag. 102.

(2) Caporali, loc. cit.; Reye, loc. cit., n. 41.

(3) Caporali, loc. cit.; Reye, loc. cit., § 3.

(4) Marletta, loc. cit. nella Nota I, n. 25.

(5) Bordiga, *Di alcune superficie del 5° e del 6° ordine che si deducono dallo spazio a 6 dimensioni*, Atti Istituto Veneto, (6) 4 (1885-86), pp. 1461-1501; Del Pezzo, *Intorno ad una superficie del 6° ordine con nove rette doppie*, Rendic. Napoli, (3) 3 (1897), pp. 196 203; Bonicelli, *Sopra una trasformazione birazionale dello spazio di 3° grado e una classe di superficie razionali del 6° ordine*, Giorn. di Matem., 40 (1902), pp. 184-191.

(*) Nel fasc. 7° contenente la Nota II sono sfuggiti i seguenti errori tipografici:

Pag.	linea	*errata*	*corrige*
329	14	pag. di	pag. 307 di
330	28	qnadrupli	quadrupli
331	2	$x_1 \varphi_4(x_0, x_1) + \cdots$	$x_1^2 \varphi_4(x_0, x_1) + \cdots$
»	3	$x_3^2 + x_1, x_2$ (2 volte)	$x_3^2 + x_1 x_2$
332	3	$\varphi_2(x_0, x_1))$	$\varphi_2(x_0, x_1)$
»	4	$\psi_2(x^0, x_1)$	$\psi_2(x_0, x_1)$
»	12	$A = B$	$A \equiv B$
»	17	$(x_3^2 + x_0 x_2)\left(c_0 x_0^2 + c_1 x_0 x_1 + \frac{b_2^2}{4a_2}\right)$	$(x_3^2 + x_0 x_2)^2\left(c_0 x_0^2 + c_1 x_0 x_1 + \frac{b_2^2}{4a_2} x_1^2\right)$
»	19	dne	due

Matematica. — *Sugli integrali abeliani riducibili.* Nota di Gaetano Scorza, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo (*).

Questo lavoro si riattacca direttamente a quello che, col medesimo titolo, apparve già in due Note successive nei fascicoli di questi Rendiconti del marzo di quest'anno (1); e mira a precisare sempre meglio le proprietà delle varietà algebriche dotate di sistemi regolari di integrali riducibili (2).

Così, ad es., abbiamo dimostrato che due sistemi regolari di integrali riducibili di una varietà algebrica, associati rispetto a un suo sistema nullo principale, sono complementari; e che, viceversa, dati sopra una varietà algebrica due sistemi regolari complementari, esistono infiniti sistemi nulli della varietà, rispetto a cui essi sono associati (3). Ma fra questi sistemi nulli ve ne son certo di quelli che siano principali?

Così pure abbiamo dimostrato che condizione necessaria e sufficiente perchè una varietà algebrica ammetta un sistema regolare di integrali riducibili della dimensione $q-1$, è che essa ammetta un sistema nullo, almeno, singolare di specie $2q$. In tal modo, per ogni sistema nullo singolare di specie $2q$ della varietà viene ad aversi *un* corrispondente sistema regolare di dimensione $q-1$; ma uno stesso sistema regolare di dimensione $q-1$ può provenire da più sistemi nulli singolari di specie $2q$ della varietà, linearmente indipendenti (4). È possibile precisare in qualche maniera il numero di questi sistemi nulli, dati i valori di opportuni *caratteri* della varietà e del sistema?

Si sa, infine, che un sistema regolare appartenente a una data varietà algebrica ha sempre su questa un sistema complementare, ed è facile vedere che o questo sistema è unico o varia in una totalità infinita (discontinua) (5). È possibile assegnare un criterio per stabilire *a priori* quale sia, a volta a volta, il caso che si presenta?

Son queste le domande a cui rispondiamo nelle pagine seguenti.

(*) Pervenuta all'Accademia il 29 ottobre 1915.

(1) Scorza, *Sugli integrali abeliani riducibili.* Note I e II [Rendic. della R. Accademia dei Lincei, ser. 5ª, vol. XXIV, 1° sem. 1915, pp. 412-418 e pp. 645-654].

(2) Siccome non vi è luogo ad equivoci, in questo lavoro diremo sempre « integrale », senz'altro, al posto di « integrale semplice di 1ª specie ».

(3) Loc. cit. 1), Nota II, nn. 15 e 17.

(4) Loc. cit. 1), Nota II, n. 19.

(5) La cosa risulta dal seguito di questo lavoro, ma può dedursi agevolmente da quanto è osservato dal sig. Severi alla fine del n. 4 della sua Nota: *Sugli integrali abeliani riducibili* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (5), vol. XXIII, 1° sem. 1914, pp. 581-587 e pp. 641-651].

La nozione che compie in esse un ufficio essenziale è quella di *indice di singolarità*, adoperata qui non solo per le varietà algebriche, ma anche per i sistemi regolari di integrali riducibili; e i risultati a cui ora perveniamo, congiunti a quelli raccolti in due altre Note recenti (6), provano, se non erriamo, con la loro semplicità precisa e netta, che questa nozione è, per la teoria degli integrali riducibili, di importanza fondamentale.

Anche quella che ne consegue, di *coefficiente di immersione* di un sistema regolare sopra una varietà algebrica a cui appartenga, che qui ci limitiamo semplicemente a definire, sembra esser chiamata a rendere utili servigi in questi studî.

Ma su ciò ci riserbiamo di ritornare in una prossima occasione.

1. Allorchè una varietà algebrica contiene un sistema regolare di integrali riducibili, questo può sempre pensarsi come il sistema di tutti gli integrali di una conveniente varietà algebrica: cioè esiste una varietà algebrica i cui integrali hanno gli stessi periodi degli integrali del sistema. Ma allora le nozioni di relazioni di Riemann (o sistemi nulli), di relazioni di Riemann (o sistemi nulli) principali e di indice di singolarità (7) potranno estendersi anche ai sistemi regolari di integrali riducibili, chiamando, per es., indice di singolarità di un tal sistema quello di una varietà algebrica a cui *spettino* i suoi integrali.

Questa estensione, del resto, apparisce ben naturale se si pensa che codeste nozioni hanno un'origine puramente aritmetica e possono esser stabilite in tutti quei casi in cui si abbia a che fare con una matrice, a p righe e $2p$ colonne, i cui elementi soddisfacciano a una certa condizione che poi, appunto, si esprime col dire che essi soddisfanno a una (almeno) relazione principale di Riemann.

Si tratta, in fondo, di nient'altro che di proprietà di una tal matrice invarianti di fronte a un doppio ordine di trasformazioni; cioè di proprietà che restano inalterate tanto se alle p righe della matrice considerata si sostituiscono p loro combinazioni lineari omogenee indipendenti qualunque, quanto se agli elementi delle sue singole righe, concepiti come coordinate omogenee di p punti di un S_{2p-1}, si applica una *stessa* trasformazione omografica, rappresentata da una sostituzione lineare omogenea a coefficienti *razionali* e a modulo non nullo.

Veramente, per quanto riguarda l'invarianza di fronte al secondo ordine di operazioni, dato lo scopo a cui allora si mirava, noi supponevamo, nei lavori già citati, che si trattasse di sostituzioni a coefficienti intieri e uni-

(6) Scorza, *Le varietà algebriche con indice di singolarità massimo*. Note I e II [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (5), vol. XXIV, 2° sem. 1915, pp. 279-284 e pp. 333-338].

(7) Loc. cit. (1), Nota II, nn. 8, 9 e 10; e loc. cit. (6), introduz. della Nota I.

modulari; ma si vede subito che l'invarianza in discorso sussiste anche nel senso più generale ora chiarito.

Questa osservazione permette di affermare che per il calcolo dell'indice di singolarità di una varietà algebrica di irregolarità superficiale p è inutile partire dalla tabella dei periodi di un sistema di p suoi integrali indipendenti rispetto a un sistema primitivo di $2p$ cicli lineari della sua riemanniana: basta partire dalla tabella relativa a un qualunque sistema di $2p$ cicli lineari *indipendenti*.

Di qua si raccoglie, in particolare, che:

Se fra due varietà algebriche della stessa irregolarità superficiale si può stabilire una corrispondenza (algebrica) $(1, n)$, *esse hanno pure lo stesso indice di singolarità.*

2. Per una varietà algebrica di irregolarità superficiale 1 (o per un integrale ellittico) non v'è luogo a parlare di relazioni di Riemann e, quindi, di indice di singolarità: volendo, può dirsi che di quelle ce n'è sempre una, ed una sola, principale, rispondente alla forma bilineare alternata elementare $x_1 y_2 - x_2 y_1$, e che questo è, per conseguenza, sempre *zero*. È quanto faremo nel seguito per non aver da distinguere il caso dell'integrale ellittico dal caso di un sistema regolare con dimensione > 0.

3. Ciò posto, consideriamo una varietà algebrica V_p di irregolarità superficiale $p > 1$, e supponiamo che A e A$'$ siano due suoi sistemi regolari complementari di integrali riducibili, delle dimensioni rispettive $q - 1$ e $q' - 1 = p - q - 1$ $(0 < q < p)$.

Introdotta per gli integrali di V_p la solita rappresentazione geometrica mediante due S_{p-1}, τ e $\bar{\tau}$, imaginarî coniugati di specie p di un S_{2p-1}, Σ, per modo da poter parlare di sistemi nulli di V_p e degli *assi* A_1 e A'_1 di A e A$'$ [8], dimostriamo in primo luogo che:

Esistono sempre infiniti sistemi nulli principali di V_p, *rispetto a cui* A *e* A$'$ *sono associati: cioè, rispetto a cui gli assi* A_1 *e* A'_1 *di* A *e* A$'$ *sono l'uno lo spazio polare dell'altro.*

Siano $u_1, u_2, \dots, u_q$ q integrali indipendenti del sistema A, e u_{q+1}, $u_{q+2}, \dots, u_p$ q' integrali indipendenti del sistema A$'$: gli integrali $u_1, u_2, \dots, u_p$ saranno p integrali indipendenti di V_p, e, se

$$\left\| \begin{matrix} \omega_{1,1} & \omega_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \omega_{1,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{p,1} & \omega_{p,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \omega_{p,2p} \end{matrix} \right\|$$

è la tabella dei loro periodi, le coordinate di τ in Σ sono semplicemente i minori d'ordine p estratti da questa matrice.

[8] Loc. cit. [1], Nota I, nn. 1, 2 e 6.

Indicando i periodi ridotti dell' integrale u_j con $\Omega_{j,l}$ $(l=1,2,\dots,2q)$ per $j=1,2,\dots,q$, e con $\Omega'_{j-q,m}$ $(m=1,2,\dots,2q')$ per $j=q+1$, $q+2,\dots,p$, avremo, per $j=1,2,\dots,q$,

$$\omega_{j,r}=\sum_{l=1}^{l=2q} h_{r,l}\,\Omega_{j,l} \qquad (r=1,2,\dots,2p),$$

e, per $j=q+1,q+2,\dots,p$,

$$\omega_{j,r}=\sum_{m=1}^{m=2q'} h'_{r,m}\,\Omega'_{j-q,m} \qquad (r=1,2,\dots,2p),$$

dove le h e le h' stanno ad indicare degli opportuni numeri interi.

L'asse A_1 di A sarà allora l' S_{2q-1} razionale di Σ avente per coordinate i minori d'ordine $2q$ della matrice

$$\left\Vert \begin{matrix} h_{1,1} & h_{2,1} & \dots & h_{2p,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{1,2q} & h_{2,2q} & \dots & h_{2p,2q} \end{matrix} \right\Vert ,$$

e l'asse A_1 di A'_1 sarà l' $S_{2q'-1}$ razionale, indipendente da A_1, avente per coordinate i minori d'ordine $2q'$ della matrice

$$\left\Vert \begin{matrix} h'_{1,1} & h'_{2,1} & \dots & h'_{2p,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h'_{1,2q'} & h'_{2,2q'} & \dots & h'_{2p,2q'} \end{matrix} \right\Vert .$$

Noi dobbiamo dimostrare che esiste un sistema nullo principale di V_p, rispetto a cui i sistemi A e A' sono associati: cioè, in sostanza, che esiste un sistema nullo *razionale* di Σ — avente in τ e $\bar{\tau}$ due spazî autopolari e soddisfacente inoltre a una condizione *geometrica* (9) rispetto alla totalità dei sistemi nulli singolari aventi in τ e $\bar{\tau}$ due spazî autopolari — rispetto a cui gli spazî A_1 e A'_1 sono mutuamente reciproci; quindi ci è lecito eseguire in Σ una qualsiasi trasformazione *razionale* di coordinate (10).

(9) Quale sia questa proprietà, di natura proiettivo-topologica, risulta dall'interpretazione geometrica del teorema di esistenza delle funzioni abeliane. Cfr. Scorza, *Il teorema fondamentale per le funzioni abeliane singolari* (in corso di stampa nelle Memorie della Società italiana delle Scienze, detta dei XL).

(10) La ragione intima della possibilità di un tal procedimento sta in ciò che è detto più sopra, al n. 1.

Ebbene, eseguiamo nello spazio Σ la trasformazione di coordinate, che esprime le antiche coordinate x per le nuove X mediante le formule:

$$x_r = \sum_{l=1}^{l=2q} h_{r,l} X_l + \sum_{m=1}^{m=2q'} h'_{r,m} X_{2q+m} \qquad (r=1,2,\dots,2p).$$

Nel nuovo sistema di coordinate, τ è lo spazio che ha per coordinate i minori d'ordine p della matrice

$$\left\| \begin{matrix} \Omega_{1,1} & \Omega_{1,2} & \dots & \Omega_{1,2q} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Omega_{q,1} & \Omega_{q,2} & \dots & \Omega_{q,2q} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \Omega'_{1,1} & \Omega'_{1,2} & \dots & \Omega'_{1,2q'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \Omega'_{q',1} & \Omega'_{q',2} & \dots & \Omega'_{q',2q'} \end{matrix} \right\| .$$

Sia adesso nello spazio fondamentale rappresentato dalle equazioni

$$X_{2q+1} = X_{2q+2} = \dots = X_{2p} = 0$$

(che è l'asse A_1 di A e che ha per il sistema A, nelle nuove coordinate X, lo stesso significato che Σ ha, nelle antiche coordinate x, per V_p),

$$\text{(1)} \qquad \sum_{r,s}^{1\dots 2q} c_{r,s} X_r X_s = 0 \qquad (c_{r,s} + c_{s,r} = 0)$$

l'equazione di un sistema nullo principale di A; e allo stesso modo sia, nello spazio fondamentale rappresentato dalle equazioni

$$X_1 = X_2 = \dots = X_{2q} = 0 .$$

che è l'asse di A',

$$\text{(2)} \qquad \sum_{r,s}^{1\dots 2q'} c'_{r,s} X_{2q+r} X_{2q+s} = 0 \qquad (c'_{r,s} + c'_{s,r} = 0)$$

l'equazione di un sistema nullo principale di A'. Due tali sistemi nulli esistono certamente: e il dire che essi sono principali equivale, a dire che, indicati con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ e $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{q'}$ due gruppi di indeterminate, e posto

$$\xi_r + i\eta_r = \lambda_1 \Omega_{1,r} + \dots + \lambda_q \Omega_{q,r} \qquad (r = 1, 2, \dots, 2q)$$
$$\xi'_r + i\eta'_r = \mu_1 \Omega'_{1,r} + \dots + \mu_{q'} \Omega'_{q',r} \qquad (r = 1, 2, \dots, 2q')$$

con $i = \sqrt{-1}$ e le ξ, η, ξ', η' reali, ciascuna delle forme

$$\sum_{r,s}^{1\cdots 2q} c_{r,s}\, \xi_r\, \eta_s \quad , \quad \sum_{r,s}^{1\cdots 2q'} c'_{r,s}\, \xi'_r\, \eta'_s$$

si mantiene diversa da zero e sempre dello stesso segno — diciamo positiva — qualunque siano, rispettivamente, i valori non tutti nulli delle λ o delle μ ([11]).

Le equazioni (1) e (2), interpretate come equazioni in Σ, rappresentano due sistemi nulli aventi per assi, il primo, l'asse A'_1 di A', e il secondo, l'asse A_1 di A; e così l'uno come l'altro hanno poi come spazî autoconiugati τ e $\bar{\tau}$ ([12]).

Segue che, qualunque siano gli interi non nulli ϱ e σ, l'equazione

$$\varrho \sum_{r,s}^{1\cdots 2q} c_{r,s}\, X_r\, X_s + \sigma \sum_{r,s}^{1\cdots 2q'} c'_{r,s}\, X_{2q+r}\, X_{2q+s} = 0 \tag{3}$$

rappresenta un sistema nullo di V_p, rispetto a cui A e A' sono associati.

Perchè esso sia principale, occorre e basta che, per valori adesso non contemporaneamente tutti nulli delle λ e delle μ, si abbia sempre

$$\varrho \sum_{r,s}^{1\cdots 2q} c_{r,s}\, \xi_r\, \eta_s + \sigma \sum_{r,s}^{1\cdots 2q'} c'_{r,s}\, \xi'_r\, \eta'_s > 0\,,$$

o sempre

$$\varrho \sum_{r,s}^{1\cdots 2q} c_{r,s}\, \xi_r\, \eta_s + \sigma \sum_{r,s}^{1\cdots 2q'} c'_{r,s}\, \xi'_r\, \eta'_s < 0\,;$$

per il che occorre e basta, evidentemente, che ϱ e σ siano entrambi positivi (>0) o entrambi negativi (<0); dunque la nostra affermazione è dimostrata ([13]).

4. Per un'osservazione già fatta altrove ([14]), la costruzione del num. precedente, quando si supponga di sceglier comunque i sistemi nulli (1) e (2)

([11]) Loc. cit. [1]), Nota II, n. 8.

([12]) Si badi che, per es., il sistema nullo di A rappresentato dall'equazione (1) ha, per definizione, due spazî autopolari nelle traccie di A_1 su τ e $\bar{\tau}$, che sono degli S_{q-1}.

([13]) Dalla dimostrazione risulta in più la circostanza che, entro il fascio dei sistemi nulli, contenente i nostri infiniti sistemi nulli principali, considerato come una forma di 1ª specie (reale), questi ultimi son tutti contenuti in uno stesso *segmento* della forma. È quanto avremmo anche trovato, nel modo più spontaneo, se avessimo utilizzato i teoremi contenuti nella Memoria citata in [9]) per dimostrare geometricamente il teorema del testo. Ma abbiamo creduto più comodo, per il lettore, dare una dimostrazione indipendente da quei teoremi, tanto più che essa è assai rapida e semplice.

([14]) Loc. cit. [1]), Nota II, *Osservazione* del n. 15.

fra i sistemi nulli principali di A e A′, rispettivamente, dà *tutti* i sistemi nulli principali di V_p, rispetto a cui A e A′ sono associati; se invece si suppone che le equazioni (1) e (2) rappresentino, rispettivamente, un *qualsiasi* sistema nullo non singolare di A o di A′, l'equazione (3) (dove adesso ϱ e σ si riguardano come due numeri interi *qualunque*, diversi entrambi da zero), al variare di ϱ e σ e al variare dei sistemi nulli (1) e (2) fra i sistemi nulli non singolari di A e A′, dà tutti i sistemi nulli (non singolari) di V_p, rispetto a cui A e A′ sono associati.

Ma se $k^{(a)}$ e $k^{(a')}$ sono, rispettivamente, gli indici di singolarità di A e A′, esistono ordinatamente, $k^{(a)}+1$ e $k^{(a')}+1$ (e non più) sistemi nulli non singolari di A e A′, linearmente indipendenti: dunque fra i sistemi nulli (non singolari) di V_p, rispetto a cui A e A′ sono associati, è possibile sceglierne $k^{(a)}+k^{(a')}+2$ (e non più) linearmente indipendenti.

Segue che:

I) *Se* A *e* A′ *sono due sistemi regolari complementari di integrali riducibili di* V_p, *con gli indici di singolarità* $k^{(a)}$ *e* $k^{(a')}$, *i sistemi nulli di* V_p, *rispetto a cui essi sono associati, sono tutti e soli quelli non singolari di un sistema lineare avente per dimensione* $k^{(a)}+k^{(a')}+1$;

e poi, se si tien conto dell'indice di singolarità di V_p, che:

II) *Se* A *e* A′ *sono due sistemi regolari complementari di* V_p *e gli indici di singolarità di* A, A′ *e* V_p *sono, ordinatamente,* $k^{(a)}$, $k^{(a')}$ *e* k, *due casi possono presentarsi*:

1°) *o è* $k^{(a)}+k^{(a')}+1=k$, *e allora ciascuno dei due sistemi* A *e* A′ *individua il proprio complementare*;

2°) *o è* $k^{(a)}+k^{(a')}+1<k$, *e allora ciascuno dei due sistemi* A *e* A′ *ammette infiniti sistemi complementari distinti.*

E non basta. Siccome gli assi A_1 e A'_1 di A e A′ sono indipendenti, il numero dei sistemi nulli non singolari di A linearmente indipendenti eguaglia il numero dei sistemi nulli singolari di V_p, linearmente indipendenti, che hanno per asse A'_1, poichè ognuno di questi induce nell'asse di A *un* sistema nullo non singolare di A, e ogni tal sistema nullo di A è indotto nell'asse di A da *un* sistema nullo di V_p avente per asse A'_1; dunque, ricordando una proposizione già da noi dimostrata [15], possiamo dire che:

III) *Condizione necessaria e sufficiente perchè una varietà algebrica* V_p *ammetta sistemi regolari di integrali riducibili è che essa ammetta sistemi nulli singolari. Ad ogni tal sistema nullo, eventualmente esistente, risponde uno ed un sol sistema regolare di integrali riducibili avente per asse l'asse del sistema nullo; mentre, per ogni eventuale sistema regolare di integrali riducibili di* V_p, *esistono tanti sistemi nulli di* V_p, *linearmente indipendenti, aventi per asse l'asse del sistema, quant'è*

[15] Loc. cit. [4]

l'indice di singolarità, aumentato di 1, *di un sistema regolare complementare al dato*;

nella qual proposizione è implicitamente contenuta quest'altra:

IV) *Se la varietà algebrica* V_p *con l'indice di singolarità* k *possiede un sistema regolare di integrali riducibili* A *con l'indice di singolarità* $k^{(a)}$, *l'indice di singolarità di un sistema regolare complementare di* A *è senz'altro determinato, poichè: o tal sistema complementare è unico, e allora il suo indice di singolarità è* $k - k^{(a)} - 1$; *o varia in una totalità infinita (discontinua), e allora il suo indice di singolarità è sempre lo stesso.*

5. In base ai risultati conseguiti, se A e A' sono due sistemi complementari di V_p, e $k^{(a)}$, $k^{(a')}$ e k sono gl'indici di singolarità di A, A' e V_p, il numero

$$\lambda = k - k^{(a)} - k^{(a')} - 1,$$

che in virtù di II) è un intero positivo o nullo, è nettamente determinato da V_p e A (o da V_p e A'); e quindi è un *carattere* di A (o di A') *su* V_p, che possiamo chiamare il *coefficiente di immersione* di A (o di A') *su* V_p, o, semplicemente, quando non vi sia possibilità di equivoci, il *coefficiente di immersione* di A (o di A').

Siccome λ non può esser negativo, è

$$k > k^{(a)} \quad \text{o} \quad k > k^{(a')},$$

e quindi:

L'indice di singolarità di una varietà algebrica è maggiore dell'indice di singolarità di ogni suo eventuale sistema regolare di integrali riducibili.

6. Se un sistema regolare A di V_p ha il coefficiente di immersione nullo, cioè individua il suo complementare, il sistema A lo diciamo *isolato*.

Se V_p ammette solo un numero finito di sistemi regolari riducibili, è chiaro che ognuno di questi sistemi è isolato. Ma in una Nota successiva, come facile corollario di un teorema generale sulla distribuzione dei sistemi regolari di una varietà algebrica contenente sistemi isolati, faremo vedere che, non solo è vera la proposizione inversa, ma, più generalmente, che:

È sempre finito l'insieme dei sistemi regolari isolati appartenenti a una data varietà algebrica.

Questo risultato verrà anzi ottenuto in forma molto più precisa.

Chimica fisiologica. — *Sul metabolismo degli amino acidi nell'organismo* [1]. Nota IX del dott. prof. Ugo Lombroso, presentata dal Socio Luciani.

Riassunto e conclusioni. — Nella serie delle precedenti Note abbiamo studiato l'azione che varî organi isolati esercitano sugli aminoacidi in essi circolanti, sia sciolti in sangue, sia sciolti in liquido di Ringer.

Scopo delle nostre ricerche era l'indagare anzitutto se gli aminoacidi venivano o no utilizzati, e se quelli eventualmente utilizzati erano sottoposti a processi di sintesi o di disamidazione. Molti tentativi erano già stati eseguiti a questo intento; ma, come già accennammo, si potevano rivolgere ad essi varie obbiezioni che non permettevano di trarre alcuna conclusione risolutiva dai dati di fatto esposti. Così, ad esempio, in alcune esperienze eseguite da varî autori con amino-acidi disciolti in liquido di Ringer, la mancata utilizzazione di questi ultimi si poteva attribuire, più che alla incapacità dell'organo studiato a consumare dette sostanze, alla diminuita capacità funzionale dell'organo stesso, dovuta ad insufficente scambio gasoso.

In altre esperienze poi, essendosi gli autori limitati a dosare gli aminoacidi nel liquido circolante prima e dopo la circolazione, trascurando di determinare le modificazioni nel contenuto in amino-acidi dell'organo esperimentato, sorgeva facile l'obbiezione che la principale causa delle variazioni, dai detti autori osservate nel contenuto in amino-acidi del liquido circolante, si dovesse ricercare nell'attitudine che hanno i varî organi (ved. van Slycke ed allievi) di trattenere grande copia di amino-acidi saturandosene.

Inoltre, nelle ricerche antecedenti, manca una analisi specificata allo scopo di determinare se l'avvenuta scomparsa di amino-acidi circolanti, sia dovuta alla loro distruzione, o, piuttosto, ad una loro sintesi.

A queste deficenze abbiamo cercato di sfuggire nelle indagini riferite nelle precedenti Note, lusingandoci di portare così un più positivo contributo alla soluzione di questo ardente ed interessante problema.

Ed allo scopo di meglio illuminare i fenomeni comuni ai varî tessuti, e nello istesso tempo distinguere le singolari e specifiche attitudini di ciascuno di essi, crediamo utile di raccogliere qui brevemente, confrontandoli e riassumendoli, i risultati ottenuti.

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di fisiologia della R. Università di Roma, direttore prof. Luciani.

Per ciò che riguarda il tessuto muscolare [1], dobbiamo anzitutto osservare che, quando si eseguisce la circolazione di un arto con liquido di Ringer contenente amino-acidi disciolti, si ottiene è vero, una diminuzione di questi nel liquido circolante, ma non si può affermare che vi sia una loro utilizzazione da parte del tessuto, poichè nel tessuto stesso si ritrova un aumento, nel contenuto di amino-acidi pressochè pari agli amino-acidi mancanti.

Si tratta dunque evidentemente di un semplice fenomeno di saturazione.

Anche nelle esperienze eseguite con amino-acidi sciolti in sangue e fatti circolare nel tessuto muscolare lasciato in riposo, si avverte un aumento nel contenuto di amino-acidi del tessuto.

Però tale aumento non è sufficiente a spiegare la diminuzione degli amino-acidi riscontrata nel sangue: per cui si può affermare che una certa quantità di amino-acidi è stata effettivamente utilizzata. Ma il fenomeno più appariscente, in rapporto all'attitudine del tessuto muscolare nella utilizzazione degli amino-acidi, si ottenne in esperienze nelle quali la circolazione si svolgeva in un arto posteriore mantenuto in attività funzionale mediante stimolazioni elettriche ritmiche sul nervo sciatico o direttamente sul muscolo.

In queste esperienze si ebbe una notevolissima sottrazione di amino-acidi senza che ad essa corrispondesse un aumento nel contenuto degli amino-acidi del tessuto: anzi, in qualche caso, si trovarono diminuiti nel tessuto quelli preesistenti.

Inoltre, nelle ricerche col tessuto muscolare funzionante, ho potuto in qualche caso riscontrare una produzione di corpi chetonici in quantità molto cospicua.

Questo risultato è molto interessante, perchè ci avverte anzitutto che, contrariamente all'ipotesi di Embden ed allievi la formazione dei corpi acetonici non è una proprietà specifica del tessuto epatico: di più, il fenomeno da noi osservato tenderebbe a farci concepire la scomparsa degli amino-acidi come dovuta ad un processo di decomposizione.

Io dico tenderebbe, e non dico dimostra, perchè non abbiamo potuto constatare nelle nostre esperienze una quantità di NH_3 corrispondente nè agli amino acidi scomparsi, nè ai corpi acetonici rinvenuti; per quanto un certo aumento di NH_3 si sia sempre avvertito.

A questo proposito si possono prospettare varie ipotesi. In primo luogo, considerando che, come hanno dimostrato recenti studî, si può raggiungere

[1] I. *Azione del tessuto muscolare sugli amino-acidi aggiunti al sangue circolante.* U. Lombroso. R. Acc. Lincei, vol. XXIV, pag. 57 (1915).

II. *Azione del tessuto muscolare sugli amino-acidi aggiunti al liquido di Ringer circolante.* U. Lombroso R. Acc. Lincei, vol. XXIV, pag. 148 (1915).

V. *Sul metabolismo degli amino-acidi circolanti nel muscolo in funzione.* U. Lombroso e L. Paterni, R. Acc. Lincei, vol. XXIV, pag. 1870 (1915).

l'equilibrio azotato somministrando ad animali soltanto sali di NH_3, viene suggerita l'ipotesi che l'NH_3 formatosi sia stato in queste esperienze utilizzato per qualcuno di quegli ancora oscuri processi sintetici che devono svolgersi per giustificare un tale equilibrio azotato.

Ovvero si potrebbe pensare che l'NH_3 sia stata utilizzata per la formazione dell'urea, e perciò sfuggita alla formoltitolazione (al controllo di quest'ultima eventualità sono iniziate delle ricerche, sulle quali prossimamente riferiremo).

Non è possibile, del resto, escludere che i corpi acetonici si siano sviluppati da altre sostanze che non siano gli amino acidi, la presenza dei quali ne favorirebbe la formazione senza prendervi parte diretta; e che la scarsezza dell'NH_3 si debba al fatto che gli amino-acidi scomparsi hanno prevalentemente servito alla formazione di complessi non titolabili al formolo.

Nelle esperienze eseguite con la circolazione dell'intestino isolato [1], si sono potute verificare alcune notevoli differenze di comportamento in confronto a quanto abbiamo constatato nelle esperienze con tessuto muscolare.

Anzitutto, anche facendo circolare amino-acidi sciolti in liquido di Ringer, si constata una loro effettiva e notevole diminuzione, nel senso che l'aumento riscontrato nel tessuto non corrisponde. come avveniva nel muscolo, al quantitativo di amino-acidi scomparso.

Nelle ricerche poi eseguite con gli amino-acidi sciolti in sangue, pure essendo maggiore la quantità di amino-acidi scomparsi, l'aumento di essi nel tessuto intestinale non avviene; in qualche caso, persino si nota una diminuzione di quelli preesistenti. Il che erasi avvertito anche nel muscolo mantenuto in attività funzionale, mai nel muscolo in riposo.

Di fronte ad una così notevole scomparsa complessiva di amino-acidi nelle esperienze con sangue, non si avverte una corrispondente formazione di NH_3 e neppure di corpi acetonici.

L'intestino si differenzia, dunque, dal tessuto muscolare funzionante, per ciò che si riferisce ai corpi acetonici, ma non per ciò che riguarda l'NH_3. Complessivamente i risultati ottenuti in queste esperienze favoriscono più nettamente l'interpretazione che i fenomeni svoltisi a carico degli amino-acidi siano di carattere prevalentemente sintetico.

Nelle ricerche eseguite invece con liquido di Ringer, l'NH_3 si ritrovò in misura assai più rilevante, tale da giustificare una buona parte degli amino-acidi scomparsi. Questo differente risultato nella produzione di NH_3,

(1) IV. *Azione dell'intestino sugli aminoacidi aggiunti al sangue o al liquido di Ringer circolante.* U. Lombroso. R. Acc. Lincei, vol. XXIV, pag. 475 (1915).
VI. *Sul destino degli amino-acidi contenuti nel lume o sulla mucosa dell'intestino.* U. Lombroso e C, Artom. R. Accad. Lincei, vol. XXIV, pag. 863 (1915).

ottenuto nelle esperienze su intestino isolato, a seconda che gli amino-acidi erano disciolti nel liquido di Ringer o nel sangue, è molto interessante, perchè ci rivela una duplice attitudine dell'intestino di fronte agli amino-acidi, con prevalenza dell'una o dell'altra a seconda delle condizioni sperimentali. Nel senso che, quando l'intestino viene bene ossigenato e mantenuto sopravvivente in condizioni più simili alle normali, prevalgono i fenomeni sintetizzanti, mentre prevale l'attitudine disamidante quando l'attività funzionale dell'intestino è più imperfettamente conservata.

La differente azione dell'intestino sugli amino-acidi, a seconda del liquido in cui essi sono disciolti, può dare anche ragione delle differenti opinioni che militano a proposito delle modalità nell'assorbimento delle sostanze proteiche. Alcuni autori, e particolarmente il Folin ed allievi, avendo constatato che nel sangue della vena porta il contenuto in NH_3 non è sensibilmente maggiore che in quello arterioso, ritengono che l'assorbimento intestinale delle sostanze proteiche avvenga sotto forma o di amino-acidi o di complessi di essi più o meno elevati. Altri autori (Nenki-Cohnhein), avendo eseguito la circolazione nell'intestino isolato col liquido di Ringer, constatando l'aumento di NH_3 nel liquido circolante; od in seguito al dosaggio dell'NH_3 nel sangue portale, avevano affermato che anche nell'assorbimento alimentare avveniva la trasformazione degli amino-acidi in NH_3 nella mucosa intestinale. Dalle nostre ricerche viene appoggiata la dottrina del Folin; ma nell'istesso tempo viene dimostrato che nelle speciali condizioni sperimentali, usate dagli altri autori, l'intestino può agire quale disamidante.

Nel rene [1] la circolazione artificiale si svolge con modalità assai differenti quando si esperimenta con Ringer da quando si esperimenta con sangue. Nel secondo caso la circolazione è lentissima: a mala pena 3-5 cc. di sangue attraversano l'organo per ogni minuto, anche tenendo assai elevata la pressione; mentre con Ringer la circolazione è persino dieci volte più rapida. Perciò si avrebbe ragione *a priori* di attenderci, in queste esperienze, una maggiore utilizzazione degli amino-acidi.

Ma ciò non è; anche per il rene si avverte nelle circolazioni con sangue, non ostante la lentezza della circolazione stessa, una maggiore utilizzazione effettiva degli amino-acidi aggiunti. Nelle esperienze con Ringer prevale il fenomeno della semplice deposizione degli amino-acidi, nell'organo, in quantità tale che in qualche caso (non in tutti, come pel muscolo) corrisponde e giustifica quindi il quantitativo scomparso dal liquido circolante.

Complessivamente la quantità di amino-acidi scomparsi è sempre stata lieve.

Per ciò che riguarda il destino degli amino-acidi, parte di essi fu certamente distrutta; e particolarmente nelle esperienze di circolazione con

[1] III. *Azione del rene sugli amino-acidi aggiunti al sangue od al liquido di Ringer circolante.* C. Artom, R. Acc. Lincei, vol. XXIV, pag. 468 (1915).

liquido di Ringer si avverte un aumento di NH_3 che giustifica la maggior parte degli amino-acidi mancanti. L'acetone venne soltanto in poche esperienze determinato; non se ne ritrovò in misura notevole (eccezione fatta di una esperienza), e quindi non si può trarre alcuna luce da esso.

Assai interessanti risultano i dati di fatto raccolti nelle esperienze di circolazione del fegato isolato [1].

Anzitutto, facendo circolare nel fegato varî amino-acidi (alanina, asparagina, leucina, glicocolla) sciolti in sangue, si osserva con alcuni di essi (alanina, asparagina) una diminuzione grandissima degli amino-acidi; una diminuzione lievissima si avverte con la glicocolla; nessuna diminuzione, anzi un aumento (dovuto al riversarsi nel liquido circolante, di amino-acidi liberatisi dal tessuto epatico), esperimentando con la leucina. Naturalmente, non si può trarre da questi dati una conclusione in assoluto rapporto con le cifre ottenute, in quantochè nei risultati interferisce, a modificarne il valore, il fatto della produzione di amino-acidi da parte del tessuto epatico. Ma, ciò non ostante, rimane sempre di notevole interesse il fenomeno considerato sotto un punto di vista qualitativo, se non quantitativo, quale indice cioè dell'attitudine del fegato a meglio utilizzare alcuni amino-acidi piuttosto che altri.

Tale attitudine si riscontra, ed in misura ancor più cospicua, nelle esperienze eseguite col liquido di Ringer, salvo che con questa disposizione la glicocolla scompare in maggior misura.

In tutte le esperienze poi, eseguite sia con sangue sia con Ringer, senza aggiunta di amino-acidi, si osserva la formazione di essi da parte del tessuto epatico in quantità abbastanza rilevante, similmente a quanto erasi osservato in qualche esperienza con l'intestino.

Nelle ricerche eseguite col liquido di Ringer si avverte inoltre una produzione di NH_3 assai cospicua, quale non erasi mai osservata in nessun altro organo, e tale da giustificare buona parte degli amino-acidi scomparsi.

Invece, nelle esperienze eseguite col sangue, l'NH_3 formatosi è assai più scarso, per quanto la quantità di amino-acidi scomparsi sia, nelle esperienze stesse, superiore che non in quelle col liquido di Ringer. Il che armonizza con quanto abbiamo constatato nelle altre indagini su altri tessuti, e dimostra sempre più chiaramente che i varî organi possono esplicare, di fronte agli amino-acidi, le più diverse attitudini, e cioè sintetizzarli, disamidarli e produrne: e che or l'una or l'altra di queste attitudini prevale, a seconda delle speciali condizioni nelle quali l'organo si trova a funzionare.

[1] VII. *Azione del tessuto epatico sugli amino-acidi aggiunti al sangue circolante.* U. Lombroso e C. Artom, R. Acc. Lincei, vol. XXIV, pag. 1166 (1915).
VIII. *Azione del tessuto epatico sugli amino-acidi aggiunti al liquido di Ringer circolante.* U. Lombroso e C. Lucchetti R. Acc. Lincei, vol. XXIV, pag. 1263 (1915).

Per ciò che riguarda la formazione dell'urea da parte degli amino-acidi (argomento che è stato oggetto di molti studî recenti), un fatto che colpisce nelle nostre ricerche è quello che la massima produzione di urea si ottenne precisamente in quelle esperienze in cui si usò puro sangue senza aggiunta di amino-acidi, e che in quelle nelle quali amino-acidi eransi aggiunti non si rinvenne una corrispondenza fra urea formatasi ed amino-acidi scomparsi, nel senso di una maggiore produzione di fronte ad una maggiore scomparsa.

Credo interessante, a questo proposito, di ricordare alcune ricerche pubblicate, contemporaneamente alle mie, dal Jansen [1], che, con altra disposizione sperimentale, giunge a risultati che conducono ad una simile constatazione. Lo Jansen esperimentò varî amino-acidi sciolti ora in sangue ora in soluzione di Ringer più corpuscoli rossi.

Per esaurire (così dice) le sostanze « urogenetiche » del liquido circolante, egli eseguì una circolazione di mezz'ora, prima di aggiungere amino-acidi.

Quando adoperò sangue *in toto*, la quantità di urea ritrovata, sia nella prima mezz'ora sia nelle successive, dopo l'aggiunta degli amino-acidi, era notevolissima. Invece, nelle esperienze con Ringer e corpuscoli rossi, l'urea ritrovata fu assai scarsa dopo la prima mezz'ora; e di poco si accrebbe nelle successive mezz'ore, dopo l'aggiunta degli amino acidi.

Dalle ricerche dello Jansen non risulta chiaro quale sia stata la partecipazione degli amino-acidi usati nella genesi dell'urea, perchè egli non ne determina il comportamento. Però, dato che ottenne una pressochè uguale quantità di urea, sia usando asparagina, sia usando leucina (sostanze che noi abbiamo visto utilizzate in misura ben differente dal fegato), ne consegue che gli amino-acidi aggiunti ebbero una importanza del tutto secondaria nella formazione dell'urea.

La condizione più favorevole alla formazione dell'urea appare dunque sia data dalla presenza delle proteine del siero; ciò conduce a ritenere che il fegato, per esplicare la sua fondamentale funzione ureogenetica, utilizzi direttamente le proteine del sangue piuttosto che gli amino-acidi in esso contenuti.

Questa conclusione contradice all'opinione accettata dai più, secondo la quale il ricambio intermedio proteico si estrinsecherebbe esclusivamente per mezzo di amino-acidi, e le sostanze proteiche genuine del sangue avrebbero una funzione passiva, quale è quella di mantenere lo stato colloidale, la viscosità del substrato ecc. ecc.

Non si può naturalmente escludere che le proteine del sangue, nei processi complicati che si compiono nel fegato per la loro trasformazione in

[1] The journal of. Biological Chemistry, vol. XXIV, pag. 551 (1915).

urea, non pervengano anche allo stato di amino-acidi: ma, pur ammettendo tale eventualità, resta pur sempre mutato il valore della partecipazione presa da dette sostanze nella genesi dell'urea, e, in genere, nel ricambio proteico.

* * *

Prendendo ora in esame il complesso dei varî risultati ottenuti, emergono alcune considerazioni interessanti.

Nelle esperienze col liquido di Ringer, e più ancora in quelle col sangue, si constata che non tutti gli amino-acidi si comportano ugualmente, e che quelli più utilizzati da un tessuto lo siano pure dall'altro. La glicocolla, ad esempio, molto bene utilizzata dal muscolo in funzione, lo è poco dal fegato. L'alanina è molto bene utilizzata dal rene e dall'intestino, meno dal muscolo ecc. ecc.

Non si può quindi affermare che vi siano amino-acidi genericamente più utilizzabili; ma appare invece più probabile che ogni singolo tessuto possieda specifiche elettività di fronte ai varî amino-acidi. Soltanto l'asparagina risultò, nelle nostre indagini, genericamente ed in quantità maggiore sottratta al liquido circolante, con tendenza alla disamidazione. Ma per formulare al proposito più precise affermazioni, sarebbero necessarie ulteriori apposite ricerche. Valgano i dati raccolti, pertanto, per una designazione dell'interessante fenomeno.

Una osservazione che in maggiore o minor misura, ma pressochè in tutte le esperienze eseguite col sangue, abbiamo fatto, è che, di fronte ad una più o meno notevole scomparsa di amino-acidi, non si è potuta riscontrare una quantità corrispondente di corpi (NH_3-acetone) che giustificassero tale scomparsa come dovuta ad una disamidazione; per cui appare probabile che siano stati utilizzati per costituire complessi di amino-acidi.

Invece, nelle esperienze con liquido di Ringer si osservò, l'attitudine opposta, e cioè (particolarmente nell'intestino e nel fegato) quella di sottrarre amino-acidi con formazione di NH_3.

Siccome poi è stata dimostrata pel fegato (Emden) la capacità di formare amino-acidi anche sintetizzando l'NH_3 col gruppo chetonico, risulta che sono molteplici i fenomeni di carattere antagonistico che si compiono nei varî tessuti: sintesi e liberazione di amino acidi; disamidazione e formazione, dall'NH_3, di amino-acidi.

Le condizioni nelle quali si esperimenta determinano volta a volta il prevalere dell'uno o dell'altro di questi processi, che probabilmente in misura variabile sempre si compiono: ma a noi non è dato conoscere se non quello preponderante, in quella misura per cui supera gli altri.

L'importanza che potrà assumere una ulteriore e più profonda discriminazione delle cause e degli agenti che dirigono in uno stesso tessuto queste così varie funzioni, non sfuggirà ad alcuno che abbia seguìto la com-

plessa ed ancora incerta letteratura che riguarda la così detta « reversibilità delle azioni enzimatiche », argomento che sinora aveva limitato il suo campo quasi esclusivamente alla sintesi dei grassi e glucosidi. Già a proposito della sintesi dei grassi per opera del secreto pancreatico abbiamo dimostrato [1] come sia difficile di considerarla come dovuta allo stesso enzima idrolizzante per la legge di un vero o falso equilibrio, ma più probabilmente all'azione di un altro enzima coesistente nel secreto, od alla modificazione radicale dell'enzima stesso. L'allargare il campo delle ricerche su nuovi gruppi di sostanze, ci potrà forse permettere di chiarire le ipotesi già enunciate in proposito.

Ci basti per ora l'aver menzionato, oltre alle deduzioni che si possono trarre direttamente dalle nostre ricerche, o dalla comparazione dei varî risultati, quelle altre ricerche e quegli altri problemi che ne vengono suggeriti e messi in valore.

Genetica. — *Variazione nel Cosmos bipinnatus* Cav. Nota di B. Longo, presentata dal Socio R. Pirotta.

Nel R. Orto botanico di Siena è coltivato da molti anni il *Cosmos bipinnatus* a fiori di color vario [2]. Esso nasce anche da sè qua e là in qualche aiuola dove nell'autunno sono caduti gli acheni.

Durante l'estate del 1913, tra le piante del suddetto *Cosmos*, viventi in un'aiuola davanti al mio laboratorio, se ne notò una che nell'asse principale diversificava notevolmente dalle altre piante ed anche dagli altri suoi stessi rami, i quali erano — almeno apparentemente — normali. Questa pianta di *Cosmos* aveva emesso in basso, ai primi internodi, quattro rami che si mostravano, come ho detto, normali, mentre l'asse si allontanava sempre più dal tipo man mano che cresceva per raggiungere il massimo di differenziazione alla fioritura.

Com'è noto, il *Cosmos bipinnatus* presenta foglie opposte, connate, bipinnato-sette, a lacinie lineari-filiformi; rami portanti numerosi capolini terminali ed ascellari sorretti da sottili peduncoli; e ciascun capolino fornito d'involucro doppio eterogeneo: l'esterno costituito da brattee verdi, ovato-lanceolate acuminate, o strettamente lineari, non addossate: l'interno invece costituito da brattee giallo-verdastre, semi-diafane, ovali, subottuse, addossate.

[1] Archivio di Farmacologia e Scienze affini, vol. XXIV, pag. 429 (1912).

[2] S'intende, naturalmente, la corolla dei fiori ligulati del raggio.

Il ramo principale del nostro *Cosmos* presentava invece i seguenti caratteri: foglie sparse [1], pennato-partite (ricordanti quelle della *Plantago Coronopus* L.); le inferiori più frastagliate, ma sempre a rachide larga ed a lacinie larghe, meno numerose e più distanti che non nel tipo; le estreme intiere o quasi, sempre larghe; capolino unico, terminale, sorretto da un peduncolo grosso (ricordante quello delle *Dahlia*) e fornito di un solo involucro, cioè soltanto di quello interno. Insomma questo ramo si differenziava così dal tipo normale che, osservato isolatamente, si sarebbe giudicato appartenere tutt'altro che ad un *Cosmos*!

Interrogato il capogiardiniere, egli mi disse che questa pianta di *Cosmos* e le altre, che si trovavano nella medesima aiuola, erano state da lui stesso in marzo seminate in vaso e poi, dopo nate, trapiantate in quella aiuola. Inoltre, tanto egli quanto il resto del personale dell'Orto assicurarono di non aver mai notato tale fenomeno, ed altrettanto fu detto da giardinieri di altri giardini di Siena in cui il *Cosmos bipinnatus* viene largamente coltivato.

Il ramo principale del *Cosmos* in parola, il 1° ottobre fiorì, portando un bel capolino con i fiori del raggio bianchi, prima ancora che i rami laterali cominciassero a fiorire. E poichè qualche capolino cominciava già ad aprirsi negli altri *Cosmos*, ebbi cura di distruggerli; tuttavia non posso essere sicuro che gli stimmi del nostro *Cosmos* non siano stati impollinati anche da polline di fiori di altre piante, essendo, come ho detto, il *Cosmos* coltivato su larga scala a Siena. Detto ramo non produsse altri capolini, nè all'ascella delle sue numerose foglie comparve alcun accenno di rami. Il 2 novembre, nell'unico capolino, si raccolsero 38 acheni.

Nel marzo dell'anno passato seminai direttamente in un'aiuola, lontana da quella ove era cresciuta la pianta di *Cosmos* in parola, i 38 acheni. Nacquero soltanto 14 piantine: una andò presto a male, le altre crebbero bene. Di queste, però, una sola riprodusse i caratteri della pianta madre. Anch'essa, infatti, analogamente alla pianta del 1913, presto si ramificò in basso, producendo due coppie di rami normali, mentre il ramo centrale riprodusse l'istessa variazione della pianta madre. Il fenomeno era già manifestissimo in giugno; il 7 luglio si tagliarono i quattro rami normali, lasciando però per ciascun ramo un mozzicone con due nodi; inoltre la pianta fu concimata e annaffiata copiosamente. E forse si fece male. La pianta, o meglio il ramo assile, crebbe vigorosamente e straordinariamente, senza ramificarsi, tanto che due o tre volte si dovette cambiare il sostegno. Ai primi di agosto aveva raggiunto l'altezza di metri 2,30 e già si vedeva il giovane capolino con l'unico involucro. Ma, di lì a poco, il ramo assile si arrestò

[1] Questo fatto non ha nulla a che vedere con alcune anomalie (specialmente di torsione, che ho osservate in altre piante di *Cosmos bipinnatus*) producenti degli spostamenti fillotassici. Il ramo principale della nostra pianta si conservava cilindrico.

nello sviluppo, ed il capolino andò a male senza che i fiori si aprissero e senza che all'ascella delle sue foglie si sviluppasse alcun ramo. Invece, all'ascella delle foglie dei quattro rami amputati si ebbe un'abbondante produzione di rami che portarono numerosi capolini bianchi normali. Anche le altre 12 piante normali fiorirono abbondantemente, producendo però chi fiori bianchi, chi di altri colori.

Confesso che, visto andare a male il ramo centrale che riproduceva la variazione del 1913, avevo quasi perduto la speranza che il fenomeno potesse più riprodursi, tanto che non badai ad evitare incroci tra le piante di *Cosmos*. Soltanto, man mano che maturavano, feci cadere la maggior parte dei frutti di tutte e tredici le piante nell' istessa aiuola ove erano nate; il resto fu sparso in altre aiuole.

Quest'anno, da questi frutti sono nate complessivamente 1790 piante, che si sono presentate normali, salvo due sole nelle quali si è riprodotto il fenomeno della pianta madre ed ava. Ritengo che molto probabilmente queste due piante proverranno da acheni dei quattro rami amputati della pianta del 1914, giacchè entrambe sono nate proprio nello stesso luogo in cui si trovava la pianta madre. È da notarsi che gl' individui di *Cosmos*, riproducenti la variazione, accennano ogni anno a diventare sempre più a fioritura precoce. Infatti, mentre le altre piante normali non accennavano ancora a fiorire, le due piante riproducenti la variazione avevano già cominciato a fiorire, una il 21 giugno e l'altra due giorni dopo: fatto che merita di essere tenuto in considerazione, perchè potrà rendere più facile la selezione della razza pura.

Ho raccolto gli acheni tanto in ciascun capolino del ramo assile quanto nei capolini dei rami normali delle due piante per seminarli separatamente nella ventura primavera, allo scopo di vedere se il fenomeno sarà ancora ereditario ed in che maniera.

Le altre 1788 piante sono state, naturalmente, distrutte prima che cominciassero a fiorire.

Questi, per ora, sono i fatti da me osservati. E, per ora, mi pare che non si possano trarre delle deduzioni sicure fino a che non sapremo come il nostro *Cosmos*, autofecondandosi, escludendo con sicurezza fecondazioni incrociate, si comporterà nelle future generazioni.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio E. Millosevich legge la seguente Commemorazione del Socio nazionale Emanuele Fergola:

Moriva in Napoli il 5 aprile il nostro Socio nazionale nella sezione d'astronomia Emanuele Fergola; era nato colà il 20 ottobre 1830. Veniva egli da famiglia di uomini di studio e di azione.

Fu suo congiunto il geodeta Francesco Fergola, che morì fulminato mentre, nell'esercizio delle sue funzioni, faceva una misura geodetica; un ricordo di lui leggesi, per volere della Commissione geodetica italiana, nella chiesetta di Antennamare presso Messina.

Donava la natura al nostro Socio, in copiosa misura, la attitudine alle matematiche; un maestro ragguardevole, Nicola Trudi, ne apprezzava ben presto il talento analitico, e dava all'allievo precoce indirizzi sani e fruttiferi.

Il gusto per l'astronomia deve essersi sviluppato nel Fergola ancora fanciullo, poichè apprendo, dalla Commemorazione detta dal chiarissimo prof. L. Pinto alla R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli il 10 aprile 1915, che Ernesto Capocci, che tenne la direzione dell'Osservatorio a Capodimonte dal 1833 fino al 1864 (con un'ampia interruzione dal 1850 al 1861), designava il Fergola quale *alunno* dell'Osservatorio mentre non aveva che 13 anni.

Alla morte del secondo astronomo dell'Osservatorio, Antonio Nobile, avvenuta nel 1863, Annibale de Gasparis prendeva quel posto, e il nostro caro collega era nominato *assistente*. Un anno dopo, alla morte di Capocci, egli conseguiva la promozione ad *astronomo aggiunto*, mentre Annibale de Gasparis saliva alla direzione dell' Istituto. Quest'ultimo spegnevasi il 21 marzo 1892; ma già fin dal 1889 aveva, per ragioni di salute, lasciata la Specola. Gli succedeva nella direzione Emanuele Fergola, che già fin dal 1884 teneva il posto di *2.do astronomo*. Lasciava egli l'Osservatorio verso la fine del 1909.

Il gusto giovanile per l'astronomia doveva nel Fergola trovar in certo modo un rivale nelle attitudini didattiche, perocchè la sua attività rifulse cospicuamente come un maestro di eccezionale efficacia per attestazione concorde di una pleiade di allievi.

Già appena venticinquenne dettò lezioni di calcolo infinitesimale nel Collegio militare della Nunziatella, e, con decreto del prodittatore del 29 ottobre 1860, saliva alla cattedra universitaria coll' insegnamento della

introduzione al calcolo. Nel 1863, già professore ordinario, teneva il corso di analisi superiore, che impartì per circa 27 anni. Allorchè assunse la direzione dell'Osservatorio, insegnò l'astronomia, e ciò fino al 1909.

La legge 19 luglio 1909 dava all'illustre nostro collega il mezzo di mantenere grado ed ufficio qualora, con tacito suo assentimento, non avesse presentato i titoli di pensione; trovavasi egli nel settantanovesimo anno di età, ma egli era un uomo eccezionalmente rigido, e riteneva che quel privilegio fosse ingiustificato; domandò il collocamento a riposo, nè le affettuose pressioni dei colleghi valsero a rimuoverlo dal suo convincimento. Ad essi non rimaneva che onorare, nei limiti dei loro mezzi, il venerando collega; ed una sottoscrizione nazionale, indetta dalla Facoltà, permise la creazione del premio, che ha il titolo *premio Fergola*, da concedersi ogni quattro anni al più distinto giovane che, laureato nella Università Partenopea, abbia dato prove egregie di studio nell'esame d'astronomia.

Che Emanuele Fergola sia stato un precoce matematico, risulta chiaramente dal tempo nel quale pubblicò la sua prima ricerca nelle Memorie dei XL, quella relativa alle *curve inviluppi*; aveva egli appena 20 anni. Nei tredici anni seguenti, cioè fino al 1863, la sua attività, specialmente nell'analisi e nella teoria delle equazioni, appare manifesta in una serie di Note negli Atti della R. Accad. delle scienze di Napoli e nei Rendiconti; e se, dopo il 1863, la sua produzione nelle matematiche pure è interrotta e sostituita da produzione attinente all'astronomia, ciò si spiega cogli obblighi nuovi come assistente e poi come astronomo aggiunto dell'Osservatorio.

Ma il maestro dalla cattedra continuò a beneficare gli allievi insegnando l'analisi superiore, e lo studioso riappare in una Memoria pubblicata nei volumi dei XL nel 1882 col titolo *Talune equazioni relative alla teoria delle funzioni ellittiche.*

I lavori di matematica di Emanuele Fergola mettono in luce le sue estese cognizioni nelle varie parti dell'analisi e della geometria; essi furono meritamente apprezzati, e stanno a provare come egli fosse completamente a giorno dei progressi della scienza di quel tempo già da noi lontano. Ma poichè i suoi obblighi lo portarono all'astronomia, egli, per la sua vasta coltura matematica, si trovò signorilmente agguerrito quando volle trattare il problema della posizione scambievole degli assi di rotazione e di figura dello sferoide terrestre, come fra poco dirò.

Il convivere poi fin da fanciullo accanto agli strumenti astronomici creò in lui quel felice connubio fra la teoria e la pratica, connubio che, quando assurge a grandi altezze, plasma figure immortali, come ad es. quelle di Gauss e di Bessel.

La produzione astronomica del nostro collega, che aveva gravi obblighi didattici esercitati in luogo lontano dall'Osservatorio, se non è copiosissima in rapporto al tempo, è degna di molta considerazione quale lavoro d'un tecnico sicuro che disponeva, a suo beneplacito, delle teorie dell'astronomia classica e di posizione.

In riguardo a calcoli d'orbite, credo opportuno di ricordare, fra gli altri, una ricerca dei più probabili elementi dell'orbita del pianetino (84) Clio; ed in quanto ad osservazioni di posizione accenno ad osservazioni di qualche pianetino, della cometa II 1864, scoperta, per primo, da Tempel a Marsiglia nelle prime ore del 5 luglio, e della cometa 1881 III, trovata a Windsor in Australia da Tebbutt il 29 maggio. Quest'ultima il Fergola osservava 9 volte al cerchio meridiano di Repsold. A questi saggi d'astronomia di posizione debbo aggiungere le determinazioni della ascensione retta e della declinazione di Marte ottenute al cerchio suddetto nella classica opposizione del 1877; sono 34 posizioni, in ognuna delle quali l'osservatore fece concorrere otto stelle di confronto secondo un programma dettato allora dall'Osservatorio di Washington.

Un consimile lavoro egli ripeteva nell'opposizione di Marte, occorsa due anni dopo. Appartiene all'ordine di osservazioni ora ricordate quello delle posizioni apparenti di alcune stelle dell'Eridano, posizioni richiestegli dal defunto nostro Socio straniero Auwers; trattasi di riduzioni penose che il Fergola compieva completamente da solo, avendo fatto le osservazioni da solo al cerchio meridiano di Repsold in 48 serate, fra il 28 ottobre 1886 e il 30 gennaio 1887.

Nell'occasione delle Commemorazioni dei nostri Socî stranieri Gill ed Auwers, ebbi l'opportunità di far cenno del beneficio che alcuni pianetini potevano rendere, quando fossero osservati in stazioni assai lontane in latitudine e con piccola differenza di longitudine, nel problema della parallasse solare. Un programma di osservazioni circa simultanee eliometriche, da farsi all'Osservatorio del Capo e in alcuni dell'Europa centrale, venne elaborato dai prefati astronomi nell'opposizione del 1889 del pianetino (12) Vittoria. Il nostro Socio, dietro sollecitazione di Auwers, concorse nel lavoro nel senso di osservare Vittoria e le 41 stelle di paragone, affinchè i luoghi di questi e l'efemeride di quello avessero migliorìe. Le osservazioni furono fatte al cerchio meridiano di Repsold, e il mio collega Filippo Angelitti, allora assistente nell'Osservatorio di Capodimonte, aiutò efficacemente l'osservatore nelle riduzioni.

È degno di nota il lavoro, in collaborazione con Angelo Secchi, sulla differenza di longitudine fra Collegio Romano e Capodimonte col metodo telegrafico. Il collegamento nel valore $7^m6^s.28$ fu ottenuto quasi mezzo secolo fa. Nel 1910 il prof. Emilio Bianchi fissò la differenza di longitudine di Collegio Romano con Monte Mario nel valore $6^s.51$, e la Commissione

geodetica italiana fece determinare nel 1909 la differenza di longitudine fra Capodimonte e Monte Mario da due coppie di osservatori. Conosco oggi il valore raggiunto da una coppia. I due valori della differenza di longitu dine Monte Mario-Capodimonte sono (ai centri di stazione):

Secchi-Fergola $7^m12^s.749$

Bianchi-Zappa 7 12 .753

Posso aggiungere aver il nostro Socio, insieme col nostro collega Alfonso Di Legge, nel 1885, fissata la differenza di longitudine col metodo prefato fra Capodimonte e Campidoglio nel numero $7^m5^s.391$; e poichè io ho, nel 1882, determinata la differenza di Campidoglio con Collegio Romano nel numero $0^s.974$, risulta per questa via: Capodimonte-Monte Mario $= 7^m12^s.875$.

Nel 1888 poi concorse, in compagnia del nostro collega Michele Rajna, a determinare la differenza di longitudine fra Capodimonte e Brera nel valore $20^m15^s.52$, avendo avuto valido aiuto nei conteggi dal mio collega Filippo Angelitti sopra ricordato.

Nel 1874 il nostro compianto Socio pubblicava la ben nota sua Memoria *Sulla posizione dell'asse di rotazione della terra rispetto all'asse di figura*, e nel 1876 la seconda *Dimensioni della terra e ricerca della posizione del suo asse di figura rispetto a quello di rotazione.*

Nella prima Memoria il valoroso matematico e geodeta si propose di dedurre dalle sole misure geodetiche la posizione scambievole degli assi di rotazione e di figura dello sferoide terrestre nel proposito o di dimostrare la loro coincidenza (il che implica un'ipotesi restrittiva sulla disposizione degli strati terrestri, per cui l'asse minore dell'ellissoide si confonde con l'asse principale a cui corrisponde il massimo momento d'inerzia), oppure di mettere in luce che, se anche l'ipotesi restrittiva non regga in natura, i risultati sono tali da poterla accettare senza errore sensibile. Il problema è trattato specialmente dal lato teorico, sempre nell'ipotesi che l'angolo fra i due assi sia piccolissimo, donde in fine l'espressione analitica della lunghezza di un arco di meridiano geografico in funzione delle latitudini dei suoi estremi, del semiasse maggiore e dell'eccentricità dello sferoide, e di due angoli v e π che determinano completamente la posizione dell'asse di figura rispetto a quello di rotazione, essendo v la longitudine dell'estremo dell'asse di figura, e π l'angolo che quest'asse forma con quello di rotazione. L'applicazione è fatta a nove archi meridiani colle costanti besseliane.

La seconda Memoria è un ampia estensione pratica della prima, facendo concorrere il maggior numero di archi meridiani, i cui estremi sono fissati astronomicamente, col proposito di avere non solo i più probabili valori di

v e π, ma ben anche i valori di a ed e. I risultati finali ai quali perviene il nostro Socio, sono:

$$v = 326^\circ \; ; \; \pi = 5' \frac{1}{2} \quad a = 6378365 \, m$$

$$b = 6356767 \, m$$

$$\frac{a - b}{a} = \frac{1}{297} .$$

È ben degno di nota il fatto che, nello stato attuale della scienza, si ha, secondo Hayford,

$$a = 6378388 \, m$$

$$\frac{a - b}{a} = \frac{1}{297} .$$

Nel 1871 Fergola, applicando il metodo di Horrebow-Talcott e utilizzando ben 52 coppie di stelle, dopo uno studio accuratissimo del valore angolare del passo della vite del micrometro, fissava la latitudine di Capodimonte con un errore probabile di 0″.07, mentre gli risultava in valore assoluto più piccola di 1″.2 sul valore che mezzo secolo prima aveva avuto Carlo Brioschi; questo fatto, e l'aver riscontrato che per altre località presentavasi il fenomeno di latitudini più piccole in funzione del tempo, deve aver influito a indirizzare il suo spirito alla ricerca, di cui facemmo un cenno poco fa, sulla figura della terra, ecc. ecc.

Soltanto l'esperimento poteva decidere sull'attendibilità della teoria per la quale, supponendo fissi nello sferoide terrestre gli assi principali di inerzia e costanti i relativi momenti, si dimostra che l'asse istantaneo di rotazione della terra forma con l'asse principale del minimo momento di inerzia un angolo che dovrà sempre restare al disotto delle più piccole quantità, che è possibile di mettere in sicura luce con le migliori osservazioni. Senonchè, la teoria in questione suppone l'impossibilità di modificazioni nella distribuzione della massa terrestre sotto azioni endogene ed esogene, di cui poi per altre vie vi è accertamento. Se il dubbio di una variazione secolare nelle latitudini, sollevato dal nostro Socio, non ebbe conferma quantitativa (il che non esclude che in un avvenire lontano ciò possa anche verificarsi), devesi a lui la proposta, alla Conferenza internazionale geodetica di Roma nel 1883, di un'intesa internazionale per lo studio delle eventuali variazioni della latitudine.

Di questo grande problema astronomico, qui non debbo parlare; solo ricordo che devesi proprio all'astronomo di Capodimonte Arminio Nobile (1838-1897) se le complesse variazioni delle latitudini *a corto periodo*, da lui messe in evidenza per primo, destarono l'interesse della scienza in tale

misura da creare quel servizio internazionale che è ben noto a tutti gl studiosi di cose geo-astronomiche.

Piacemi da ultimo accennare che ancora negli anni 1893 e 1894 il nostro Socio, d'accordo coll'Osservatorio Columbia University a New York, che giace sul parallelo di Capodimonte (6 chilometri a sud), rideterminava la latitudine di Napoli e ricavava un valore della costante dell'aberrazione. La variazione *a corto periodo* risulta ben evidente, e la costante sopraddetta egli fissa nel numero 20".53.

È opportuno di ricordare che la costante 20".47, suggerita dalla Conferenza internazionale di Parigi nel 1896, è probabilmente più bassa del vero di almeno $^{1}/_{1000}$ del suo valore.

Fu Emanuele Fergola ornamento distinto dei precipui Istituti scientifici di Napoli; fu Socio fra i XL fino dal 1878; nostro Socio nazionale per la sezione d'astronomia da oltre sei lustri. Lo ebbero Socio Corrispondente l'Accademia di Torino e l'Istituto Veneto; nella Commissione geodetica italiana fu membro autorevolissimo e vedemmo già quanto attivo. In tempi di vivezze studentesche resse l'Università, sapendo conciliare gli ardori giovanili col rispetto alla legge.

S. M. il re lo volle senatore del Regno nel 4 marzo 1905.

Io non ebbi la fortuna della dimestichezza con Emanuele Fergola; soltanto mi fu collega nel disimpegno d'obblighi delicati: in tali funzioni mi si manifestarono la sua rigidità di carattere e il culto incondizionato per la giustizia, donde è probabile sia egli parso severo, mentre non era che austero ed equo. Della elevata sua posizione sociale non trasse profitto quando il trarlo parevagli, per eccesso di scrupolo, men che corretto, e, a questo proposito, si narrano saggi che altamente lo onorano. Menò vita austera, circondato dall'amore e dalla venerazione del figlio (che, nella sua qualità di ingegnere ed ispettore delle ferrovie, segnalati servigî rese al paese nei recenti disastri sismici), dall'amore e dalla venerazione delle quattro figliuole, andate spose a personalità ragguardevoli. Uno de' suoi generi, S. E. il vice-ammiraglio Leonardi Cattolica, nostro Socio Corrispondente, è in questo momento fra noi; alla compagna della sua vita, donna di alto senno e che di poco lo precedette nella tomba, Emanuele Fergola donò amore e culto, e ne ebbe concambio.

Quattro astronomi italiani, appartenenti al nostro sodalizio, sparirono dal mondo nell'ultimo decennio: Pietro Tacchini, Giovanni Schiaparelli, Giuseppe Lorenzoni, Emanuele Fergola. In un minore intervallo di tempo ci abbandonarono per sempre sei Socî stranieri della sezione d'astronomia: Maurizio Loewy, Pietro Giulio Cesare Janssen, Simon Newcomb, sir William Huggins, sir David Gill e Arturo von Auwers. Fatta eccezione di Giovanni

Schiaparelli, che Giovanni Celoria da questo luogo magistralmente commemorò, voi voleste che di tutti gli altri io dicessi una parola; io la dissi, non certo come si conveniva, ma certamente come potei. Ma sia, per carità, finita la mia funzione; vivano a lungo i cari miei e vostri colleghi; vengano le giovani forze a coprire le lacrimate lacune, perchè, se gli uomini spariscono, le Istituzioni non muoiono.

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

L. Marino e R. Becarelli. — *Ricerche sulle combinazioni subalogenate di alcuni elementi.* IV. *Sul così detto sottobromuro di bismuto.* Pres. dal Socio Nasini.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Millosevich presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Socî: Celoria, Bassani, Taramelli, Issel e Silvestri. Richiama inoltre l'attenzione della Classe su di una *Carta geologica di Roma* del tenente generale Verri; sulla *Bibliografia della Libia* pubblicata dal nostro Ministero delle Colonie; su due volumi dell'*Epistolario* di G. Berzelius; su due volumi offerti dalla Yale University (Princeton) dal titolo: *Problemi di geologia americana: Il problema del vulcanismo*; e finalmente sulla ricca e interessante pubblicazione di Joaquim Bensaude riguardante *La storia della scienza nautica e l'astronomia nautica portoghese all'epoca delle grandi scoperte.* L'opera è accompagnata da preziosi fac-simili di documenti della scienza nautica e astronomica portoghese di quel tempo.

Il Socio Volterra fa omaggio, a nome dell'autore prof. Le Bon, di due Note a stampa relative alla costruzione di una nuova tavola dei divisorî dei numeri.

Il Corrisp. Reina, a nome della Presidenza della Società italiana per il progresso delle scienze, presenta la Relazione della Commissione per lo studio dell'Albania, contenente gli *Studî geologici* dei professori Dal Piaz e De Toni; gli *Studî geografici* del prof. Almagià e gli *Studî agrologici* dei professori Rosati e Baudin. Lo stesso Corrisp. ricorda la perdita del prof. De Toni, che cadde fra i primi da valoroso sul campo dell'onore,

e commemora l'estinto; da ultimo offre la pubblicazione: *Determinazioni di latitudine astronomica e di gravità relativa* eseguite in Umbria e in Toscana nel 1913 da lui e dal prof. Cassinis.

AFFARI DIVERSI

Il Presidente Blaserna, ricordando che S. M. il Re, Presidente Onorario dell'Accademia, trovasi in mezzo ai nostri soldati, là dove ferve la lotta per raggiungere le alte idealità della Patria, propone, fra le vivissime approvazioni dei Socî, che, a nome dell'Accademia, sia inviato a S. M., nel fausto giorno del suo Genetliaco, un telegramma d'augurio, bene auspicante alla vittoria delle armi italiane e alla redenzione dei nostri fratelli. Manda poi un affettuoso saluto a tutti gli Accademici assenti, che oggi compiono funzioni civili e militari nel momento solenne che attraversa l'Italia.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 7 novembre 1915.

Allemands (les) destructeurs de cathédrales et de trésors du passé. Paris, 1915. 8°.

BARRINGER D. M. — Meteor crater (formerly called coon mountain or coon butte) in northern central Arizona. Princeton, 1909. 4°.

BASSANI F. — La ittiofauna della pietra leccese (Terra d'Otranto). (Estr. dagli « Atti della R. Accad. delle scienze fisiche di Napoli », vol. XVI, serie 2ª). Napoli, 1915. 8°.

BASSANI F. — Sopra un pesce fossile degli scisti calcareo-marnosi triassici del Galletto presso Laveno sul lago Maggiore (*Peltopleurus humilis* KNER). (Estr. dal « Boll. del R. Comitato geologico d'Italia », vol. XLIV). Roma, 1914. 8°.

BENSAUDE J. — L'astronomie nautique au Portugal a l'époque des grandes découvertes. Bern, 1912. 8°.

BERTIN-SANS H. — Localisation des projectiles dans l'organisme par la radiographie. (Extr. du « Bulletin de l'Acad. des sciences et lettres de Montpellier », 1915). Montpellier, 1915. 8°.

BERZELIUS J. — Lettres publiées au nom de l'Académie royale des sciences de Suède par H. G. Söderbaum: I, 3,-II, 1. Uppsala, 1914. 8°.

Bonificamento (il) dell'agro romano: stato dei lavori al 30 giugno 1914 (Relazione). Roma, 1915. 8°.

CAVASINO A. — Il terremoto nella Marsica del 24 febbraio 1904. (Estr. dal « Bollettino della Società sismologica italiana », vol. XVIII). Modena, 1914. 8°.

CAVASINO A. — Qualche osservazione sull'ampiezza massima delle onde sismiche. (Estr. dal « Boll. della Società sismologica italiana », vol. XVIII). Modena, 1914. 8°.

CECCHERINI U. — Bibliografia della Libia. (Ministero delle colonie). Roma, 1915. 8°.

CELORIA G. — Sulla eclisse totale di sole del 21 agosto 1914 e sul passaggio di Mercurio sul disco solare avvenuto il 7 novembre 1914. (Estr. dai « Rendiconti », del regio Osservatorio di Brera, vol. 48). Pavia, 1915. 8°.

CORSELLI R. — La guerra in Colonia. Roma, 1915. 8°.

DEL GUERCIO G. — Ricerche ed esperienze nuove contro la bianca-rossa degli agrumi in Sicilia nel 1914. (Estr. dal « Redia », vol. XI). Firenze, 1915, 8°.

DE TONI G. B. — Spigolature Aldrovandiane XIV: cinque lettere inedite di Antonio Compagnoni di Macerata ad Ulisse Aldrovandi. (Estr. dalla « Riv. di storia crit. delle scienze mediche », anno VI). Grottaferrata, 1915. 8°

DOELLO-JURADO M. — Algunos moluscos marinos terciarios procedentes de un pozo surgente cerca de la Plata. (« Boletin de la Sociedad Physis », tomo I). Buenos Aires, 1915, 8°.

DOELLO-IURADO M. — Nota sobre do *Mycetopoda* del rio de la Plata. (« Boletin de la Sociedad Physis », tomo I). Buenos Aires, 1915, 8°.

FALEIRO FR. — Tratado del esphera y del arte del marear (« Histoire de la science nautique portugaise à l'époque des grandes découvertes », vol. IV). Munich, 1915. 8°.

Frumenti dell'agro romano nel concorso del 1914. Relazione della Commissione giudicatrice. Roma, 1915. 8°.

GALANTI A. — I diritti storici ed etnici dell'Italia sulle terre irredente. Roma, 1915. 8°.

GREENHILL G. — Motion on the Springs of a Carriage Body. (From the « Mathem. Gazette », 1915). Glasgow, 1915. 8°.

IDDINGS I. — The problem of volcanism. New Haven, 1915. 8°.

ISSEL ART. — Commem. fatta dal march. sen. Giacomo Doria. Genova, 1915, 8°.

LEBON E. — Calculs relatifs à la construction d'une nouvelle table de divi-

seurs des nombres. (Extr. de «Comptos rendus de l'associat. franç. pour l'avancement des sciences » 1914), Paris, 1915. 8°.

LEBON E. — Sur une nouvelle rable de diviseurs des nombres. (Extr. de «Comptes rendus de l'Acad. des sciences», t. 160). Paris, 1915. 8°.

LOVISATO D. — Undicesimo contributo echinodermico con nuove specie di *Clypeaster* del Miocene medio sardo. (Estr. dal « Boll. del R. Comitato geologico d'Italia », vol. XLIV). Roma, 1915. 8°.

MENGARINI G. — L'eclissi totale di sole del 21 agosto 1914: note di viaggio della Missione italiana in Crimea. (Dalla « Nuova antologia », 1915). Roma, 1915. 8°.

MAIOLI L. — Le origini psico-storiche della guerra attuale. (Estr. dalla « Rassegna naz. », 1915). Firenze, 1915. 8°.

MORANO FR. — Il modulatore di corrente. (Estr. dagli « Atti della pontif. Accad. romana dei nuovi Lincei », an. LXVIII, 1915). Roma, 1915. 8°.

PASCAL A. — Sopra una lettera inedita di Girolamo Saccheri (Estr. da « Atti del R. Istit. veneto di scienze, lett. ed arti », t. LXXIV). Venezia, 1914. 8°.

PEREIRA DA SILVA L. — O libro do Sr. J. Bensaude « L'astronomie nautique au Portugal à l'époque des grandes decouvertes ». (Sep. da « Revista da Universidade de Coimbra », vol. III). Coimbra, 1914. 8°.

PEROTTI R. — Panificazione e fermento butirrico nel Lazio. (Estr. dalle « Stazioni sperim. agrarie italiane », vol. XLVIII). Modena, 1915. 8°.

PINTO L. — Emanuele Fergola (commemorazione). (Estr. dai « Rend. della R. Accad. delle scienze fisiche di Napoli », 1915). Napoli, 1915. 8°.

Problems of american geol ogy.New Haven, 1915. 8°.

SARRA R. — Osservazioni biologiche sull'*Anarsia lineatella Z.* dannosa al frutto del mandorlo. (Estr. dal « Bollettino del laborat. di zool. gener. e agraria », vol. X). Portici, 1915. 8°.

SAVASTANO L. — Il seccume del fico. Acireale, 1915. fogl.

SAVASTANO L. — La mosca nera dei fichi (*Lonchaea aristella* Beck). (R. stazione sperimentale di Acireale, bollett. n. 17). Acireale, 1915. fogl.

SCIARRA G. — Contribuzione alla conoscenza della *Carpocapsa pomonella* (L.). (Estr. dal « Bollettino del laboratorio di zoologia gener. e agraria », vol. X). Portici, 1915. 8°.

SILVA DIAS (da) A. E. — « De situ Orbis » de Duarte Pacheco Pereira; edição critica annotada. Lisboa, 1905. 8°.

SILVESTRI F. — Descrizione di nuovi Imenotteri Calcididi africani (Estr. dal « Boll. del laboratorio di zoologia generale e agraria », vol. IX). Portici, 1915. 8°.

SILVESTRI F. — Contribuzione alla conoscenza del genere *Stictococcus* Cockerell (Hemiptera: Coccidae). (Estr. dal «Boll. del lab. di zoologia generale e agraria», vol. IX). Portici, 1915. 8°.

TARAMELLI T. — Osservazioni circa la frana di Clauzetto. (Estr. dagli « Atti dell'Accad. di Udine », ser. IV, vol. IV). Udine, 1915. 8°.

TARAMELLI T. — Come si vennero formando i confini naturali della penisola italiana nella catena alpina. (Estr. dalla Rivista di scienze naturali « Natura », vol. VI). Pavia, 1915. 8°.

VERRI A. — Carta geol. di Roma, pubblicata dal R. Ufficio geol. Novara, 1915. 8°.

WAXWEILERE. — La Belgique neutre et loyale. Paris, 1915. 8°.

ZACUTI A. — Almanach perpetuum celestium motuum (Radix 1473): tabulae astronomicae in latinum translatae per Joseph Vizinum discipulum auctoris. (« Histoire de la science nautique portugaise à l'époque des grandes découvertes », vol. III). Munich, 1915. 8°.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXIV. (1892-1915). Fasc. 9°. Sem. 2°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIV. (1892-1915). Fasc. 5-6.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XI. Fasc. 3.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XV. Fasc. 1-2.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 novembre 1915.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

PERSONALE ACCADEMICO

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

PRESENTAZIONE DI LIBRI

AFFARI DIVERSI

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 7 dicembre 1915.* **N. 10.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 novembre 1915.

Volume XXIV°. — Fascicolo 10°

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 novembre 1915.

F. d'Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica celeste. — *Sul problema piano dei tre corpi. Caratteristiche cinetiche del sistema regolarizzante; forza viva e quadrica reciproca.* Nota I del Socio T. Levi-Civita [1].

In una Nota recente [2] ho fatto subire al problema piano dei tre corpi una trasformazione dinamica, mostrando, in base ad essa, la *possibilità* di una regolarizzazione completa (per tutto il corso del moto, anche se eventualmente intervengono urti) mediante scelta opportuna di coordinate lagrangiane.

Mi accingo ora a tradurre in atto l'accennata possibilità. Col permesso dell'Accademia, dedicherò alla questione tre Note: la presente, e due altre che immediatamente seguiranno.

Premesso uno studio sulla struttura cinematica del sistema trasformato e rilevato che esso rientra in una categoria di sistemi olonomi cui si applicano utilmente le equazioni miste canonico-euleriane [3], deduco nella prima Nota una forma reciproca della forza viva, che domina tutto lo svolgimento

[1] Pervenuta all'Accademia il 30 settembre 1915.

[2] *Sulla regolarizzazione del problema piano dei tre corpi,* in questo stesso volume dei Rendiconti, pp. 61-75. Tale Nota richiamerò qui appresso colla citazione abbreviata R).

[3] *Forma mista di equazioni del moto, che conviene ad una particolare categoria di sistemi meccanici,* ibidem, pp. 235-248. Abbrevierò anche la citazione di quest'ultima Nota, designandola semplicemeate con M).

ulteriore. Il calcolo all'uopo necessario è condotto in modo da poter seguire senza sforzo i passaggi successivi, evitando la materiale risoluzione di equazioni lineari, che sarebbe richiesta dalla teoria generale.

Nella seconda Nota si esplicitano le equazioni regolarizzate: dapprima sotto la forma mista, testè ricordata; poi anche sotto forma canonica pura, e ciò con referenza a tre diverse quaderne di coordinate lagrangiane. Ciascuna determina in modo geometricamente espressivo la configurazione dei tre corpi, ed ha una specifica ragion d'essere. La prima quaderna si presenta più ovvia per immediata analogia coi procedimenti classicamente in uso nella dinamica dei solidi; la seconda risponde in modo spontaneo al bisogno di simmetria, la quale simmetria — sia detto per incidenza — non è invece raggiungibile nel caso dei solidi, senza pregiudizio della agilità (si pensi ai parametri di Rodrigues); infine la terza quaderna, che chiamo *asteroidica*, appare indicata allorchè, nell'impostazione astronomica o meccanica del problema, uno dei tre corpi si trova, per qualche motivo, distinto dagli altri due, i quali seguitano a comportarsi in modo simmetrico.

Un caso limite assai importante è offerto dal problema ristretto. Mi è parso perciò non inutile di occuparmene *ex professo* nella terza Nota. Essa si inizia richiamandone la trattazione abituale e sviluppando (sotto veste canonica) una trasformazione in coordinate ellittiche, già sfruttata dal Thiele a scopo pratico (per la valutazione numerica di certe soluzioni periodiche). Riprendendo poi le equazioni regolarizzate del problema piano in coordinate ellittiche, vi si pone (colle debite cautele) una delle masse eguali allo zero, si rileva la scindibilità del sistema differenziale in due e la conseguente riduzione a due gradi di libertà, e si istituiscono infine raffronti di controllo per assodare la coincidenza delle formule, che così si ottengono, con quelle ricavate per via diretta.

La ricerca è, come si vede, quasi interamente formale; ma non va dimenticato che, in simili questioni, i progressi formali sono stati spesso fecondi.

1. — Vincoli e funzione lagrangiana del problema trasformato.

Ho dimostrato in R) che le equazioni differenziali, da cui dipende il problema piano dei tre corpi, equivalgono (a meno di un cambiamento di variabile indipendente) alle equazioni del moto di un altro sistema olonomo S definito come segue:

Da parametri determinativi della posizione di S *fungono sei quantità*

$$\xi_\nu \quad , \quad \eta_\nu \qquad\qquad (\nu = 0\,,1\,,2)$$

legate dalle due equazioni vincolari

$$\sum_0^2{}_\nu\, \xi_\nu^2 = \sum_0^2{}_\nu\, \eta_\nu^2 \quad , \quad \sum_0^2{}_\nu\, \xi_\nu\, \eta_\nu = 0\,. \tag{1}$$

Il significato di tali parametri è riportato all'originario problema piano dei tre corpi mediante le relazioni

$$x_\nu + i y_\nu = (\xi_\nu + i\eta_\nu)^2 \qquad (i = \sqrt{-1}\ ;\ \nu = 0\,,1\,,2),$$

in cui $x_\nu\,, y_\nu$ rappresentano le proiezioni dei lati del triangolo dei tre corpi $P_0 P_1 P_2$ sopra un sistema di assi di direzione invariabile: in modo preciso, $x_\nu\,, y_\nu$ sono le componenti del vettore $P_{\nu+2} - P_{\nu+1}$, coll'intesa evidente di risguardare identici gli indici congrui rispetto al modulo 3.

Forza viva. Designando con apici le derivazioni rispetto alla variabile indipendente τ, si ha, quale espressione della forza viva,

$$T = 2U\Sigma_\nu\, m_\nu^*(\xi_\nu'^2 + \eta_\nu'^2), \tag{2}$$

dove, posto

$$\rho_\nu^2 = \xi_\nu^2 + \eta_\nu^2 = \sqrt{x_\nu^2 + y_\nu^2} = \overline{P_{\nu+1}\,P_{\nu+2}}\,, \tag{3}$$

le costanti m_ν^* sono definite, in termini delle masse m_ν dei tre corpi, dalle posizioni

$$m_\nu^* = \frac{m_{\nu+1}\, m_{\nu+2}}{m} \qquad (m = m_0 + m_1 + m_2); \tag{4}$$

e

$$U = f\sum_0^2 \frac{m_{\nu+1}\, m_{\nu+2}}{\rho_\nu^2} = fm\sum_0^2 \frac{m_\nu^*}{\rho_\nu^2} \qquad (f \text{ costante d'attrazione}) \tag{5}$$

è la funzione delle forze dell'originario problema.

Per il problema trasformato, di cui ora si tratta, si ha invece quale *Funzione delle forze*

$$\frac{E}{U}\,,$$

E essendo una costante (l'energia totale del problema primitivo); quale *Energia totale* $T - \frac{E}{U}$, *lo speciale valore* 1; quale *Funzione lagrangiana*

$$\Lambda = T + \frac{E}{U}\,, \tag{6}$$

T ed U avendo le espressioni (2) e (5).

2. — Cinematica del sistema S.

Nella prima delle equazioni vincolari (1),

$$\sum_0^2{}_\nu\, \xi_\nu^2 = \sum_0^2{}_\nu\, \eta_\nu^2\,,$$

il valore comune dei primi membri va ritenuto diverso da zero. Infatti esso potrebbe annullarsi solo a patto che si annullassero tutte le ξ e tutte le η: il che è quanto dire, riferendosi agli originarî tre corpi, nel caso della loro coincidenza in un medesimo punto (collisione generale). Ora questa è senza altro esclusa, per tutto il corso del moto, tostochè si suppone diversa da zero la costante delle aree (teorema di Sundman) [1]. Sotto tale ipotesi, si può anzi affermare qualche cosa di più: cioè che il limite inferiore del trinomio

$$\sum_0^2{}_\nu\, m_\nu^\star\, \varrho_\nu^4$$

(momento di inerzia polare dei tre corpi rispetto al loro baricentro) [2] è > 0. Ne consegue, in base alle (3), che è pure > 0 il limite inferiore del valore comune q^2 dei due trinomii

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \quad , \quad \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 .$$

Risguarderemo q come una prima coordinata lagrangiana del sistema S. Il significato geometrico risulta subito dalla definizione. Si ha infatti, in virtù delle (3),

$$2q^2 = \sum_0^2{}_\nu\, \rho_\nu^2 ,$$

donde apparisce che q^2 *è il semiperimetro del triangolo dei tre corpi.*

Posto

$$\xi_\nu = q\alpha_\nu \quad , \quad \eta_\nu = q\beta_\nu \qquad (\nu = 0\,,1\,,2), \tag{7}$$

la definizione di q e le (1) dànno

$$\sum_0^2{}_\nu\, \alpha_\nu^2 = 1 \quad , \quad \sum_0^2{}_\nu\, \beta_\nu^2 = 1 \quad , \quad \sum_0^2{}_\nu\, \alpha_\nu\, \beta_\nu = 0 , \tag{8}$$

le quali consentono di interpretare α_ν e β_ν quali coseni direttori, rispetto ad un generico sistema cartesiano ortogonale $Ox_0x_2x_2$, di due semirette perpendicolari: indicheremo con $\alpha\,,\beta$ i rispettivi vettori unitarî (le cui componenti sono appunto tali coseni $\alpha_\nu\,,\beta_\nu$).

Per rendere espressiva l'interpretazione, conviene introdurre anche il vettore unitario

$$\gamma = \alpha \wedge \beta , \tag{9}$$

che individua, assieme coi primi due, un triedro trirettangolo congruente ad $Ox_0x_1x_2$. A norma della (9), i coseni direttori γ_ν (componenti del vettore γ) valgono naturalmente

$$\gamma_\nu = \alpha_{\nu+1}\,\beta_{\nu+2} - \alpha_{\nu+2}\,\beta_{\nu+1} \qquad (\nu = 0\,,1\,,2). \tag{9'}$$

[1] Cfr. R), § 10.

[2] Ibidem, § 1.

Pensiamo α, β, γ quali vettori fondamentali del sistema di assi fissi $Oxyz$, cui viene riferito il moto piano dei tre corpi, supponendo per maggior semplicità, gli assi Ox, Oy situati nel piano del moto, e quindi Oz perpendicolare a questo piano. In tale accezione, $\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu$ si interpretano come coseni direttori dell'asse Ox_ν rispetto al triedro (fisso) $Oxyz$; e rimane complessivamente definita (rispetto al detto triedro) l'orientazione della terna $Ox_1x_2x_3$, o, se si vuole, di un generico corpo rigido C solidale con essa.

Ne consegue che ad ogni sestupla ξ_ν, η_ν verificante le (1) fanno riscontro un ben determinato valore (positivo) di q e un'orientazione dell'ipotetico corpo C; e, reciprocamente, da q e dall'orientazione di C si risale tosto, mediante le (7), alle ξ_ν, η_ν. Si può pertanto concludere che la configurazione del sistema S corrisponde biunivocamente all'insieme: parametro positivo q, orientazione di C.

3. — Comportamento cinetico.

La circostanza testè rilevata assicura che il sistema S rientra nella categoria di cui ci siamo diffusamente occupati nella Nota M) colla mira specifica di farne applicazione al problema attuale. Giova anzitutto richiamarsi ad essa per le formule di (Poisson)

$$\alpha' = \alpha \wedge \omega \quad , \quad \beta' = \beta \wedge \omega \quad , \quad \gamma' = \gamma \wedge \omega \, , \tag{10}$$

in cui, fungendo τ da tempo, il vettore ω rappresenta la velocità angolare (dell'ipotetico corpo C rispetto agli assi fissi $Oxyz$).

Si ha poi, dalle (7) e (3) dei paragrafi precedenti,

$$\rho_\nu^2 = q^2(\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2)$$

ossia, badando all'identità $\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2 + \gamma_\nu^2 = 1$,

$$\rho_\nu^2 = q^2(1 - \gamma_\nu^2) \qquad (\nu = 0, 1, 2), \tag{11}$$

donde apparisce che le mutue distanze, e di conseguenza la funzione delle forze $\frac{E}{U}$, si esprimono esclusivamente per q e per le γ_ν.

Passiamo alla forza viva T definita dalla (2). In base alle derivate delle (7),

$$\xi'_\nu = q'\alpha_\nu + q\alpha'_\nu \quad , \quad \eta'_\nu = q'\beta_\nu + q\beta'_\nu \, , \tag{12}$$

e alle (10), essa diviene ovviamente una forma quadratica dei quattro argomenti q' e $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ (componenti del vettore ω secondo gli assi $Ox_0x_1x_2$). È facile constatare che i coefficienti si possono esprimere esclusivamente per la q e per le γ_ν (rendendoli esenti dagli altri coseni α_ν, β_ν). Intanto,

a norma delle (2), (5) e (11), basta accertarlo per ognuno dei binomi $\xi_\nu'^2 + \eta_\nu'^2$. A tal uopo conviene esplicitare le componenti delle (10),

$$(10') \qquad \begin{cases} \alpha_\nu' = \alpha_{\nu+1}\,\omega_{\nu+2} - \alpha_{\nu+2}\,\omega_{\nu+1}\,, \\ \beta_\nu' = \beta_{\nu+1}\,\omega_{\nu+2} - \beta_{\nu+2}\,\omega_{\nu+1}\,, \\ \gamma_\nu' = \gamma_{\nu+1}\,\omega_{\nu+2} - \gamma_{\nu+2}\,\omega_{\nu+1}\,, \end{cases}$$

e dedurne, quadrando e sommando le prime due, e tenendo presenti le relazioni di ortogonalità,

$$\alpha_\nu'^2 + \beta_\nu'^2 = (1 - \gamma_{\nu+1}^2)\,\omega_{\nu+2}^2 + (1 - \gamma_{\nu+2}^2)\,\omega_{\nu+1}^2 + 2\gamma_{\nu+1}\gamma_{\nu+2}\,\omega_{\nu+1}\,\omega_{\nu+2}\,.$$

Dopo ciò, l'asserto risulta tosto dalle (12), le quali, badando alle identità

$$\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2 = 1 - \gamma_\nu^2\,,$$

$$\alpha_\nu\,\alpha_\nu' + \beta_\nu\,\beta_\nu' = -\gamma_\nu\,\gamma_\nu' = -\gamma_\nu(\gamma_{\nu+1}\,\omega_{\nu+2} - \gamma_{\nu+2}\,\omega_{\nu+1})\,,$$

porgono

$$(13) \qquad \begin{aligned} \xi_\nu'^2 + \eta_\nu'^2 &= q'^2(\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2) + 2qq'(\alpha_\nu\,\alpha_\nu' + \beta_\nu\,\beta_\nu') + q^2(\alpha_\nu'^2 + \beta_\nu'^2) = \\ &= q'^2(1 - \gamma_\nu^2) - 2qq'\gamma_\nu(\gamma_{\nu+1}\,\omega_{\nu+2} - \gamma_{\nu+2}\,\omega_{\nu+1}) + \\ &+ q^2\{(1 - \gamma_{\nu+1}^2)\,\omega_{\nu+2}^2 + (1 - \gamma_{\nu+2}^2)\,\omega_{\nu+1}^2 + 2\gamma_{\nu+1}\gamma_{\nu+2}\,\omega_{\nu+1}\,\omega_{\nu+2}\}. \end{aligned}$$

Ne desumiamo che anche la funzione lagrangiana (6) del problema trasformato,

$$\Lambda = T + \frac{E}{U}\,,$$

dipende, oltre che da q' e dalle ω_ν, esclusivamente da q e dalle γ_ν. Si trova con ciò soddisfatta anche l'ipotesi complementare, di cui al § 3 della Nota M). Possiamo quindi valerci delle regole ivi stabilite per la costruzione delle equazioni del moto.

Rivolgeremo il nostro calcolo a quella delle due forme miste che abbiamo chiamata canonico-euleriana, perchè, a differenza dell'altra (euleriano-lagrangiana), si presenterà automaticamente regolarizzata anche nell'intorno di eventuali urti binarî.

4. — Coniugate – Equazioni lineari da risolvere per passare alla quadrica reciproca.

Secondo la regola esposta al § 7 della Nota M), testè ricordata, partendo dalla $T\,(q', \omega_\nu\,;\, q, \gamma_\nu)$, si debbono introdurre gli argomenti p, Ω_ν (coniugati a q, ω_ν) a norma delle equazioni

$$(14) \qquad p = \frac{\partial T}{\partial q'}\quad,\quad \Omega_\nu = \frac{\partial T}{\partial \omega_\nu}\,,$$

e valersene per eliminare q' e le ω_ν dalla stessa $T(q', \omega_\nu\ ;\ q, \gamma_\nu)$. Indicando con $\Theta(p, \Omega_\nu\ ;\ q, \gamma_\nu)$ la forma in tal guisa ottenuta (2Θ è la quadrica reciproca di $2T$), si ha senz'altro dalla (6) la funzione lagrangiana modificata (o hamiltoniana)

$$H = \Theta - \frac{E}{U}. \tag{15}$$

La diretta risoluzione delle (14) e la successiva eliminazione delle q', ω_ν da T richiederebbe tuttavia sviluppi non brevi, nè istruttivi, attesa la espressione abbastanza complicata di $T(q', \omega_\nu\ ;\ q, \gamma_\nu)$ risultante dalle (2) e (13). Si arriva allo scopo in modo elegante e perspicuo, esprimendo mediante vettori ausiliarî così le equazioni dei vincoli come T e le (14), ed eliminando poi comprensivamente gli elementi ausiliarî con algoritmo vettoriale accomodato alle circostanze del caso.

5. — Introduzione di vettori ausiliarî – L'omografia vettoriale (dilatazione) $\mathfrak{D}$.

La sestupla ξ_ν, η_ν si compendia opportunamente in due vettori ξ, η, aventi rispettivamente le ξ_ν, η_ν per componenti secondo gli assi $Ox_0x_1x_2$.

Le derivate di questi vettori rapporto a τ,

$$\xi' \quad , \quad \eta',$$

hanno in conformità, per componenti, ξ'_ν, η'_ν.

Mercè l'introduzione di questi vettori, si può attribuire alle equazioni (1) dei vincoli la forma

$$\xi \times \xi - \eta \times \eta = 0 \quad , \quad \xi \times \eta = 0,$$

con che le loro derivate rapporto a τ si scrivono

$$\xi' \times \xi - \eta' \times \eta = 0 \quad , \quad \xi' \times \eta + \eta' \times \xi = 0. \tag{16}$$

Anche alle (12) si attribuisce ovviamente forma vettoriale: basta notare che, in base alle (7) e (10), i loro secondi membri si identificano colle componenti dei due vettori

$$\frac{q'}{q}\xi + \xi \wedge \omega \quad , \quad \frac{q'}{q}\eta + \eta \wedge \omega,$$

talchè esse equivalgono a

$$\xi' = \frac{q'}{q}\xi + \xi \wedge \omega \quad , \quad \eta' = \frac{q'}{q}\eta + \eta \wedge \omega. \tag{17}$$

Conviene ancora definire due altri vettori $\boldsymbol{\Xi}$, $\mathbf{H}$ aventi rispettivamente per componenti (sempre secondo gli assi $Ox_0x_1x_2$)

$$(18)\qquad \begin{cases} \Xi_\nu = \dfrac{\partial T}{\partial \xi'_\nu} = 4Um^*_\nu \rho^2_\nu \xi'_\nu , \\ H_\nu = \dfrac{\partial T}{\partial \eta'_\nu} = 4Um^*_\nu \rho^2_\nu \eta'_\nu . \end{cases}$$

Queste espressioni di Ξ_ν, H_ν mostrano che i due vettori $\boldsymbol{\Xi}$, $\mathbf{H}$ risultano dall'applicare a ξ', η' una stessa omografia vettoriale, anzi una stessa dilatazione [1] avente per direzioni unite quelle degli assi Ox_ν.

Designeremo con $\mathfrak{D}$ l'omografia inversa, cioè la dilatazione

$$(19)\qquad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4Um^*_\nu \rho^2_\nu} & \mathbf{u}_\nu \\ & \mathbf{u}_\nu \end{pmatrix} \qquad (\nu = 0, 1, 2),$$

che opera sui vettori fondamentali $\mathbf{u}_\nu$ del triedro (unito) $Ox_0x_1x_2$, riducendone le lunghezze nel rapporto di 1 a $\dfrac{1}{4Um^*_\nu \rho^2_\nu}$. Potremo così compendiare le (18) (o meglio le loro risolventi rapporto a ξ'_ν, η'_ν) nelle due relazioni vettoriali

$$(20)\qquad \xi' = \mathfrak{D}\boldsymbol{\Xi} \quad , \quad \eta' = \mathfrak{D}\mathbf{H} .$$

Dacchè l'espressione (2) della forza viva è omogenea di secondo grado rispetto alle ξ'_ν, η'_ν, si ha dal teorema di Eulero

$$2T = \sum_0^2{}_\nu \left(\frac{\partial T}{\partial \xi'_\nu} \xi'_\nu + \frac{\partial T}{\partial \eta'_\nu} \eta'_\nu \right) .$$

Nel secondo membro riconosciamo i due prodotti scalari $\boldsymbol{\Xi} \times \xi'$, $\mathbf{H} \times \eta'$. Risulta quindi, in virtù delle (20),

$$(21)\qquad 2T = \boldsymbol{\Xi} \times \mathfrak{D}\boldsymbol{\Xi} + \mathbf{H} \times \mathfrak{D}\mathbf{H} .$$

Per la costruzione delle equazioni del moto nella divisata forma canonico-euleriana, è mestieri far intervenire, a norma delle (14) del paragrafo precedente, lo scalare

$$p = \frac{\partial T}{\partial q'} ,$$

e il vettore $\boldsymbol{\Omega}$ avente per componenti

$$\Omega_\nu = \frac{\partial T}{\partial \omega_\nu} .$$

[1] Cfr. Burali-Forti e Marcolongo, *Transformations linéaires* (Pavia, Mattei, 1912), pp. 20-22.

Occupiamoci di esprimere p ed Ω in forma appropriata. All'uopo giova premettere che, se T dipende da un parametro generico μ, pel tramite delle ξ'_ν, η'_ν, si ha, derivando,

$$\frac{\partial T}{\partial \mu} = \sum_0^2{}_\nu \left(\frac{\partial T}{\partial \xi'_\nu} \frac{\partial \xi'_\nu}{\partial \mu} + \frac{\partial T}{\partial \eta'_\nu} \frac{\partial \eta'_\nu}{\partial \mu} \right),$$

ciò che, attesa la definizione dei vettori $\Xi, \mathbf{H}, \xi', \eta'$, equivale a

$$\frac{\partial T}{\partial \mu} = \Xi \times \frac{\partial \xi'}{\partial \mu} + \mathbf{H} \times \frac{\partial \eta'}{\partial \mu}.$$

Se ne ricava in primo luogo, ponendo $\mu = q'$ e badando alle (17),

$$p = \frac{\partial T}{\partial q'} = \frac{1}{q} (\Xi \times \xi + \mathbf{H} \times \eta). \tag{22}$$

Se poi si nota che il vettore ω si può esprimere, per mezzo delle componenti ω_ν e dei vettori fondamentali $\mathbf{u}_\nu$, sotto la forma

$$\sum_0^2{}_\nu \, \omega_\nu \mathbf{u}_\nu,$$

si ha, dalle (17),

$$\frac{\partial \xi'}{\partial \omega_\nu} = \xi \wedge \mathbf{u}_\nu \quad , \quad \frac{\partial \eta'}{\partial \omega_\nu} = \eta \wedge \mathbf{u}_\nu,$$

con che

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_\nu} = \Xi \times (\xi \wedge \mathbf{u}_\nu) + \mathbf{H} \times (\eta \wedge \mathbf{u}_\nu) = \mathbf{u}_\nu \times (\Xi \wedge \xi + \mathbf{H} \wedge \eta).$$

Il terzo membro è manifestamente la componente secondo Ox_ν del vettore

$$\Xi \wedge \xi + \mathbf{H} \wedge \eta.$$

Il primo membro è, per definizione, l'analoga componente del vettore Ω. Ne consegue la espressione di Ω sotto la voluta veste vettoriale:

$$\Omega = \Xi \wedge \xi + \mathbf{H} \wedge \eta. \tag{23}$$

6. — Passaggio alla forma reciproca 2Θ mediante eliminazioni vettoriali.

Le definizioni (22), (23) di p ed Ω, e le (16), poste, in virtù delle (20), sotto la forma equivalente

$$\mathfrak{D}\Xi \times \xi - \mathfrak{D}\mathbf{H} \times \eta = 0 \quad , \quad \mathfrak{D}\Xi \times \eta + \mathfrak{D}\mathbf{H} \times \xi = 0, \tag{24}$$

costituiscono in sostanza un sistema di sei equazioni lineari (non omogenee) nei due vettori $\Xi, \mathbf{H}$. Esse consentono quindi (in quanto siano indipendenti,

come infatti sono) di ricavarne le sei componenti in funzione lineare dei varî termini noti (che si riducono a p ed $\boldsymbol{\Omega}$), a coefficienti che possono *a priori* dipendere da ξ, η e dall'omografia $\mathfrak{D}$, ossia, complessivamente, da q, α, β, γ. Portando queste espressioni dei due vettori $\boldsymbol{\Xi}, \mathbf{H}$ nella (21), la $\boldsymbol{T}$ diviene una forma quadratica nelle p, Ω_ν (esente dai primitivi argomenti q', ω_ν); e si ha la Θ cercata, la quale si presenta altresì esente dalle α_ν, β_ν (ha cioè i coefficienti che dipendono soltanto da q e dalle γ_ν): circostanza questa senz'altro prevedibile in base all'analoga proprietà del a $\boldsymbol{T}$, già rilevata al § 3.

Anzichè eseguire per via diretta la risoluzione delle (22), (23), (24), e successiva sostituzione nella (21), conviene trasformare la (21) stessa a mezzo delle altre equazioni.

Dopo alquanti passaggi, tutti immediati sotto il duplice punto di vista concettuale e formale, l'eliminazione di $\boldsymbol{\Xi}, \mathbf{H}$ si troverà automaticamente compiuta.

Prepariamoci anzi tutto l'espressione esplicita di

$$W = \xi \times \mathfrak{D}\xi + \eta \times \mathfrak{D}\eta . \tag{25}$$

Dacchè, a norma della (19), le componenti di $\mathfrak{D}\xi, \mathfrak{D}\eta$ sono ordinatamente $\frac{1}{4Um_\nu^\star \rho_\nu^2}\xi_\nu$, $\frac{1}{4Um_\nu^\star \rho_\nu^2}\eta_\nu$, si ha subito, badando alle (3) e (4),

$$W = \sum_0^2{}_\nu \frac{1}{4Um_\nu^\star} = \frac{m^2}{4Um_0 m_1 m_2} . \tag{26}$$

Ciò premesso, riprendiamo l'espressione (21) di $\boldsymbol{T}$, e scriviamola, sfruttando le (24), sotto la forma equivalente

$$\begin{aligned} 2W\boldsymbol{T} = {} & (\boldsymbol{\Xi} \times \mathfrak{D}\boldsymbol{\Xi} + \mathbf{H} \times \mathfrak{D}\mathbf{H})(\xi \times \mathfrak{D}\xi + \eta \times \mathfrak{D}\eta) \\ & - (\mathfrak{D}\boldsymbol{\Xi} \times \xi - \mathfrak{D}\mathbf{H} \times \eta)^2 - (\mathfrak{D}\boldsymbol{\Xi} \times \eta + \mathfrak{D}\mathbf{H} \times \xi)^2 \end{aligned}$$

Sviluppando materialmente il prodotto e i due quadrati del secondo membro, ove inoltre si aggiunga (ad esso secondo membro) il binomio, identicamente nullo per la proprietà caratteristica delle dilatazioni, $2(\boldsymbol{\Xi} \times \mathfrak{D}\mathbf{H})(\xi \times \mathfrak{D}\eta) - 2(\boldsymbol{\Xi} \times \mathfrak{D}\mathbf{H})(\mathfrak{D}\xi \times \eta)$, si dà a $2W\boldsymbol{T}$ la forma di somma dei sei termini seguenti:

$$\begin{aligned} t_1 &= (\boldsymbol{\Xi} \times \mathfrak{D}\boldsymbol{\Xi})(\xi \times \mathfrak{D}\xi) - (\mathfrak{D}\boldsymbol{\Xi} \times \xi)^2 , \\ t_2 &= (\mathbf{H} \times \mathfrak{D}\mathbf{H})(\eta \times \mathfrak{D}\eta) - (\mathfrak{D}\mathbf{H} \times \eta)^2 , \\ t_3 &= (\boldsymbol{\Xi} \times \mathfrak{D}\boldsymbol{\Xi})(\eta \times \mathfrak{D}\eta) - (\mathfrak{D}\boldsymbol{\Xi} \times \eta)^2 , \\ t_4 &= (\mathbf{H} \times \mathfrak{D}\mathbf{H})(\xi \times \mathfrak{D}\xi) - (\mathfrak{D}\mathbf{H} \times \xi) , \\ t_5 &= 2\{(\boldsymbol{\Xi} \times \mathfrak{D}\xi)(\eta \times \mathfrak{D}\mathbf{H}) - (\boldsymbol{\Xi} \times \mathfrak{D}\mathbf{H})(\mathfrak{D}\xi \times \eta)\} , \\ t_6 &= 2\{(\boldsymbol{\Xi} \times \mathfrak{D}\mathbf{H})(\xi \times \mathfrak{D}\eta) - (\boldsymbol{\Xi} \times \mathfrak{D}\eta)(\mathfrak{D}\mathbf{H} \times \xi)\} . \end{aligned}$$

Ciascuno di questi può essere trasformato usando l'identità

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})(\mathbf{C} \times \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \times \mathbf{D})(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \wedge \mathbf{C}) \times (\mathbf{B} \wedge \mathbf{D})$$

valida qualunque siano i quattro vettori $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$.

In primo luogo, per

$$\mathbf{A} = \Xi \quad , \quad \mathbf{B} = \mathfrak{D}\Xi \quad , \quad \mathbf{C} = \xi \quad , \quad \mathbf{D} = \mathfrak{D}\xi ,$$

viene

$$t_1 = (\Xi \wedge \xi) \times (\mathfrak{D}\Xi \times \mathfrak{D}\xi) ,$$

da cui, cambiando Ξ, ξ in $\mathbf{H}, \eta$,

$$t_2 = (\mathbf{H} \wedge \eta) \times (\mathfrak{D}\mathbf{H} \times \mathfrak{D}\eta) .$$

Assumendo poi

$$\mathbf{A} = \Xi \quad , \quad \mathbf{B} = \mathfrak{D}\Xi \quad , \quad \mathbf{C} = \eta \quad , \quad \mathbf{D} = \mathfrak{D}\eta ,$$

si ha

$$t_3 = (\Xi \wedge \eta) \times (\mathfrak{D}\Xi \wedge \mathfrak{D}\eta) ,$$

la quale, colla sostituzione di $\mathbf{H}, \xi$ a Ξ, η, porge

$$t_4 = (\mathbf{H} \wedge \xi) \times (\mathfrak{D}\mathbf{H} \wedge \mathfrak{D}\xi) .$$

Infine, per

$$\mathbf{A} = \Xi \quad , \quad \mathbf{B} = \mathfrak{D}\xi \quad , \quad \mathbf{C} = \eta \quad , \quad \mathbf{D} = \mathfrak{D}\mathbf{H} ;$$

e

$$\mathbf{A} = \Xi \quad , \quad \mathbf{B} = \mathfrak{D}\mathbf{H} \quad , \quad \mathbf{C} = \xi \quad , \quad \mathbf{D} = \mathfrak{D}\eta ,$$

risulta rispettivamente

$$t_5 = 2(\Xi \wedge \eta) \times (\mathfrak{D}\xi \wedge \mathfrak{D}\mathbf{H}) = -2(\Xi \wedge \eta) \times (\mathfrak{D}\mathbf{H} \wedge \mathfrak{D}\xi),$$
$$t_6 = 2(\Xi \wedge \xi) \times (\mathfrak{D}\mathbf{H} \wedge \mathfrak{D}\eta) .$$

In ognuno dei termini t_j $(j = 1, \dots, 6)$ così trasformati, figura un prodotto vettoriale del tipo

$$\mathfrak{D}\mathbf{A} \wedge \mathfrak{D}\mathbf{B} .$$

Dalla teoria delle omografie vettoriali si sa [1] che un tale prodotto dipende da A e da B esclusivamente pel tramite del loro prodotto vettoriale. E precisamente si ha

$$\mathfrak{D}\mathbf{A} \wedge \mathfrak{D}\mathbf{B} = \mathrm{R}\mathfrak{D}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) ,$$

l'operatore R applicato alla dilatazione $\mathfrak{D}$ producendo, a norma della (19), la dilatazione

$$(27) \qquad \left(\frac{1}{16\, \mathrm{U} m^{\star}_{\nu+1}\, m^{\star}_{\nu+2}\, \rho^2_{\nu+1}\, \rho^2_{\nu+2}} \; \begin{matrix} \mathbf{u}_\nu \\ \mathbf{u}_\nu \end{matrix} \right) \qquad (\nu = 0, 1, 2) .$$

[1] Burali-Forti e Marcolongo, op. cit., pp. 38-39.

Applichiamo questa formula ai vari t_j, introducendo per brevità il simbolo operativo

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{W} R \mathfrak{D} ,$$

il quale, in virtù delle (4), (26) e (27), si scrive

$$(28) \qquad \mathfrak{G} = \frac{1}{4U} \begin{pmatrix} \frac{1}{m_\nu \rho_{\nu+1}^2 \rho_{\nu+2}^2} & \mathbf{u}_\nu \\ & \mathbf{u}_\nu \end{pmatrix} \qquad (\nu = 0, 1, 2).$$

Otteniamo

$$\frac{1}{W} t_1 = (\Xi \wedge \xi) \times \mathfrak{G}(\Xi \wedge \xi) ,$$

$$\frac{1}{W} t_2 = (\mathbf{H} \wedge \eta) \times \mathfrak{G}(\mathbf{H} \wedge \eta) ,$$

$$\frac{1}{W} t_3 = (\Xi \wedge \eta) \times \mathfrak{G}(\Xi \wedge \eta) ,$$

$$\frac{1}{W} t_4 = (\mathbf{H} \wedge \xi) \times \mathfrak{G}(\mathbf{H} \wedge \xi) ,$$

$$\frac{1}{W} t_5 = -2(\Xi \wedge \eta) \times \mathfrak{G}(\mathbf{H} \wedge \xi) ,$$

$$\frac{1}{W} t_6 = \quad 2(\Xi \wedge \xi) \times \mathfrak{G}(\mathbf{H} \wedge \eta) .$$

Ora, in quanto $\mathfrak{G}$ è essa stessa una dilatazione, si ha ovviamente

$$\frac{1}{W}(t_1 + t_2 + t_6) = (\Xi \wedge \xi + \mathbf{H} \wedge \eta) \times \mathfrak{G}(\Xi \wedge \xi + \mathbf{H} \wedge \eta) ,$$

$$\frac{1}{W}(t_3 + t_4 + t_5) = (\Xi \wedge \eta - \mathbf{H} \wedge \xi) \times \mathfrak{G}(\Xi \wedge \eta - \mathbf{H} \wedge \xi) ,$$

le quali, badando alla (23) e ponendo

$$(29) \qquad \boldsymbol{X} = \Xi \wedge \eta - \mathbf{H} \wedge \xi ,$$

si scrivono più semplicemente

$$\frac{1}{W}(t_1 + t_2 + t_6) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathfrak{G}\boldsymbol{\Omega} ,$$

$$\frac{1}{W}(t_3 + t_4 + t_5) = \boldsymbol{X} \times \mathfrak{G}\boldsymbol{X} .$$

La somma delle t_j non è altro che $2W\boldsymbol{T}$; si ha quindi

$$2\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathfrak{G}\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{X} \times \mathfrak{G}\boldsymbol{X} .$$

È questa, come passiamo ad accertare, la voluta espressione 2Θ di $2T$, tosto esplicitabile come forma quadratica degli argomenti p, Ω_ν. E in verità essa è visibilmente funzione quadratica dei due vettori $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{X}$, a coefficienti che, a norma della (28), dipendono soltanto dalle ρ, ossia, per le (11), da q e dalle γ_ν: l'asserto sarà quindi provato se constateremo che X è funzione lineare ed omogenea di p, e delle Ω_ν, con analoghi coefficienti.

All'uopo, partiamoci dall'osservazione che, attesa l'ortogonalità di α, β, γ, si ha dalle (7):

$$\xi = \eta \wedge \gamma \quad , \quad \eta = -\xi \wedge \gamma ;$$

con che la (29) può essere scritta

$$\boldsymbol{X} = -\boldsymbol{\Xi} \wedge (\xi \wedge \gamma) - \mathbf{H} \wedge (\eta \wedge \gamma) .$$

D'altra parte, l'identità

$$\boldsymbol{\Xi} \wedge (\xi \wedge \gamma) + \xi \wedge (\gamma \wedge \boldsymbol{\Xi}) + \gamma \wedge (\boldsymbol{\Xi} \wedge \xi) ,$$

ove si noti che, per l'ortogonalità fra ξ e γ, il termine medio si riduce a $(\Xi \times \xi)\gamma$, porge

$$-\boldsymbol{\Xi} \wedge (\xi \wedge \gamma) = (\boldsymbol{\Xi} \times \xi)\gamma + \gamma \wedge (\boldsymbol{\Xi} \wedge \xi) .$$

Poniamovi $\mathbf{H}$, η al posto di $\boldsymbol{\Xi}$, ξ, e sommiamo, tenendo conto delle (22) e (23). Risulta

$$\boldsymbol{X} = pq\gamma + \gamma \wedge \boldsymbol{\Omega} , \tag{30}$$

e rimane in definitiva acquisita per la forma reciproca l'annunciata espressione

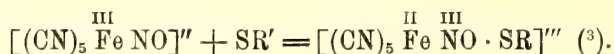
$$2\Theta = \boldsymbol{\Omega} \times \mathfrak{E}\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{X} \times \mathfrak{E}\boldsymbol{X} , \tag{31}$$

la dilatazione $\mathfrak{E}$ e il vettore X essendo rispettivamente definiti dalle (28) e (30).

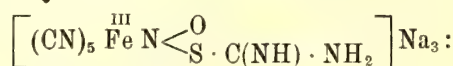
Chimica. — *Sulla reazione del nitroprussiato con la solfourea* [1]. Nota di Livio Cambi, presentata del Socio A. Angeli.

Ho precedentemente dimostrato [2] che la reazione cromatica che diversi chetoni dànno col nitroprussiato è dovuta alla formazione di uno ione complesso contenente l'aggruppamento del nitrosochetone. Ha luogo cioè una condensazione, fra il nitrosogruppo del prussiato ed il chetone, analoga a quella dei nitriti alcoolici o dei nitrosoderivati, in mezzo alcalino, con composti ad atomi di idrogeno mobile.

Delle reazioni cromatiche del nitroprussiato rimane ancora oscura quella con i solfuri o con alcuni mercapturi alcalini. È probabile che essa sia pure dovuta ad una condensazione del tipo

$$[(CN)_5 \overset{III}{Fe} NO]'' + SR' = [(CN)_5 \overset{II}{Fe} \overset{III}{NO} \cdot SR]''' \quad (^3).$$

Occupandomi di questa reazione, ho creduto opportuno di soffermarmi su l'unico sale finora descritto come contenente l'aggruppamento cromatico del nitroprussiato con i solfuri, cioè sul sale ottenuto da K. A. Hofmann facendo reagire la tiourea col nitroprussiato [4].

Questo autore attribuiva al composto (rosso-violetto) la formula

$$\left[(CN)_5 \overset{III}{Fe} N{<}^{O}_{S \cdot C(NH) \cdot NH_2}\right] Na_3 :$$

cioè supponeva un aggruppamento derivante dalla semplice addizione della solfourea, nella forma $HS \cdot C(NH) \cdot NH_2$, al gruppo NO del prussiato.

Se realmente il sale di Hofmann avesse avuto stretta relazione con i sali colorati che il nitroprussiato dà con i solfuri [5], le sue scissioni, poco

[1] Lavoro eseguito nel laboratorio di Elettrochimica del R. Istituto tecnico superiore in Milano.

[2] Rendiconti R. Acc. Lincei, XXI (1913), 1° sem., pag. 376; XXIII (1914), 1° sem., pag. 812.

[3] Ricorderò che H. S. Tasker e H. O. Jones (Journ. chem. soc. 95 (1909), pag. 1916), osservarono composti, estremamente labili, intensamente colorati, facendo reagire il cloruro di nitrosile su alcuni mercaptani e mercapturi, ai quali spetta probabilmente la formola $RS \cdot NO$: essi si scindono in biossido d'azoto e bisolfuro.

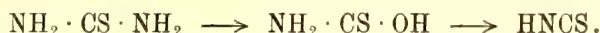
[4] Liebig's Annalen, *311* (1900), pag. 28.

[5] Hofmann, a questo proposito, si esprimeva (loc. cit., pag. 28): « Nun ist es mir aber gelungen mit Thioharnstoff einen prachtvoll gefärbten Körper rain zu erhalten, *der zweifellos mit den aus Schwefelalkali und Nitroprussianatrium entstehenden, violett gefärbten Stoffen nahe verwandt ist....* ».

indagate dall'autore, avrebbero presentato notevole interesse; e ne intrapresi lo studio. Fui così condotto a dover modificare profondamente la formula e la struttura del sale in quistione.

Già, in primo luogo, la determinazione d'azoto (su cui non si hanno dati nella citata Nota di Hofmann) mi condusse al rapporto 1Fe : 7N in luogo di 1Fe : 8N, come esige la formola suesposta. Questo fatto richiamava l'osservazione, già da me compiuta, che nella sintesi si sviluppano quantità rilevanti d'azoto.

È noto, d'altra parte, che i nitriti alcalini in mezzo acido, per acido debole, trasformano la solfourea in ac. solfocianico con sviluppo quantitativo d'azoto [1]:

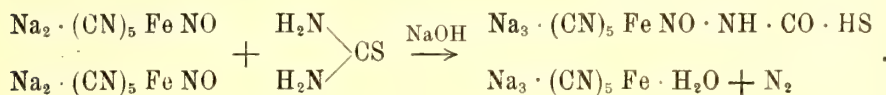
$$NH_2 \cdot CS \cdot NH_2 \longrightarrow NH_2 \cdot CS \cdot OH \longrightarrow HNCS .$$

Pervenni da ciò all'ipotesi che nella formazione del sale colorato non reagisse, col gruppo NO del prussiato, l'atomo di solfo della tiourea, ma invece reagissero i due aggruppamenti aminici dell'urea stessa: che il sale di Hofmann avesse la struttura [2]

$$[(CN)_5 \overset{II}{Fe} NO \cdot NH \cdot CO \cdot SH] Na_3 ,$$

contenesse cioè l'aggruppamento dell'acido nitrosotiocarbamico.

L'ipotesi ricevette una conferma da quanto andrò esponendo.

Secondo la formola propòsta dovevano reagire due molecole di nitroprussiato con la solfourea, nella sintesi del sale:

$$\begin{matrix} Na_2 \cdot (CN)_5 Fe NO \\ Na_2 \cdot (CN)_5 Fe NO \end{matrix} + \begin{matrix} H_2N \\ H_2N \end{matrix} \!\!>\! CS \xrightarrow{NaOH} \begin{matrix} Na_3 \cdot (CN)_5 Fe NO \cdot NH \cdot CO \cdot HS \\ Na_3 \cdot (CN)_5 Fe \cdot H_2O + N_2 \end{matrix} .$$

Nella reazione di Hofmann si forma infatti in quantità rilevante l'acquoferrocianuro [3]. Di più, facendo reagire col nitroprussiato la solfourea in soluzione di alcool metilico in presenza di un eccesso di alcoolato sodico, ottenni un sale giallo-aranciato, che contiene indubbiamente un residuo della tiourea per due atomi di ferro, cui spetta con ogni probabilità la formola

$$Na_7 [(CN)_5 \overset{II}{Fe} \cdots NO \cdot NH \cdot CO \cdot S - \overset{II}{Fe} (CN)_5] .$$

Questo sale si scinde in soluzione acquosa, decomponendosi, e genera il sale rosso di Hofmann.

(1) E. A. Werner, Journ. chem. soc. *101* (1912), pag. 2180; *103* (1913), pag. 1221.

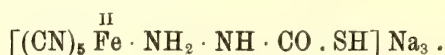
(2) Indico schematicamente l'ac. nitrosotiocarbamico con $ON \cdot NH \cdot CO \cdot SH$: non intendo con ciò escludere che possano intervenire nello ione complesso forme tautomere, ad es.: $CO(SH)N : NOH$; $C(N \cdot NO)SH \cdot OH$.

(3) Hofmann, loc. cit., pag. 32.

In seguito, facendo agire la soda su una soluzione acquoso-metilalcoolica del sale rosso, ho ottenuto un nuovo sale giallo-arànciato bruno, avente la composizione $Na_5[(CN)_5 Fe NO \cdot N \cdot CO \cdot S]$. Cioè si aveva una salificazione dell'acido nitrosotiocarbamico, da me ammesso nel sale complesso. Il nuovo sale, appena preparato, si scinde in soluzione acquosa idrolizzandosi nel sale primitivo. Invece, mantenuto a lungo nel vuoto, si scinde in parte, a contatto con l'acqua, con sviluppo d'azoto: ricorda in ciò il comportamento del sale $ON \cdot NK \cdot CO \cdot OK$ [1], che allo stato secco si decompone violentemente con l'acqua.

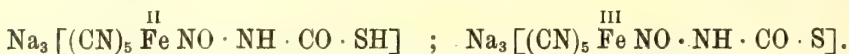
Inoltre, con i sali d'argento, con i sali mercurici, il sale rosso si scinde a caldo rapidamente, svolgendo biossido di azoto, nel rapporto 1NO : 1Fe: questa reazione richiama le scissioni di diversi nitrosoderivati [2]. Anche il sale ottenuto dalla solfourea in soluzione metilalcoolica, in condizioni analoghe, svolge biossido di azoto nel rapporto 0,5 NO : 1Fe, in accordo con la formola su citata.

Ma la conferma definitiva che i due atomi di azoto dell'aggruppamento nitrosato del sale rosso sono effettivamente congiunti fra loro, è data dai caratteri del prodotto di riduzione di questo sale. Con amalgama di sodio ottenni un sale giallo che risponde allo schema

$$[(CN)_5 \overset{II}{Fe} \cdot NH_2 \cdot NH \cdot CO . SH] Na_3 .$$

In esso l'aggruppamento, $NH_2 \cdot NH$ —, dell'idrazina, viene dimostrato dall'azione dei sali mercurici, dell'ossido mercurico, dei sali d'argento, del reattivo di Fehling, che lo decompongono con rapido svolgimento d'azoto, anche a freddo. L'acqua di bromo svolge pure azoto e non genera nemmeno tracce di nitroprussiato, a differenza del sale rosso che non svolge affatto gas e genera nitroprussiato.

La riduzione adunque, analogamente a quanto si compie nei nitrosouretani, trasforma in idrazide il nitrosocomposto rosso.

Poteva aversi infine il dubbio che il sale rosso non fosse ferroso, ma ferrico, come ammetteva Hofmann; potevano discutersi le due formole

$$Na_3 [(CN)_5 \overset{II}{Fe} NO \cdot NH \cdot CO \cdot SH] \quad ; \quad Na_3 [(CN)_5 \overset{III}{Fe} NO \cdot NH \cdot CO \cdot S].$$

(1) Thiele, Liebig's Annalen, *288* (1895), 310.

(2) Probabilmente sotto l'azione decomponente del sale d'argento o di mercurio lo ione complesso si scinde e il gruppo dell'ac. nitrosocarbamico reagisce idrolizzandosi, come una nitrosoamina: $ON . NH . CO . SH \longrightarrow NHO_2 + HCNS$. L'ac. nitroso nel caso attuale non può liberarsi essendo presente un aggruppamento ferroso che tende a ridurlo ad NO.

Richiamo che in parte il nitrosouretano può scindersi in ac. nitroso e uretano (Thiele e Dent, Ann., 302, 247), e che la nitrosoguanidina si idrolizza analogamente (Thiele, Ann. 273, 133).

Hofmann si basava unicamente sulla reazione con cloruro ferrico, con cui si ha una colorazione o un precipitato verdastro. Ho osservato però un comportamento simile nei ferrocianuri contenenti nitrosochetone, che sono pure intensamente colorati. Il comportamento succitato con gli alcali è in accordo con la formola ferrosa; e d'altra parte il sale rosso non possiede caratteri di ferricianuro.

Infine ricorderò che, come i nitrosochetoni e le diossime, anche i nitrosoderivati della carbamide dànno sali ferrosi colorati intensamente: la nitrosoguanidina dà, con i sali ferrosi, un complesso dal colore rosso-porpora. Tutto ciò avvalora la mia ipotesi che al sale di Hofmann spetti la forma ferrosa.

Parte sperimentale.

Reazione della tiourea con nitroprussiato in soluzione acquosa.

Il sale di Hofmann venne dapprima preparato seguendo le indicazioni di questo autore: facendo cioè reagire un forte eccesso di solfourea sul nitroprussiato in soluzione molto concentrata, a freddo (5°). Venne pure isolato seguendo le sue indicazioni: purificandolo cioè per via di ripetute precipitazioni dalle soluzioni acquose con alcool, e infine disciogliendolo in alcool metilico acquoso e riprecipitandolo con etere.

Il sale presenta tutti i caratteri descritti dall'autore: è una polvere rosso scura, molto deliquescente, solubilissima in acqua. Le soluzioni hanno un'intensa colorazione rosso-violetta.

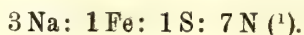
Ho sperimentato anche in condizioni diverse l'azione della solfourea sul nitroprussiato: facendola reagire in presenza di carbonato alcalino, tanto a freddo come a circa 70°-80°; aggiungendo anche nitrito sodico. Ho notato sempre però scarsi rendimenti, come del resto nella reazione di Hofmann (rispetto al nitroprussiato impiegato). La formazione del sale è sempre accompagnata da effervescenza per svolgimento d'azoto.

Le analisi seguenti si riferiscono le I al sale preparato col metodo di Hofmann, le altre al sale ottenuto con le varianti su accennate. Riporto anche per confronto le analisi che si trovano nella Nota di quell'autore.

	Trovato					Calcolato per
	Hofmann	Cambi				$Na_3[(CN)_5FeNO\cdot NH\cdot CO\cdot SH]$ (¹)
		I	II	III	IV	
Na	19.49 %	19.02	18.88	19.91	—	19.12 %
Fe	15.17	14.86	15.22	15.46	15.83	15.47
N	—	25.93	—	26.62	27.94	27.16
S	9.01	—	—	—	8.96	8.88

(¹) La formola di Hofmann risponde a percentuali di sodio, ferro e solfo, assai vicine a quella della mia formola.

Dal complesso di queste analisi si rileva il rapporto costante

3 Na: 1 Fe: 1 S: 7 N [1].

La determinazione d'azoto venne compiuta usando il metodo solito, impiegando in questo caso acido carbonico secco e freddo proveniente da un Kipp.

A z i o n e d e g l i a l c a l i. — In soluzione acquosa, soltanto impiegando forte eccesso di alcali concentrato si può notare un passaggio di colore dal rosso violetto del sale di Hofmann all'aranciato. Il prodotto di salificazione completa venne isolato versando in una soluzione di alcoolato metilico sodico, in eccesso, la soluzione acquosa concentrata del sale rosso: precipitò oleoso il sale giallo-scuro, che, lavato con alcool metilico assoluto e seccato nel vuoto a peso costante, aveva la composizione

	Trovato	Calcolato per $Na_5[(CN)_5FeNO{\cdot}N{\cdot}CO{\cdot}S]$
Na	27.91 %	28.40
Fe	13.67	13.80

Il sale, deliquescente, appena preparato si discioglie in acqua idrolizzandosi, come dissi, e assumendo il colore rosso-violetto; in soluzioni concentrate è rosso-aranciato. Dopo essere stato per molti giorni nel vuoto, si discioglieva in acqua con riscaldamento e decomponendosi in parte con sviluppo di azoto.

S c i s s i o n i a b i o s s i d o d i a z o t o. — Il sale rosso-violetto, con i sali d'argento, dà prima un precipitato rossastro che a caldo si decompone rapidamente, svolgendo biossido di azoto. La reazione venne condotta in un apparecchio Schulze-Tiemann in cui venne posto dapprima solfato d'argento in eccesso e infine il nitrososale; ebbi il risultato

	Trovato	Calcolato per $Na_3[(CN)_5Fe\,NO{\cdot}NH{\cdot}CO{\cdot}SH]$
NO	7.44 %	8.31 %

Il rapporto tra ferro ed NO nel sale adoperato in questa determinazione risulta 1Fe: 0.93 NO.

Una reazione analoga è fornita dall'ossido mercurico e dai sali mercurici; in diverse determinazioni, eseguite con lo stesso metodo delle precedenti, ottenni in media il rapporto 1Fe: 0.85 NO.

Queste decomposizioni ricordano, l'unica decomposizione descritta da Hofmann: quella dovuta all'acqua di bromo. Con questo reattivo il sale

[1] Hofmann (pag. 29) cita un fatto che può accordarsi con la mia formola. Nota che a 110° il suo sale perde il 4.84 % del suo peso, *pur conservando il colore vivo in soluzione acquosa.* Sembra, quindi, che l'aggruppamento nitrosato tenda a scindersi ($NO{\cdot}NH{\cdot}CO{\cdot}SH \rightleftarrows NO{\cdot}NCS + H_2O$): infatti nella mia formola si calcola 4.99 % di acqua.

rosso si decompone generando nitroprussiato, mentre l'aggruppamento NCS si ossida producendo acido solforico, come ho notato.

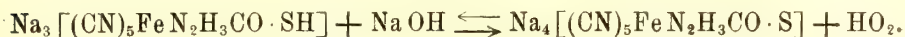
Riduzione con amalgama di sodio. — Ad una suluzione concentrata del sale rosso, raffreddata a 0°, venne aggiunto in piccole porzioni amalgama di sodio semifluida, mantenendo il tutto in viva agitazione. Il colore rosso-violetto lentamente scompare per dar luogo ad una colorazione giallo-oro intensa. Ho impiegato, per ogni atomo di ferro del nitrososale, circa otto atomi di sodio.

Il nuovo sale formatosi venne separato in forma oleosa con alcool, e venne purificato ridisciogliendolo in acqua e riprecipitandolo con alcool. Si separa sempre oleoso, di colore giallo-scuro; non mostra tendenza ad assumere stato cristallino. Lavato ripetutamente, con alcool assoluto, venne seccato nel vuoto a peso costante. Si presenta in granuli giallo-verdi, deliquescente, solubilissimo in acqua.

L'analisi delle diverse preparazioni diede il risultato seguente:

	Trovato		Calcolato per	
	I	II	$Na_3[(CN)_5FeNH_2{\cdot}NH{\cdot}CO{\cdot}SH]$;	$Na_4[(CN)_5FeNH_2{\cdot}NH{\cdot}COS]$
Na	20.76 %	22.19	19.89 %	24.86
Fe	16.20	15.41	16 09	15.10
N	27.34	26.62	28.29	26.50
S	—	9.32	9.24	8.66

Nei due prodotti analizzati, mentre i rapporti tra ferro e sodio variano da 3Na:1Fe a 3.5Na:1Fe, rimangono invece costanti i rapporti 1Fe:7N:1S; il che giustifica la struttura da me data allo ione complesso. La variazione dei rapporti sodio-ferro si può spiegare pensando che in soluzione acquosa, da cui venne precipitato il sale con alcool, vi era un eccesso di di alcali e che si aveva probabilmente l'equilibrio:

$$Na_3[(CN)_5FeN_2H_3CO\cdot SH] + NaOH \rightleftarrows Na_4[(CN)_5FeN_2H_3CO\cdot S] + HO_2.$$

Tale equilibrio sarà certamente influenzato dalle condizioni di concentrazione variabili, specie nella purificazione.

Il sale ridotto è assai alterabile: in soluzione acquosa assorbe ossigeno e da prima si colora in violaceo, infine assume colore verdastro con profonda decomposizione, per separazione anche di ossido ferrico.

Ossidato con acqua di bromo, assume colore violetto, poi si decompone svolgendo rapidamente azoto e decolorandosi (¹). Così pure, come dissi, si decompone con i sali mercurici, d'argento, con l'ossido rameico in soluzione

(¹) Con acqua di bromo a caldo, ottenni uno sviluppo d'azoto rispondente a 1Fe:2.2N.

alcalina. Con ossido mercurico i due prodotti su analizzati diedero i risultati seguenti:

	Trovato		Calcolato per	
	I	II	$Na_3[(CN)_5FeN_2H_3CO\cdot SH]$;	$Na_4[(CN)_5FeN_2H_3CO\cdot S]$
N	7.54 %	7.38	8.07	7.56

L'aggruppamento dell'idrazina è messo in evidenza, rispondendo entrambe le determinazioni rispettivamente ad $1Fe:1N_2$.

Reazione della tiourea con nitroprussiato in alcool metilico.

Venne seguito il metodo già da me descritto per la reazione dei chetoni [1]. Alla soluzione alcoolica di nitroprussiato venne aggiunta la solfourea e quindi alcoolato sodico. La reazione procede lentamente: il liquido si colora in rosso scuro, e si separa lentamente il sale sotto forma di polvere ocra-scura; contemporaneamente si ha un lento sviluppo d'azoto. Dopo qualche giorno, il sale venne raccolto su filtro, in atmosfera secca, lavato ripetutamente con alcool metilico, e infine con etere.

Mantenuto nel vuoto su ac. solforico a peso costante aveva la composizione seguente:

	Trovato		Calcolato
	I	II	$Na_7\{[(CN)_5Fe]_2CS\cdot NH\cdot NO\}\cdot H_2O$
Na	24.31 %	23.76	24.51
Fe	16.20	16.50	17.00
N	—	25.48	25.69
S	—	5.27	4.88
NO	4.29	—	4.56

Le analisi si riferiscono a prodotti ottenuti in due diverse preparazioni: nella prima vennero aggiunte, per una molecola di solfourea e nitroprussiato, circa quattro molecole di alcoolato, nella seconda tre. Sono evidenti i rapporti:

$$3.5\ Na : 1\ Fe : 0.5\ S : 0.5\ NO.$$

La determinazione del biossido di azoto venne compiuta come la precedente del sale rosso, avendo questo nuovo sale lo stesso comportamento del primo rispetto ai sali d'argento e di mercurio.

Il sale è deliquescente; la soluzione acquosa ha colore aranciato scuro; la soluzione, lasciata a sè, lentamente si colora in rosso-violetto. A caldo si scinde in ossido ferrico, ferrocianuro e nel sale rosso di Hofmann: nella soluzione, intensamente colorata in rosso-violetto, si riconosce il sale di Hof-

[1] loc. cit.

mann in tutte le sue proprietà. Infine il sale aranciato, con acqua di bromo, genera nitroprussiato e ferricianuro.

Chiudendo noterò che, pur non essendo finora noti gli acidi $NO \cdot NH \cdot CO \cdot SH$ e $NH_2 \cdot NH \cdot CO \cdot SH$ i cui aggruppamenti ho ammessi nei sali complessi che ho studiati, sono noti i corrispondenti ossigenati: l'acido del sale di Thiele $NO \cdot NK \cdot CO \cdot OK$, e l'acido idrazincarbonico $NH_2 \cdot NH \cdot CO \cdot OH$ del quale conosciamo anche un derivato solforato; la tiosemicarbazide $NH_2 \cdot NH \cdot CS \cdot NH_2$.

Matematica. — *Sui gruppi di sostituzioni che operano su infiniti elementi.* Nota di Giulio Andreoli, presentata dal Socio V. Volterra.

1. Scopo di questa breve Nota è di presentare a codesta illustre Accademia alcuni risultati da me ottenuti sui gruppi di sostituzioni operanti su infiniti elementi, e sulle loro applicazioni. La teoria svolta presenta relazioni con quella degli insiemi e con quella dei gruppi del Lie. Tralascio per ora di accennarne le applicazioni [1].

2. Chiameremo sostituzione l'operazione che da qualunque elemento α d'un certo insieme ci fa passare ad un elemento a dello stesso insieme; con la condizione che, se $\alpha \neq \beta$, sia anche $a \neq b$; le definizioni di prodotto, potenza, commutatività restano invariate.

Esistono sostituzioni che non ammettono l'inversa: come la sostituzione che operando sull'insieme numerabile $a_1 a_2 a_3 \ldots$ muta a_1 in $a_2, \ldots a_n$ in a_{n+1}.

Il concetto di sostituzione ciclica ordinaria si scinde in tre, nel nostro caso:

1°) *cicli*: sostituzioni che permutano n lettere secondo lo schema $(a_1 a_2 \ldots a_n)$;

2°) *cicli infiniti chiusi, o anelli*: sostituzioni operanti su una infinità (necessariamente numerabile) di elementi secondo lo schema

$$\begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots a_{-1}\, a_0\, a_1\, a_2 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots a_0\; a_1\, a_2\, a_3 \ldots \end{pmatrix},$$

e che segneremo $(\infty \ldots a_{-1}\, a_0\, a_1\, a_2 \ldots \infty)$; ammettono l'inversa;

3°) *cicli infiniti aperti, o catene*: operano secondo lo schema

$$\begin{pmatrix} a_1\, a_2 \ldots \\ a_2\, a_3 \ldots \end{pmatrix};$$

li segneremo $(a_1\, a_2 \ldots \infty)$; non ammettono sostituzione inversa.

[1] Le svolgerò in una prossima Nota.

Si ha il teorema: *Ogni sostituzione si decompone in cicli, anelli, catene operanti su elementi distinti.*

Inoltre: *La potenza n-esima di un anello è il prodotto di* $|n|$ *anelli staccati, per n intero positivo o negativo.*

La potenza n-esima di una catena è il prodotto di n catene staccate.

Introducendo il concetto di ordine delle sostituzioni nel solito modo, si hanno i seguenti tipi di sostituzioni: α) quelle ad ordine finito di cicli; β) quelle ad ordine finito ed un numero infinito di cicli; γ) quelle ad ordine infinito, composte di soli cicli; δ) quelle d'ordine infinito, composte anche d'anelli; ε) quelle con catene.

Nelle sostituzioni chiameremo *caratteristica* il complesso di elementi che mancano nel denominatore della sostituzione: quelli, cioè, da cui prendono origine le catene; e *rango* r il loro numero o la potenza del loro insieme.

3. Un certo insieme di sostituzioni si dirà formare gruppo se il prodotto di due sue qualunque sostituzioni appartiene al complesso; esso avrà ordine α e grado β, se α e β sono il numero o la potenza degli insiemi delle sostituzioni e degli elementi.

L' inversa d'una sostituzione (se esiste) non è necessariamente compresa nel gruppo; se è compresa — qualunque sia la sostituzione — il gruppo si dirà *completo*.

Un concetto, che nei gruppi ordinarî diventa quello d'eguaglianza, è quello che diremo di *subvarianza*: un gruppo (o complesso) Γ è subvariante di G, se il prodotto di due loro sostituzioni appartiene a G. Vale il teorema: *Se* G *possiede la sostituzione identica,* Γ *sarà un sottogruppo di* G. Inoltre, sulle caratteristiche si può dire: *Le sostituzioni d'un gruppo, aventi rango uguale o maggiore di* v, *formano un sottogruppo*, che segneremo $(v\mathfrak{G})$; il sottogruppo $(1\mathfrak{G})$ lo diremo *di irreversibilità.* Oltre questo, vi è il sottogruppo composto da tutte le sostituzioni che ammettono inversa: lo diremo *primo sottogruppo d'inversione*, e lo segneremo $(J\mathfrak{G})$; così anche v'è il sottogruppo di tutte le sostituzioni che ammettono inversa, appartenente ancora al gruppo: *secondo sottogruppo d'inversione* o $(i\mathfrak{G})$; esso è sottogruppo di $(J\mathfrak{G})$. Vi è inoltre il *terzo gruppo d'inversione* o $(f\mathfrak{G})$; esso è composto dall' insieme di sostituzioni del gruppo aventi ordine finito, ed è sottogruppo di $(i\mathfrak{G})$; infine v'è il *sottogruppo di non inversione* o $j\mathfrak{G}$, composto dalle sostituzioni la cui inversa esiste ma non appartiene al gruppo. Si ha il teorema:

Qualunque gruppo si decompone identicamente nella somma di $(1\mathfrak{G})$, $(i\mathfrak{G})$, $(j\mathfrak{G})$: cioè

$$\mathfrak{G} = (1\mathfrak{G}) + (J\mathfrak{G}) \;;\; (J\mathfrak{G}) = (i\mathfrak{G}) + (j\mathfrak{G}) \;;\; \mathfrak{G} = (1\mathfrak{G}) + (i\mathfrak{G}) + (j\mathfrak{G});$$

$(J\mathfrak{G})$, $(i\mathfrak{G})$ *sono subvarianti ad* $(1\mathfrak{G})$; $(j\mathfrak{G})$ ad $(i\mathfrak{G})$.

Quindi, per tale teorema, basta studiare separatamente i gruppi $\mathfrak{G}$, coincidenti con $(1\mathfrak{G})$ (*gruppi di prima specie*); quelli coincidenti con $j\mathfrak{G}$ (*gruppi di seconda specie*); quelli coincidenti con $i\mathfrak{G}$ (*gruppi di terza specie*). Questi ultimi sono la immediata estensione degli ordinarî.

Si presenta la quistione di convergenza d'un insieme ben ordinato (in particolare numerabile) di sostituzioni operanti su insiemi d'elementi. Diremo che un insieme ben ordinato di sostituzioni S converge *astrattamente* ad una sostituzione Σ, se, scelto un elemento ξ, si possa sempre trovare una sostituzione S_ξ tale che essa e tutte le seguenti mutino sempre ξ nello stesso elemento η: Σ muterà ξ in η; in modo analogo per la divergenza astratta e l'indeterminazione astratta. In tal modo, si possono costruire dei criterî di convergenza astratta per lo studio dei prodotti di infinite sostituzioni: $S_1 . S_2 . S_3, \ldots$

Si vede che il simbolo (A , B), gruppo generato dai complessi A e B, può avere infiniti significati. Infatti, delle sostituzioni limiti, noi possiamo sceglierne solo alcune — secondo un criterio γ — come appartenenti ad (A , B): in particolare nessuna o tutte.

Un gruppo generico $\mathfrak{G}$ si dirà chiuso se tutte le sue sostituzioni limiti vi appartengono; aperto, nel caso contrario; totalmente aperto se nessuna v'appartiene, salvo le evidenti

$$\Sigma = \lim S_n \quad ; \quad S_n = S .$$

I gruppi ordinarî sono tali che dànno luogo a successioni (o insiemi ben ordinati) astrattamente indeterminate.

4. I gruppi di prima specie hanno una costituzione particolarmente semplice: se, per ricorrenza, indichiamo con C_n il complesso di sostituzioni

$$(n\mathfrak{G}) - \Sigma C_{r_1} \ldots C_{r_m} \qquad (r_1 + \cdots r_m = n),$$

con $(e\mathfrak{G})$ indichiamo poi l'insieme di sostituzioni a caratteristica finita, e con $(\omega\mathfrak{G})$ quello a caratteristica infinita, avremo

$$\mathfrak{G} = (1\mathfrak{G}) = (e\mathfrak{G}) + (\varpi\mathfrak{G}) = C_1 + (2\mathfrak{G}) = C_1 + [C_1C_1 + C_2] + (3\mathfrak{G}) = \cdots$$

Ma $(e\mathfrak{G})$ è un gruppo aperto generato da $C_1, C_2, C_3, \ldots$ secondo la legge

$$(e\mathfrak{G}) = C_1 + [C_1C_1 + C_2] + [C_1C_1C_1 + C_1C_2 + C_2C_1 + C_3] + \cdots ;$$

$\varpi\mathfrak{G}$ invece è eguale alla somma del complesso $\gamma\ (e\mathfrak{G})$, costituito dalle sostituzioni limiti di $e\mathfrak{G}$ scelte secondo il criterio γ — e d'un sottogruppo $\mathfrak{G}'$ — chiuso secondo γ: quindi abbiamo

$$\mathfrak{G} = (e\mathfrak{G}) + \gamma(e\mathfrak{G}) + \mathfrak{G}' .$$

Notiamo che $\mathcal{G}'$ a sua volta si decompone nella somma di altrettanti complessi $\mathcal{G}'_{\alpha}$ relativi alle diverse potenze (d'insieme) α: e supposta conosciuta la teoria di queste, si potrebbe continuare nella decomposizione.

Se nelle catene di C_1, C_2, ... noi pensiamo introdotti degli elementi α in modo da trasformare in anelli le catene ([1]), diremo questi elementi *ideali*, e noi passeremo da un gruppo di prima specie ad uno di seconda; e se reciprocamente consideriamo certi elementi effettivi come ideali, passeremo da uno di seconda ad uno di prima specie. Fra le sostituzioni allora ve ne saranno alcune che muteranno elementi effettivi in ideali: le diremo sostituzioni ideali; esse si trovano completando il gruppo di seconda specie mediante le sostituzioni inverse.

Quindi si ha: *Con l'introduzione degli elementi ideali* (riguardando cioè certi elementi come effettivi, altri come ideali) *ogni gruppo di seconda specie è oloedricamente isomorfo ad uno di prima.*

Il concetto di transitività si scinde in diversi altri: secondo che esiste almeno un elemento che si può trasformare in qualunque altro o che sia il trasformato, o se un qualunque elemento si può trasformare in qualunque altro. Vi è infine il concetto di quasi-transività: se gli elementi si possono raggruppare in un insieme ordinato di insiemi, sì che un elemento d'un insieme A si può trasformare in uno di B, solo se A precede B nell'ordinamento.

Con qualunque di essi vale il teorema:

Un gruppo di transitività α-pla, di grado β, deve essere d'ordine maggiore di α^{β}: e precisamente d'ordine

$$\beta_{\alpha} \cdot \varpi ,$$

ove ϖ sia il massimo ordine di sottogruppi lascianti fermi α elementi, e se almeno uno dei tre numeri α, β, γ è un transfinito.

Se un gruppo è regolare-numerabile, la sua transitività deve essere finita.

Se un gruppo è regolare-continuum, la sua transitività deve essere finita o numerabile, ecc.

5. Oltre la convergenza astratta, si presenta la convergenza relativa o concreta. Data un opportuna definizione di scarto di due elementi e di elementi limiti, ed assegnata una qualunque successione (o insieme ordinato) di sostituzioni del gruppo, diremo che questa converge concretamente ad una sostituzione Σ, se, scelto l'elemento a, cui S_1, S_2, ... fanno corrispondere a_1, a_2, ..., hanno luogo le due proprietà:

I) qualunque successione $a_1\, a_2 \ldots$ tende sempre ad un unico elemento-limite α;

([1]) Così da $(a_1\, a_2\, a_3 \cdots \infty)$ avremo la $(\infty \cdots \alpha_2\, \alpha_1\, a_1\, a_2\, a_3 \cdots \infty)$.

II) qualunque sia $a \neq a'$, sarà anche $\alpha \neq \alpha'$.

La Σ sarà una sostituzione propria, se tutte le α appartengono all'insieme degli elementi; impropria, nel caso contrario.

Un gruppo si dirà *quasi-ordinato*, se, scelta una successione d'elementi tendente ad un elemento dell'insieme stesso, una qualunque sostituzione muta tale successione in una avente la stessa proprietà; si dirà *ordinato* se si ha anche che le successioni tendenti ad elementi che non appartengono all'insieme sono mutate in successioni analoghe.

Si ha: *Un gruppo quasi-ordinato può essere chiuso con delle sostituzioni proprie.*

Un gruppo ordinato può essere ampliato, aggiungendo, ai suoi elementi, tutti gli elementi limiti, ed alle sue sostituzioni tutte quelle improprie: esso resterà ordinato; il nuovo gruppo sarà « riducibile ».

Infine un gruppo ordinato $\mathfrak{G}$ si dirà connesso, se, date due sostituzioni

$$S \equiv \begin{pmatrix} \dots a\, b \dots \\ \dots \alpha \beta \dots \end{pmatrix} T \equiv \begin{pmatrix} \dots a\, b \dots \\ \dots \mathrm{A\,B} \dots \end{pmatrix},$$

e due numeri, ε piccolo a piacere, η grande a piacere, si possano determinare un numero finito di sostituzioni

$$S_r \equiv \begin{pmatrix} \dots a \quad b \dots \\ \dots \alpha_r \beta_r \dots \end{pmatrix},$$

in modo che, se lo scarto di a e b è minore di η, sieno minori di ε gli scarti di β, b; β_1, β; ...; β_n, β_{n+1}; B, β_n ed α, a; ...; A, α_n.

I gruppi del Lie sono regolari-continuum, ordinati, connessi, riducibili.

Matematica. — *Sulle varietà algebriche con sistemi regolari isolati di integrali riducibili.* Nota di Gaetano Scorza, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

Un sistema regolare di integrali [1] riducibili appartenente a una varietà algebrica si dice *isolato* (su di essa), allorchè ammette uno ed un solo sistema regolare complementare; o, ciò che fa lo stesso, quando è nullo il suo *coefficiente di immersione* [2].

Se un sistema regolare è isolato, tale è pure il suo complementare; quindi i sistemi regolari di una varietà algebrica, ove esistano, si distribuiscono in coppie di sistemi complementari.

[1] Secondo il solito, per brevità di discorso, diciamo « integrali » senz'altro, al posto di « integrali semplici di 1ª specie ».

[2] Cfr. Scorza, *Sugli integrali abeliani riducibili* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, ser. 5ª, vol. XXIV (2° sem. 1915), pp. 393-400].

Nell' ipotesi che una varietà algebrica contenga almeno una coppia di sistemi regolari complementari isolati, la totalità lineare di dimensione minima contenente i *sistemi nulli* della varietà ha una struttura particolarmente semplice, e ciò permette di descrivere con sufficiente chiarezza la distribuzione di tutti i sistemi regolari appartenenti alla varietà.

Precisamente si trova che:

Se una varietà algebrica possiede due sistemi regolari complementari isolati di integrali riducibili, ogni altro sistema regolare della varietà (eventualmente esistente) o appartiene ad uno dei due sistemi in discorso, o congiunge un sistema appartenente all'uno con un sistema appartenente all'altro.

Di qua si ricava agevolmente che una varietà algebrica non può possedere infiniti sistemi regolari isolati di integrali riducibili; anzi si dimostra che, *se p è l'irregolarità superficiale di una varietà algebrica, il numero dei suoi sistemi regolari isolati di integrali riducibili è necessariamente finito e del tipo $2^n - 2$, ove l'intero n non supera p, e sta ad indicare il numero dei sistemi regolari isolati che non provengono dal congiungere sistemi regolari isolati di dimensione inferiore.*

Questo teorema dà poi luogo a conseguenze semplici ed interessanti per le varietà algebriche contenenti soltanto un insieme finito di sistemi regolari di integrali riducibili.

1. In uno spazio lineare Σ a $2p-1$ dimensioni siano dati due spazî duali indipendenti A_1 e A'_1, dei quali A_1 abbia la dimensione $2q-1$ e A'_1 la dimensione $2q'-1 = 2(p-q)-1$, essendo $0 < q < p$ (e quindi $p > 1$ e $0 < q' < p$). Si abbiano poi, sempre in Σ, k_1+1 sistemi nulli, linearmente indipendenti, aventi per asse A_1, e k'_1+1 sistemi nulli, linearmente indipendenti, aventi per asse A'_1. Questi $k_1+k'_1+2$ sistemi nulli risultano, allora, tutti, linearmente indipendenti, e quindi determinano un sistema lineare $\infty^{k_1+k'_1+1}$.

Ebbene:

Un sistema nullo di questa totalità lineare $\infty^{k_1+k'_1+1}$, che risulti singolare, o ha per asse uno spazio appartenente a uno dei due spazî A_1 e A'_1, o ha per asse lo spazio congiungente due spazî appartenenti rispettivamente ad A_1 e A'_1.

Infatti stabiliamo in Σ un sistema di coordinate proiettive omogenee, prendendo i vertici $1, 2, \ldots, 2q$ della piramide fondamentale nello spazio A_1 e i vertici $2q+1, 2q+2, \ldots, 2p$ della piramide stessa nello spazio A'_1.

L'equazione di un sistema nullo qualunque della nostra totalità sarà rappresentato da un'equazione del tipo

$$(1) \qquad \sum_{r,s}^{1\ldots 2q} a_{r,s}\, x_r\, y_s + \sum_{r,s}^{1\ldots 2q'} a'_{r,s}\, x_{2q+r}\, y_{2q+s} = 0\,,$$

dove

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2q} a_{r,s}\, x_r\, y_s = 0 \tag{2}$$

e

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2q'} a'_{r,s}\, x_{2q+r}\, y_{2q+s} = 0 \tag{3}$$

saranno le equazioni di due sistemi nulli aventi uno spazio singolare in A'_1 e A_1, rispettivamente.

Detti D_1 e D'_1 i determinanti emisimmetrici $|a_{r,s}|$ e $|a'_{r,s}|$, il modulo D dell'equazione (1) è un determinante emisimmetrico, il cui valore è dato dal prodotto $D_1 D'_1$, e la cui caratteristica è eguale alla somma delle caratteristiche di D_1 e D'_1.

Siano $2(q-l)$ e $2(q'-m)$ le caratteristiche rispettive, necessariamente pari, dei determinanti D_1 e D'_1, e quindi $2(q+q'-l-m)=2(p-l-m)$ quella di D.

Allora la (2) è, *nello spazio* A_1, l'equazione di un sistema nullo dotato di un S_{2l-1}-asse, cioè, *nello spazio* Σ, l'equazione di un sistema nullo avente per asse uno spazio B'_1 a $2(q'+l)-1$ dimensioni proiettante da A'_1 un S_{2l-1} di A_1; e, allo stesso modo, la (3) è, in Σ, l'equazione di un sistema nullo avente per asse uno spazio B_1 a $2(q+m)-1$ dimensioni, proiettante da A_1 un S_{2m-1} di A'_1.

I due spazî B_1 e B'_1, *appartenenti*, com'è chiaro, a Σ, si tagliano in uno spazio della dimensione $2(l+m)-1$; e questa loro intersezione è lo spazio congiungente l'S_{2l-1}, secondo cui B'_1 taglia A_1, con l'S_{2m-1}, secondo cui B_1 taglia A'_1.

D'altro canto, ogni punto comune a B_1 e B'_1 è un punto singolare per il sistema nullo rappresentato dalla (1): dunque, una volta che questo ha per asse proprio un $S_{2(l+m)-1}$, l'asse in discorso coincide con l'intersezione degli spazî B_1 e B'_1.

Ma allora l'asserzione fatta è pienamente stabilita. Infatti il sistema nullo (1) non è singolare, se non a patto che sia diverso da zero almeno uno dei due numeri l ed m; se, di essi, uno solo è diverso da zero, l'asse del nostro sistema nullo è contenuto in A_1 o A'_1; se, invece, quei due numeri sono entrambi diversi da zero, l'asse del nostro sistema nullo congiunge uno spazio contenuto in A_1 con uno spazio contenuto in A'_1.

Naturalmente, poichè può essere $l=q$ od $m=q'$, senza che mai si abbia insieme $l=q$ ed $m=q'$, può darsi che l'asse in discorso coincida con A_1 o con A'_1, oppure che congiunga A_1 (o A'_1) con uno spazio contenuto (in senso stretto) in A'_1 (o A_1).

2. Sia ora V_p una varietà algebrica di irregolarità superficiale p, e siano A e A′ due suoi sistemi regolari complementari isolati di integrali

riducibili, delle dimensioni rispettive $q-1$ e $q'-1=p-q-1$, con $0<q<p$ (e quindi $p>1$ e $0<q'<p$).

Se diciamo k, $k^{(a)}$ e $k^{(a')}$ gl'indici di singolarità di V_p, A e A' rispettivamente, l'ipotesi che A e A' siano isolati si traduce nell'eguaglianza ([3])

$$k^{(a)}+k^{(a')}+1=k. \tag{4}$$

Ora si supponga di avere introdotto, per l'insieme degli integrali di V_p, la solita rappresentazione geometrica ([4]), per modo che sia lecito parlare di sistemi nulli di V_p e di asse di un sistema lineare di integrali di V_p; e si dicano A_1 e A'_1, rispettivamente, gli assi di A e A'.

Siccome gl'indici di singolarità di A e A' sono $k^{(a)}$ e $k^{(a')}$, fra i sistemi nulli di V_p ve ne sono $k^{(a')}+1$, linearmente indipendenti, che hanno per asse A_1, e $k^{(a)}+1$, linearmente indipendenti, che hanno per asse A'_1 ([5]); infine, l'insieme dei sistemi nulli di V_p, grazie alla (4), è fornito dal sistema lineare ∞^k determinato da questi $k^{(a)}+k^{(a')}+2$ sistemi nulli che risultano tutti linearmente indipendenti.

Ma, allora, basta ricordare che per ogni sistema regolare di integrali riducibili di V_p esiste almeno un sistema nullo di V_p, che ha per asse l'asse del sistema regolare, e tener presente l'osservazione del n. 1, per concludere che:

O la nostra varietà V_p non contiene altri sistemi regolari di integrali riducibili, all'infuori dei sistemi complementari e isolati A *e* A'; *o, se ne contiene altri, fra questi ve ne sono certamente di quelli che appartengono ad* A *o* A'. *In questa seconda alternativa i sistemi regolari di V_p son forniti tutti dai sistemi contenuti in* A *o* A', *e dai sistemi congiungenti quelli contenuti in* A *con quelli contenuti in* A'.

Beninteso, quando diciamo che un sistema regolare è contenuto, per es., in A, non escludiamo che esso possa coincidere con A; ma quando parliamo del sistema congiungente due sistemi contenuti in A e A', è da intendere che almeno una volta l'aggettivo « contenuto » sia adoperato in senso stretto, se si vuole che quel sistema non coincida col sistema di tutti gli integrali di V_p.

Osservazione I. Se la nostra varietà V_p contiene dei sistemi regolari indipendenti da A, è chiaro, per il teorema dimostrato, che ognuno di questi giace in A'; e quindi A è indipendente non solo da ciascun di essi, ma addirittura dal sistema che li congiunge.

([3]) Loc. cit. [2]), teor. II).

([4]) Scorza, *Sugli integrali abeliani riducibili,* Note I e II [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XXIV (1° sem. 1915), pp. 412-418 e pp. 645-654]: Nota I, nn. 1, 2, 6; Nota II, n. 9.

([5]) Loc. cit. [2]), teor. III).

Ma allora:

Se una varietà algebrica contiene dei sistemi regolari di integrali riducibili $B_1, B_2, \ldots, B_n$, *e poi un sistema regolare* A *indipendente da ciascuno di quelli, ma non dal sistema che li congiunge* (il sistema A non è certo isolato su di essa e quindi) *la varietà contiene infiniti sistemi regolari della stessa dimensione di* A.

Questa proposizione coincide, in sostanza, con quella che ottenne qualche tempo fa il Severi, come generalizzazione del classico teorema di Poincaré sulle varietà algebriche con integrali ellittici linearmente dipendenti ([6]), poichè la maggiore generalità del suo enunciato è soltanto apparente.

Osservazione II. Se il sistema A della solita varietà V_p contiene un sistema regolare C, ogni complementare di C *entro* A è congiunto ad A′ da un complementare di C su V_p; e viceversa si vede subito, per il teorema dimostrato più sopra, che ogni complementare di C su V_p contiene A′ e sega A in un sistema regolare che è complementare a C entro A; dunque:

Gli eventuali sistemi regolari isolati su V_p, *e contenuti in* A, *sono tutti e soli i sistemi regolari contenuti in* A *e ivi isolati.*

Più generalmente si riconosce che:

Gli eventuali sistemi regolari isolati su V_p, *e congiungenti un sistema contenuto in* A *con un sistema contenuto in* A′, *sono tutti e soli quelli che congiungono un sistema isolato in* A *con un sistema isolato in* A′ ([7]).

3. Dimostriamo, ora, che:

Se una varietà algebrica V_p, *di irregolarità superficiale* p *e indice di singolarità* k, *contiene dei sistemi regolari isolati di integrali riducibili, è sempre possibile determinare su* V_p n *sistemi regolari isolati indipendenti* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *tali che nessuno di essi contenga sistemi regolari isolati di dimensione inferiore alla propria, e tali che, detti* $q_j - 1$ *e* k_j *la dimensione e l'indice di singolarità di* A_j, *si abbia*

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_n = p,$$
$$k_1 + k_2 + \cdots + k_n + n - 1 = k.$$

E infatti, consideriamo tra i sistemi regolari isolati di V_p quelli di dimensione minima; sia A_1 uno di questi, con la dimensione $q_1 - 1$ e l'in-

([6]) Severi, *Sugli integrali abeliani riducibili,* Note I e II [Rendic. della R. Accad. dei Lincei, ser. 5ª, vol. XXIII (1° sem. 1914), pp. 581-587 e pp. 641-651]; Nota II, n. 4.

([7]) Queste osservazioni potrebbero essere facilmente estese dimostrando, ad es., che *il coefficiente d'immersione su* V_p *di un sistema regolare* C *congiungente un sistema regolare* C_1 *di* A, *con un sistema regolare* C_2 *di* A′ *è la somma dei coefficienti di immersione di* C_1 *su* A *e di* C_2 *su* A′.

dice di singolarità k_1, e sia A'_1 *il* suo complementare con la dimensione $q'_1 - 1$ e l'indice di singolarità k'_1. Sarà, evidentemente,

$$q_1 + q'_1 = p \quad \text{e} \quad k_1 + k'_1 + 1 = k.$$

Se A'_1 non contiene sistemi regolari isolati (su V_p, o, ciò che fa lo stesso, entro A'_1) di dimensione inferiore alla propria, il teorema è già dimostrato; se no, tra i sistemi regolari isolati contenuti in A'_1 si considereranno quelli di dimensione minima, e si dirà A_2 uno di questi, e A'_2 *il* suo complementare in A'_1.

Indicate con $q_2 - 1$ e $q'_2 - 1$ le dimensioni di A_2 e A'_2, e detti k_2 e k'_2 i loro indici di singolarità, sarà:

$$q_2 + q'_2 = q'_1 \quad \text{e} \quad k_2 + k'_2 + 1 = k'_1,$$

cioè

$$q_1 + q_2 + q'_2 = p \quad \text{e} \quad k_1 + k_2 + k'_2 + 2 = k.$$

Ora, o A'_2 non contiene sistemi regolari isolati (su V_p, o, ciò che fa lo stesso, entro A'_2) di dimensione inferiore alla propria e allora il teorema è dimostrato; o ciò non è, e allora si applicherà ad A'_2 il procedimento adoperato già per V_p e A'_1.

Siccome $p > q'_1 > q'_2 \ldots$, questo procedimento non può essere illimitatamente proseguito: quindi esso deve arrestarsi, il che val quanto dire che si perviene a dimostrare il nostro teorema in ogni caso.

4. La proposizione ora stabilita può essere ulteriormente precisata.

Facciamo vedere infatti che:

Se per la varietà V_p e i sistemi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ valgono le ipotesi e le proprietà del teorema del n. 3, i sistemi regolari isolati di V_p diversi da $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono tutti e soli i sistemi congiungenti $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a due a due, a tre a tre, ..., a $n-1$ a $n-1$.

E infatti, grazie all'indipendenza dei sistemi A_j e alla relazione

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_n = p,$$

il sistema A'_1 congiungente $A_2, A_3, \ldots, A_n$ è complementare ad A_1 su V_p; quindi A'_1 è, al pari di A_1, isolato su V_p.

Allo stesso modo, entro A'_1, il sistema A'_2 congiungente $A_3, \ldots, A_n$ è complementare ad A_2; ma allora A'_2 è isolato entro A'_1 al pari di A_2, cioè A'_2 è isolato su V_p.

Così continuando e poi scambiando l'ufficio dei sistemi A_j, si dimostra che ogni sistema congiungente $n-1$, $n-2$, ..., tre o due sistemi A_j, è isolato su V_p.

Viceversa, sia B un qualsiasi sistema regolare isolato appartente a V_p, e diverso da $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Siccome A_1 è isolato su V_p e non contiene sistemi regolari isolati di dimensione inferiore alla propria, il sistema B, essendo anch'esso isolato, o contiene A_1 o è indipendente da A_1 e giace in A'_1 (n. 2). Nella prima alternativa, B (che è diverso da A_1) congiunge A_1 con un sistema regolare B_1 situato in A'_1 e isolato tanto su V_p quanto su A'_1; quindi, tanto nella prima alternativa, quanto nella seconda, sarà dimostrato che B è il sistema congiungente un certo numero di sistemi A_j, se facciamo vedere che *entro* A'_1 ogni sistema regolare isolato diverso da $A_2, \dots, A_n$ congiunge un certo numero di questi sistemi.

Ora, entro A'_1 i sistemi $A_2, A_3, \dots, A_n$ godono delle stesse proprietà di cui godono $A_1, A_2, \dots, A_n$ su V_p; quindi, ripetendo il ragionamento fatto un sufficiente numero di volte, si vede che tutto si riduce a dimostrare che entro il sistema A'_{n-2}, congiungente A_{n-1} e A_n, non esistono sistemi regolari isolati diversi (da A'_{n-2} e) da A_{n-1} e A_n.

Ora ciò è evidente, perchè A_{n-1} e A_n sono complementari isolati entro A'_{n-2}, e nessuno di essi contiene sistemi regolari isolati di dimensione inferiore alla propria; dunque l'asserto è dimostrato.

Di qua segue:

1°) *che i sistemi* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *possono essere scelti su* V_p *in un sol modo, se hanno da soddisfare alle condizioni del teorema del n.* 3;

2°) *che il numero totale dei sistemi regolari isolati di* V_p *è dato da*

$$n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1} = 2^n - 2\,,$$

dove, grazie al fatto che ciascuno dei numeri q_j *è almeno uguale ad* 1, n *è un numero non superiore a* p.

Ma allora possiamo enunciare il seguente teorema:

Una varietà algebrica V_p *di irregolarità superficiale* p (>1), *e indice di singolarità* k, *o non contiene sistemi regolari isolati di integrali riducibili o ne contiene un numero finito. In questa seconda alternativa, il loro numero totale è della forma* $2^n - 2$ *con* $1 < n \leq p$, *e i sistemi stessi son forniti*:

a) *da certi* n *sistemi regolari indipendenti* $A_1, A_2, \dots, A_n$, *con le dimensioni* $q_j - 1$, *e gli indici di singolarità* k_j $(j = 1, 2, \dots, n)$ *legati dalle relazioni*

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_n = p$$

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_n + n - 1 = k\,;$$

b) *e poi dai sistemi regolari* (*tutti distinti*) *che congiungono quei sistemi* A_j *a due a due, a tre a tre* , ... , *a* $n-1$ *a* $n-1$;

quindi ognuno dei sistemi A_j *non contiene sistemi regolari isolati di dimensione inferiore alla propria.*

In esso è contenuta come caso particolare la seguente proposizione:

Se una varietà algebrica V_p, *di irregolarità superficiale* p (>1) *e indice di singolarità* k, *contiene soltanto un numero finito di sistemi regolari di integrali riducibili, il loro numero totale è della forma* 2^n-2 *con* $n \leq p$, *e i sistemi stessi, nell'ipotesi che sia* $n>1$, *cioè che quel numero non sia nullo, sono dati:*

a) da certi n *sistemi regolari indipendenti* $A_1, A_2, \dots, A_n$, *con le dimensioni* q_j-1 *e gl'indici di singolarità* k_j $(j=1, 2, \dots, n)$ *legati dalle relazioni*

$$q_1+q_2+\cdots+q_n=p$$
$$k_1+k_2+\cdots+k_n+n-1=k;$$

b) e poi dai sistemi regolari (tutti distinti) che congiungono quei sistemi A_j *a due a due, a tre a tre, ..., a* $n-1$ *a* $n-1$;

quindi ognuno dei sistemi A_j *non contiene sistemi regolari di integrali riducibili di dimensione inferiore alla propria.*

In una Nota successiva faremo vedere come questo teorema rientri in uno più generale, che dà un criterio per distinguere le varietà con infiniti sistemi regolari di integrali riducibili da quelle che ne contengono soltanto un numero finito.

Qui ci contenteremo di fissare soltanto le seguenti osservazioni.

Il massimo valore del numero n che appare nei due ultimi teoremi è p, ed è $n=p$ quando e solo quando i sistemi $A_1, A_2, \dots, A_n$ si riducono a p integrali ellittici. Questo caso, come si dimostra subito valendosi di un teorema del De Franchis (8), può realmente verificarsi; e allora il numero totale dei sistemi regolari esistenti è 2^p-2; dunque:

Una varietà algebrica di irregolarità superficiale p, *che contenga soltanto un numero finito di sistemi regolari di integrali riducibili, non ne può contenere, al più, che* 2^p-2, *questo numero potendo essere effettivamente raggiunto.*

Siccome, nell'ultimo teorema dimostrato, il sistema A_j ha la dimensione q_j-1 e non contiene sistemi regolari di dimensione inferiore alla propria, deve essere $k_j \leq 2q_j-2$ (9); quindi si ha:

$$k \leq 2(q_1+q_2+\cdots+q_n)-2n+n-1,$$

cioè

$$k \leq 2p-n-1.$$

(8) De Franchis, *Le varietà algebriche con infiniti integrali ellittici* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXXVIII (2° sem. 1914), pag. 192].

(9) Scorza, *Le varietà algebriche con indice di singolarità massimo*, Note I e II [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, ser. 5a, vol. XXIV (2° sem. 1915), pp. 279-284 e pp. 333-338]: Nota II, n. 6.

Ma, evidentemente, $n \geq 2$: dunque, infine,

$$k \leq 2p - 3.$$

Di qua segue che:

Se una varietà algebrica di irregolarità superficiale p non contiene che un numero finito di sistemi regolari di integrali riducibili, il suo indice di singolarità non può superare $2p - 3$;

e inoltre che:

Se una varietà algebrica di irregolarità superficiale p ha l'indice di singolarità $2p - 2$ *e contiene qualche sistema regolare di integrali riducibili, ne contiene senz'altro infiniti* ([10]).

Queste ultime due proposizioni dànno, per $p = 2$, dei teoremi ben noti, dovuti al sig. Humbert.

Meccanica. — *Profili di pelo libero in canali di profondità finita.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sul funzionamento del rocchetto di Ruhmkorff con gli interruttori elettrolitici* ([1]). Nota di O. M. Corbino e G. C. Trabacchi, presentata dal Socio P. Blaserna.

In una precedente Nota ([2]) sono stati esposti i risultati di uno studio sul funzionamento, con corrente alternata, di un interruttore elettrolitico costituito da una punta di ferro, di nickel o di platino, e una lamina di alluminio in una soluzione di sale di Seignette; è stato posto in rilievo che con tale interruttore inserito nel primario di un rocchetto, destinato ad alimentare un tubo generatore di raggi X, il funzionamento di questo era molto regolare e che le correnti inverse nocive erano evitabili con facilità di gran lunga superiore che non nel caso della corrente continua impiegata con l'ordinario interruttore di Wehnelt.

Che con la corrente alternata si ottengano i migliori risultati ricorrendo all'interruttore modificato, è cosa evidente: potrebbe però nascere il dubbio

([10]) Si ricordi che per il teorema, cui si riferisce la cit. [9], ove l'indice di singolarità fosse $\geq 2p - 1$, la varietà ammetterebbe senz'altro infiniti sistemi regolari di integrali riducibili.

([1]) Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Roma.

([2]) G. C. Trabacchi, *Interruttore elettrolitico per la corrente alternata*, Rend. R. Accad. Lincei, 1915, 2° sem., pag. 126.

che, quando è arbitraria la scelta del tipo di corrente (alternata o continua) e l'uso dell'interruttore elettrolitico s'impone per ragioni di semplicità, non sia abbastanza giustificata la scelta della corrente alternata.

Avendo istituito nuove ricerche, che hanno pienamente confermato i primitivi risultati, e ne facilitano la interpretazione, crediamo utile di riferirne in questa Nota.

Per le ricerche ci siamo serviti di un buon rocchetto intensivo da 30 cm. di scintilla, che corrisponde al modello più generalmente usato negli impianti radiologici di media potenza. Gli elementi da studiare sono: la corrente primaria, la corrente secondaria che attraversa il tubo, la forza elettromotrice agente nel secondario; occorre seguire questi elementi nelle loro rapidissime variazioni col tempo, poichè ben poco insegnerebbe, ai fini della nostra ricerca, l'osservazione dei valori medî o efficaci forniti dai comuni strumenti di misura.

Si prestava invece assai bene lo studio col tubo di Braun della deviazione del fascio catodico prodotta dall'elemento elettrico da misurare, specialmente utilizzando l'artificio già adoperato da molto tempo da uno di noi (¹), di combinare cioè ortogonalmente gli spostamenti dovuti a due elementi elettrici che nello stesso tempo variano con lo stesso ritmo; con che si ottengono, sul disco fluorescente, dei diagrammi stabili di cui è agevole la interpretazione.

Per la osservazione della corrente primaria bastava un rocchetto di poche spire traversato dalla corrente medesima e agente sul tubo.

Per lo studio della corrente secondaria, ci siamo serviti di un rocchettino a molte spire di filo fine e isolato, senza ferro, inserito fra un polo del rocchetto, messo a terra, e un elettrodo del tubo. Infine per la f. e. m. attiva nel secondario ci siamo serviti di uno dei frazionamenti del circuito primario che forma uno strato isolato ricoprente l'intero nucleo. Rilegando ai poli di questo avvolgimento una molto elevata resistenza non induttiva e una piccola bobina agente sul tubo Braun, la corrente ottenuta può ritenersi proporzionale alla f. e. m. agente, la quale, a sua volta, è proporzionale alla derivata dell'induzione magnetica nel nucleo, e quindi alla f. e. m. attiva nel secondario a circuito aperto.

Non è però da confondere questa f. e. m. con la tensione reale esistente ai poli del tubo, la quale ne differisce per la perdita di tensione ohmica lungo il secondario e per la differenza di potenziale elettrostatica o di capacità dovuta alle spire del secondario stesso, che fra loro e rispetto al primario agiscono come un condensatore a capacità distribuita. La perdita di tensione ohmica può essere trascurata, poichè non raggiunge, con la massima corrente

(¹) O. M. Corbino, *Ricerche teoriche e sperimentali sul rocchetto Ruhmkorff*. Ass. elettr. ital., Atti, 1907.

avuta nel tubo, se non una piccolissima frazione della totale tensione attiva. Più difficile a determinare è l'effetto dovuto alla funzione di condensatore; ma, come sarà visto più in là, è possibile di discutere il problema che ci occupa tenendone il debito conto.

I tre rocchetti rivelatori della corrente primaria, della corrente secondaria e della f. e. m. attiva nel secondario agivano sul tubo Braun o separatamente, per le osservazioni allo specchio girante, o combinandoli due per volta ortogonalmente per lo studio dei diagrammi stabili. Il tubo Braun era di grande modello, e lo si alimentava con una macchina elettrostatica a molti dischi.

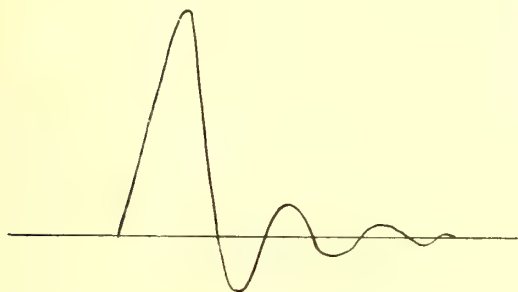
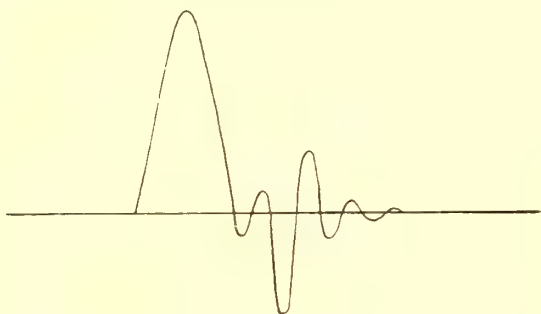



Fig. 1. Fig. 2.

Dovendosi procedere al confronto tra il funzionamento del rocchetto con corrente continua e col Wehnelt ordinario, ovvero con corrente alternata e con l'interruttore modificato, si cercò anzitutto di realizzare le migliori condizioni possibili per entrambi i casi, modificando opportunamente la f. e. m. agente nel primario e il numero di spire di questo; il che era reso possibile dal fatto che il rocchetto usato, come tutti i rocchetti moderni, ha l'avvolgimento di filo grosso diviso in alquante sezioni.

La corrente secondaria attraversante il tubo è rappresentata, come si osserva allo specchio girante, dalle figg. 1 e 2.

Quest'ultima si riferisce all'uso di una f. e. m. primaria costante e dell'interruttore Wehnelt; la prima fu invece ottenuta con una f. e. m. primaria alternativa di 45 periodi e con l'interruttore modificato. Si osserva subito, dalle figure, che la prima scarica di senso utile è seguìta da oscillazioni che, nel caso della fig. 1, hanno l'aspetto consueto delle scariche oscillatorie. Lo smorzamento è piuttosto forte passando dalla prima alla seconda; ma si attenua nelle oscillazioni successive. Si tratta evidentemente di un vero processo di scarica oscillatoria proveniente dalla capacità propria del secondario che viene caricata dalla f. e. m. di rottura. Il primo semiperiodo è notevolmente più lungo dei successivi; ciò è dovuto al fatto che la prima

mezza oscillazione si svolge mentre il circuito primario è aperto, per la presenza della guaina gassosa intorno alla punta immersa; le altre si svolgono, come si vedrà in seguito, quando il contatto fra punta e liquido è ristabilito, e, per ciò, anche il primario partecipa al processo oscillatorio del secondario, reagendo su questo col diminuirne il periodo proprio. Modificando la resistenza del circuito primario e la lunghezza della punta (con che si possono avere correnti secondarie medie, misurate con il milliamperometro, d'intensità più o meno grande) si osserva che si modificano insieme l'ampiezza della prima oscillazione e la sua durata, di modo che le semionde ottenute coi varî regimi sono all'incirca *simili* fra loro.

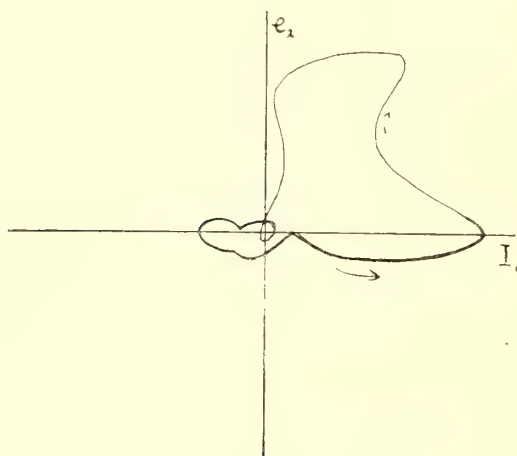
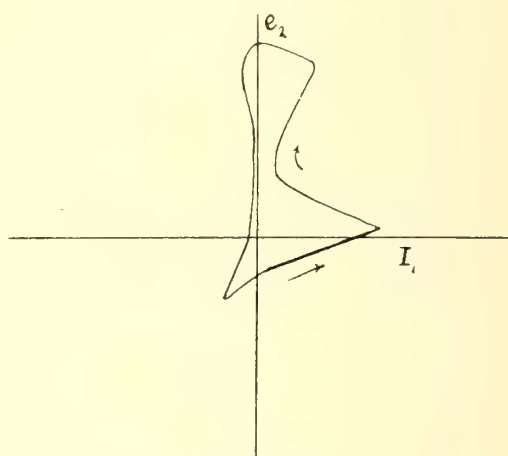



Fig. 3. Fig. 4.

Ne risulta che se l'intensità media secondaria passa per esempio da 1 a 3 milliampères, la corrente massima aumenta da 1 a $\sqrt{3}$, e pure da 1 a $\sqrt{3}$ aumenta la sua durata.

Dalla osservazione della fig. 1 si riconosce, inoltre, che la presenza di correnti inverse nel tubo è esclusivamente connessa col processo oscillatorio dovuto alla capacità propria del secondario, e perciò è inevitabile con qualunque mezzo d'interruzione della corrente primaria.

Queste inversioni, inevitabili anche con qualunque valvola, non sembra che abbiano azione nociva sul tubo. Manca però ogni traccia della corrente inversa dovuta alla chiusura che sussegue all'interruzione. Questa corrente di chiusura, che si sovrappone al processo oscillatorio, è invece ben evidente nella figura 2, ottenuta ricorrendo alla corrente continua ed all'interruttore Wehnelt ordinario. Essa traversa il tubo mentre ancora è adescato dal processo oscillatorio dovuto alla rottura, e perciò può essere attenuata solo con l'impiego di valvole. Questa forma della corrente secondaria conferma quel che uno di noi aveva già enunciato, fondandosi sulla semplice

osservazione dell'aspetto del tubo, la quale aveva già rivelato la mancanza delle correnti inverse, ricorrendo alle correnti alternate.

La interpretazione del meccanismo con cui ha luogo la constatata assenza delle correnti inverse di chiusura nella fig. 1 viene resa agevole dallo studio degli altri elementi elettrici che caratterizzano il funzionamento del rocchetto nei due casi.

Le figg. 3 e 4 rappresentano i diagrammi osservati combinando ortogonalmente la corrente primaria (orizzontale) e la f. e. m. nel secondario, quando questo è aperto.

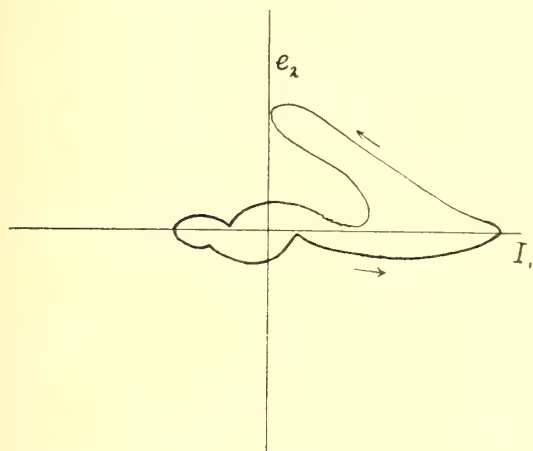
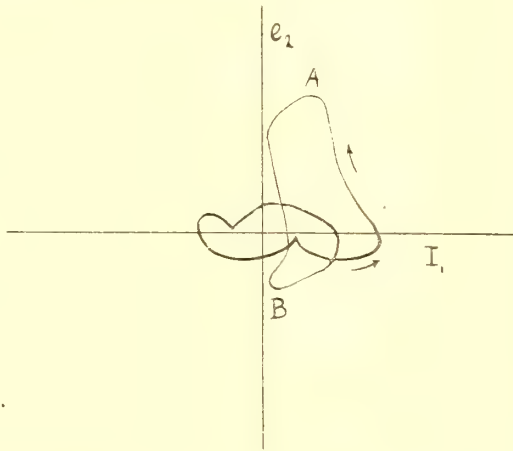



Fig. 3^{bis}. Fig. 4^{bis}.

La prima fu ottenuta con corrente alternata; la seconda, con corrente continua. Esaminiamo dettagliatamente la prima. Quando la corrente primaria nella sua onda — che chiameremo positiva, e che può passare liberamente per l'elettrodo di alluminio — ha di poco superato l'intensità massima, prende origine la f. e. m. secondaria; e la corrente di capacità che percorre il secondario (e che, come abbiamo visto, è di tipo oscillatorio) reagisce sul primario, trasferendovi l'oscillazione. La corrente primaria poscia ricomincia nella sua onda negativa (ridotta dall'alluminio), mentre la f. e. m. secondaria è molto piccola e *dello senso senso di quella utile di apertura.*

La f. e. m. secondaria assume un senso opposto, pur restando piccolissima, solo quando la di_1/dt è positiva (ramo inferiore del diagramma 3). Questa ultima fase è inattiva, o quasi, nel tubo. Se invece si osserva la fig. 4 ottenuta con la corrente continua ed il Wehnelt ordinario, si riconosce che la f. e. m. secondaria di senso utile si manifesta, com'è naturale, durante la rottura della corrente primaria, ed è anche essa accompagnata da una oscillazione; ma la f. e. m. utile è subito seguita (per la chiusura della primaria, che avviene immediatamente dopo) da uno sbalzo notevole di f. e. m. di senso opposto, che come vedremo, determina nel tubo il passaggio della corrente nociva. Le figg. 3^{bis} e 4^{bis} sono corrispondenti alle 3 e 4, ma ottenute con il circuito secondario chiuso sul tubo.

Il processo che si svolge nei due casi pare adunque il seguente: Avvenuta la interruzione brusca della corrente primaria (nel caso della corrente alternata), il tubo è traversato da una scarica di tipo oscillatorio, che abbiamo osservato nella fig. 1. È però da notare che, appena iniziata la oscillazione, lo smorzamento delle successive alla prima risulta abbastanza piccolo, ciò che prova che il tubo, in queste condizioni di avvenuto adescamento, offre una resistenza ben piccola; tali condizioni, che rendono facile di far passare nel tubo correnti nei due sensi, perdurano alquanto, e precisamente per un tempo che appare non inferiore a 1/20 del periodo, e quindi non inferiore a 1/1000 di minuto secondo. Solo quando le oscillazioni sono cessate, il tubo riprende la sua normale resistenza alla scarica, cioè l'attitudine a non consentire il passaggio della corrente se non è attiva una elevatissima differenza di potenziale agli elettrodi.

Ora, come abbiamo veduto, nel caso delle correnti continue e dell'interruttore Wehnelt ordinario, la f. e. m. inversa di chiusura segue subito dopo la rottura, e trova perciò il tubo nelle condizioni di adescamento, cioè mentre è ancora percorso dalle oscillazioni provocate dalla interruzione. La f. e. m. di chiusura è massima proprio all'istante della chiusura; e pur trattandosi di una f. e. m. non elevata, poichè è uguale, al massimo, a quella della batteria moltiplicata per il coefficiente di trasformazione (circa 100), essa riesce ad aprirsi la via nel tubo, ancora adescato dalla corrente oscillatoria che lo sta attraversando. Invece, con la corrente alternata l'onda di f. e. m. inversa è di minore intensità, ed inoltre essa comincia a esercitarsi solo dopo una buona frazione del periodo, quando cioè il tubo più non è traversato da alcuna corrente e ha ripreso la sua resistenza normale alla scarica.

Manca così la possibilità che l'onda inversa nociva trovi facile il passaggio.

Secondo questa interpretazione, l'annullarsi dell'onda inversa con le correnti alternate sarebbe dunque dovuto alle circostanze seguenti, bene illustrate dai diagrammi della fig. 5 che rappresentano le combinazioni della f. e. m. stradale e_0 con la corrente primaria i_1 e con la secondaria i_2.

La rottura della corrente primaria può prodursi, regolando convenientemente la lunghezza della punta, in tale fase della sinusoide che all'istante della susseguente chiusura del primario la f. e. m. agente in esso sia molto prossima a zero; ciò è reso facile dal fatto che la corrente è in ritardo sulla f. e. m., e che la rottura ha luogo poco dopo il massimo positivo della corrente. In tali condizioni, alla nuova chiusura il primario interviene solo partecipando alle oscillazioni del secondario, sul quale reagirà; ma solo dopo circa un altro mezzo periodo avrà origine la f. e. m. induttiva che tenderebbe a far passare l'onda inversa nel tubo, già diseccitato, e capace perciò di arrestarla, senza bisogno di valvole.

Come fu detto nella Nota precedente, diminuendo la lunghezza della punta si può accelerare la fase della interruzione. Con ciò la f. e. m., alla nuova chiusura, può avere un senso ed un valore nocivi; si riconosce facilmente nella fig. 6 quel che avviene in queste sfavorevoli condizioni che furono realizzate accorciando da 15 mm. a soli 5 mm. la punta di ferro dell'interruttore. Effettivamente alla f. e. m. indotta A, di senso utile, segue immediatamente, in B, un'onda inversa capace di attraversare il tubo; questo la

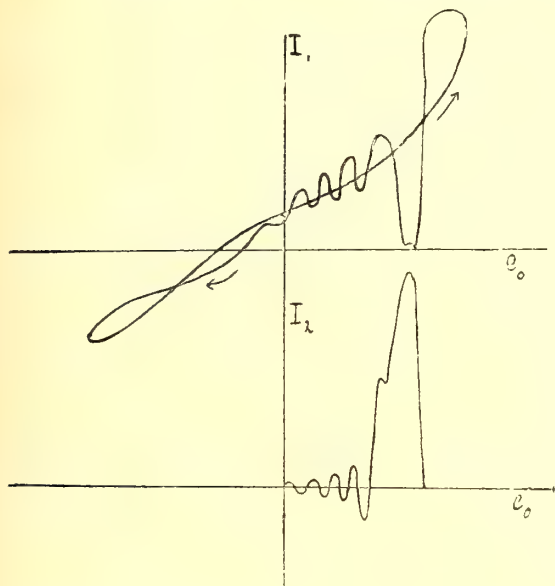
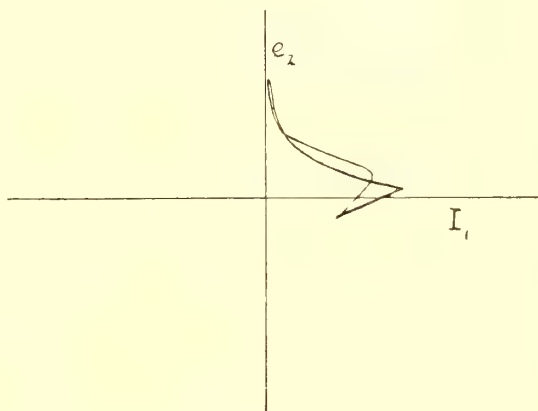



Fig. 5. Fig. 6.

rivela immediatamente con quelle macchie caratteristiche che sono così ben note a coloro che han pratica di radiologia.

La manovra di allungare la punta quanto più è possibile, limitatamente solo al funzionamento regolare dell'interruttore, e che si manifesta così efficace per eliminare il passaggio delle onde inverse, ha quindi la funzione di spostare la fase dell'interruzione fino a che la nuova chiusura si compia quando la f. e. m. primaria ha assunto il valore opportuno. E se la autoin duzione è convenientemente scelta, questo istante può rendersi molto prossimo alla fase in cui la corrente è massima.

Resta solo da esaminare un punto, per la corretta interpretazione dei diagrammi. Le ordinate delle figg. 3-4-6 rappresentano, come si è detto, non la tensione agli estremi del secondario, ma la f. e. m. induttiva agente in esso; e la differenza fra le due costituisce l'effetto della capacità distribuita del secondario essendo trascurabile la caduta di tensione ohmica. Si può

portare in causa quest'azione osservando che, all'atto del destarsi della f. e. m. indotta per la rottura, la tensione utile al secondario andrà crescendo più lentamente, potendo l'effetto della capacità del secondario paragonarsi, in certa guisa, a quello di un condensatore derivato tra gli estremi. La elettricità accumulata si scaricherà nel tubo, quando è raggiunta una tensione sufficiente, dando origine alle oscillazioni. Ma è evidente che, se la f. e. m., che fa da generatore unico nel secondario, resta positiva in tutta la metà superiore del periodo, la presenza della capacità, che può solo ritardarne l'effetto, non può dare origine ad altre correnti inverse se non a quelle delle oscillazioni; mancherà in ogni caso la vera f. e. m. inversa di chiusura, che si rivela nel caso dell'interruttore di Wehnelt e delle correnti continue, sovrapponendosi nei suoi effetti alle oscillazioni, e prolungandole. Dalla forma della corrente primaria in questo caso si riconosce subito (fig. 7) la presenza di oscillazioni, provenienti dal secondario, durante la salita della corrente che segue alla chiusura.

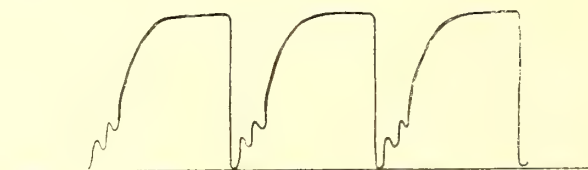



Fig. 7.

Da tutto ciò risulta evidente la convenienza di ricorrere, per gli impianti di non grande potenza, alla corrente alternata ed all'interruttore elettrolitico sincrono. Oltre alle circostanze pratiche che ne rendono minimo il costo, facile il maneggio e regolarissimo il funzionamento, questo sistema offre il vantaggio di escludere completamente la f. e. m. inversa, così come solo sarebbe capace di fare un interruttore meccanico sincrono, che, dopo l'interruzione in un punto dell'onda, vicino al valore massimo, ristabilisse la chiusura quando la f. e. m. primaria è prossima a zero; e riuscisse inoltre a rendere inattiva la semionda seguente, di corrente negativa. Il ritmo delle interruzioni, perfettamente costante anche se si modifica entro larghi limiti la lunghezza della punta, è determinato dal periodo della corrente alternata, e perciò non può essere molto elevato, ricorrendo alle reti di distribuzione ordinarie. Ciò non impedisce che anche con un rocchetto di modeste dimensioni si possano far passare in un tubo di durezza normale correnti medie di due o tre milliampére, largamente sufficienti per la radioscopia, e in tubi di grande durezza le intensità impiegate nella radioterapia.

Fisica. — *Velocità di diffusione e idratazione in soluzione.* Nota di M. Padoa e Fernanda Corsini, presentata dal Socio G. Ciamician.

Le classiche esperienze di J. Perrin hanno messo in evidenza la stretta relazione che passa fra la grandezza dei granuli sospesi, in una soluzione colloidale, e la stratificazione che essi assumono per azione della gravità. Se fosse possibile di conservare in perfetto equilibrio di temperatura una lunga colonna verticale di una soluzione salina, si dovrebbe notare, per azione della gravità, una rarefazione del sale, procedendo dal basso all'alto, secondo le medesime leggi che permettono di calcolare il decremento della densità dell'aria coll'aumentare dell'altezza e la stratificazione delle soluzioni colloidali: tutto questo dipende dall'attendibilità dell'ipotesi molecolare, ormai diventata teoria.

I processi studiati dal Perrin sono strettamente connessi coi fenomeni della diffusione; più piccola è la massa molecolare, e più grande sarà la sua velocità di diffusione. Tutto ciò è espresso in una nota formula di Einstein [1]:

$$D = \frac{1}{6\pi\xi r} \frac{RT}{N},$$

in cui D è il coefficiente di diffusione, N il numero di Avogadro, T la temperatura assoluta, R la costante dei gas, ξ l'attrito interno del solvente e r il raggio molecolare. Herzog [2] ha poi dato una relazione che lega direttamente la grandezza molecolare con la velocità di diffusione: se v è il volume specifico del corpo, il suo volume molecolare è dato dalla

$$Mv = N\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Dalle due uguaglianze precedenti segue la

$$M = \frac{R^3T^3}{162 . \pi^2 N^2 \xi^3} \frac{1}{D^3 v}.$$

Introducendo in questa formula il valore di R in gr. cm., cioè $8,3155.10^7$, il valore di N, che sarebbe, secondo i dati di Perrin, $70,5.10^{22}$, e per D, ξ, v, i rispettivi valori a 20°, Herzog ha calcolato i pesi molecolari di

[1] Annalen der Physik, *19* (1906), 303.
[2] Zeitschrift für Elektrochemie, XVI, 1003.

alcuni zuccheri, che risultarono vicini ai valori teorici, e quello dell'albumina, che sarebbe 70.000.

Noi abbiamo avuto l'idea di utilizzare questo metodo per avere una misura dell'idratazione in soluzione: quando una molecola sciolta si idrata, deve formarsi un complesso tanto maggiore quanto più grande è il numero delle molecole di solvente che si combinano; tale complesso avrà, a parità di temperatura, una velocità media inferiore a quella delle molecole semplici, e quindi ancora una minore velocità di diffusione. Ne viene di conseguenza che si dovranno avere, con questo metodo, dei pesi molecolari superiori ai teorici, per quei corpi che si combinano col solvente, o che, comunque, ne trascinano seco una certa quantità nel diffondere.

Che il nostro modo di vedere avesse un certo fondamento di verità, lo si poteva già arguire dal fatto che, assumendo per N il valore, oggigiorno assai più attendibile, di 60.10^{22} [1], i pesi molecolari di Herzog diventano più elevati dei teorici. Si rendevano però necessarie ulteriori esperienze di diffusione, massime con sostanze che, per molte ragioni ed esperienze precedenti, si debbano ritenere idratabili in soluzione: la scelta di queste sostanze venne, per ora, limitata ai non elettroliti, perchè la diffusione dei corpi dissociati è un fenomeno più complicato e non sembra facile di ricavarne dei dati quantitativi sull'idratazione [2].

I dispositivi adottati dai varî autori che hanno misurato delle velocità di diffusione [3] hanno lo scopo:

1°) di conoscere esattamente la superficie, attraverso la quale il corpo diffonde, e così pure l'altezza degli strati;

2°) di preservare il liquido che diffonde dagli sbalzi di temperatura, che potrebbero metterlo in movimento;

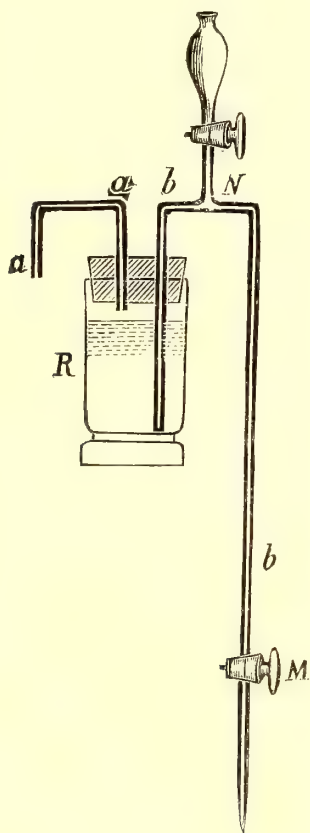
3°) di prelevare, dopo un tempo determinato, un certo numero di frazioni del liquido (rappresentanti i varî strati), senza agitare menomamente il liquido stesso;

(1) Vedi ad es. Svedberg, *Die Existenz der Moleküle* (1912).

(2) Secondo Nernst [vedi ad es. *Theoretische Chemie*, VII ediz. (1913), 400] la velocità di diffusione degli elettroliti è una funzione della mobilità u e v degli ioni, $\frac{1}{D}=\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)\frac{1}{2RT}$; questa espressione si verifica bene, come rilevasi dalle misure di Oeholm (Zeitschrift für physikal. Chemie, *1904*, L, 309) e di Scheffer (ibidem, *1888*, II, 390) per corpi poco idratabili. Per sostanze avide d'acqua, come acido cloridrico, idrato sodico e potassico, la velocità di diffusione risulta inferiore a quella prevista, ciò che starebbe a confermare le nostre vedute.

(3) Vedi ad es.: Graham, Annales de Chimie et de Physique, 3me série, vol. *65*, pag. 129; id., Annalen der Chemie und Pharm., *77*, pp. 56, 129; *80*, pag. 197; *121*, pag. 1; Voigtländer, Zeitschrift für Physikal. Chemie, III, 316; Arrhenius, ibidem, X, 338; Scheffer, ibid., XI, 390; Oeholm, ibid., XL, 309, e LXX, 407.

4°) di rendere il più possibile piano il fondo del recipiente in cui ha luogo la diffusione, allo scopo di conoscere esattamente volume ed altezza anche dello strato più basso.

Noi abbiamo costruito un apparecchio un poco diverso da quelli che sono stati usati in precedenza, rappresentato schematicamente dalla figura qui a lato: R è il recipiente in cui avviene la diffusione, costituito da un blocco di una lega di piombo, antimonio e zinco, in cui, con un tornio di

precisione, venne praticata una cavità a parete cilindrica ed a fondo perfettamente piano, del raggio di mm. 17,42; versando in questo recipiente 10 cm^3 di un liquido, questo occuperà un'altezza di mm. 5,24. Il recipiente è chiuso da un tappo, di gomma per le soluzioni acquose, di ottimo sughero per quelle benzoliche, attraversato da un capillare *aa*, ripiegato ad U e da un secondo capillare *bb* con rami assai disuguali, recante all'estremità più lunga un robinetto M coll'estremità affilata; nel punto N è inserito un altro capillare terminato con un piccolo imbuto a robinetto. L'altro ramo del tubo *bb* è assicurato al tappo del recipiente R, e la sua estremità aperta ne rasenta il fondo.

L'apparecchio funziona nel modo seguente: si fa entrare dell'acqua per l'imbuto e si aspira leggermente per M, in modo da riempire il tratto di tubo MN; poi si chiude il robinetto M e si fanno arrivare nel recipiente R 40 cm^3 d'acqua; indi si chiude l'imbuto a robinetto e vi si versano 10 cm^3 della soluzione che si vuol far diffondere: anche questa vien fatta discendere nel recipiente, senza scosse, e così la diffusione comincia. Trascorso il tempo che si crede opportuno, si prelevano gli strati aprendo il robinetto M: il liquido scende spontaneamente poichè il capillare *bb* funziona da sifone e sottrae il liquido senza produrre la minima agitazione [1].

Questo apparecchio venne fissato solidamente ad un sostegno e posto sopra una mensola a muro, in una stanzetta appartata; la costanza della temperatura veniva assicurata con un termoregolatore.

Se si indica con 10.000 la quantità di sostanza presente in tutta la colonna liquida, la distribuzione di essa a diffusione avvenuta può essere rappresentata da una serie, ad esempio di 10 numeri se 10 sono gli strati, proporzionali ciascuno al contenuto di uno strato, e di cui la somma è appunto 10.000.

Stefan [2] ha dimostrato che, facendo avvenire la diffusione nelle condizioni suesposte, il rapporto $\frac{h}{2\sqrt{kt}}$ ha un valore determinato per ogni sostanza, una volta fissato il tempo di diffusione. In questa espressione, h è l'altezza di uno strato, t il tempo, k la costante di diffusione, che rappresenta la quantità di sostanza che passa nell'unità di tempo (espresso in giorni) attraverso l'unità di superficie. Per ogni valore numerico dell'espressione precedente, si ha una stratificazione caratteristica. L'autore citato ha calcolato e disposto in apposite tabelle le serie corrispondenti ai valori possibili dell'espressione $\frac{h}{2\sqrt{tk}}$, cosicchè il calcolo dei coefficienti di diffusione risulta singolarmente abbreviato.

Nelle tabelle seguenti abbiamo riunito i dati inerenti alle nostre esperienze, riserbandoci di dare altrove maggiori particolari, specialmente per ciò che riguarda i metodi analitici, che non sono sempre agevoli.

Sostanza	Conc. della soluz. %	Temper.	Metodo di dosamento	Tempo in giorni
Alcool metilico .	100	24°	densità	1.92
» etilico . .	100	20	»	3.00
Glicerina	50	24	»	1.68
Fenolo	6	22	titolazione con Br	2.70
Saccarosio . . .	10	22	potere rotatorio	1.51
Acetamide . . .	12	24	saponificaz. e titolaz. di NH_3	2.00
Esametilentetramina	8	21	titolaz. con rosso di metile	1.87

[1] Se la discesa è lenta, si può accelerarla esercitando una leggera pressione con un semplice dispositivo, che non descriviamo per brevità, a mezzo del tubo *aa*.
[2] Sitzungsberichte Akademie der Wissenschaften (1879) *79*, 184.

In queste condizioni osservammo le seguenti stratificazioni:

Num.	Alcool metilico	Alcool etilico	Glicerina	Fenolo	Saccarosio	Acetamide	Esametilentetramina
1	2233	2446	2681	2209	3026	2202	2658
2	2057	2309	2305	2090	2731	1936	2227
3	1778	1694	1787	1876	1981	1577	1745
4	1319	1210	1291	1344	1139	1392	1315
5	892	850	809	1042	561	1080	957
6	653	588	658	738	296	755	577
7	432	412	234	465	141	482	282
8	289	229	128	177	78	292	134
9	250	157	71	59	40	166	67
10	142	105	36	0	0	118	40
$\frac{h}{2\sqrt{kt}}=$	0.22	0.24	0.26	0.22	0.32	0.22	0.26

Da questi dati si calcolano i valori di k [1], e da questi, con gli altri [2] raccolti nella seguente tabella, si hanno i pesi molecolari:

Sostanza	k	v	ξ	Peso mol. calcolato	P. mol. trovato	Idrataz. (mol. H_2O)
Alcool metilico .	0.739	1.262	0.009172	32	66.6	1.9
» etilico . .	0.396	1.246	0.01006	46	319	15.0
Glicerina . . .	0.555	0.793	0.009172	92	250	8.9
Fenolo	0.525	0.932	0.009116	94	214	6.7
Saccarosio . . .	0.442	0.630	0.009616	342	530	10.5
Acetamide . . .	0.709	0.870	0.009172	59	109	2.8
Esametilentetramina	0.543	0.753	0.009838	140	221	4.4

La tendenza ad idratarsi in soluzione sembra dunque notevole per le sostanze da noi prescelte: ad eliminare però qualsiasi dubbio sull'esistenza di queste anomalie nei pesi molecolari, era necessario di determinarne alcuni per corpi che presumibilmente non si combinano col solvente [3]. Per le

[1] Esistono misure di Oeholm sul saccarosio e l'acetamide, di Thowert sugli alcools etilico, metilico ed il fenolo, e di Heimbrodt sulla glicerina. Taluni dei risultati di questi autori differiscono non poco dai nostri, ma noi crediamo di dover ritenere come più attendibili le nostre misure: 1°) perchè i pesi molecolari calcolati con quei valori risulterebbero di gran lunga inferiori ai teorici; 2°) perchè le velocità di diffusione a noi risultano in gran parte inferiori a quelle degli autori citati; ora, la cosa più probabile è che gli errori commessi siano in più.

[2] I valori di v si calcolano dalle densità che si trovano nella letteratura; quelli di ξ dalle misure, più recenti, di Bingham e White (Zeitschrift für physikal. Chemie, LXXX, 670).

[3] Gli innumerevoli dati crioscopici che si rinvengono nella letteratura permettono di calcolare facilmente che le sostanze da noi usate hanno in soluzione acquosa molecole semplici.

Si noti che, per i corpi più densi dell'acqua, quando avviene l'idratazione, i valori

misure eseguite da uno di noi con A. Matteucci [1] sui coefficienti di temperatura della tensione superficiale, in soluzioni benzoliche di idrocarburi aromatici, non sembra manifestarsi in modo sensibile il fenomeno della combinazione col solvente: abbiamo dunque pensato di misurare la velocità di diffusione in benzolo di alcuni idrocarburi, non troppo volatili, per poterli pesare direttamente dopo aver fatto svaporare il benzolo. Ecco i risultati di tali esperienze.

Sostanza	Conc. della soluz.	Temperatura	Metodo di dosamento	Tempo in giorni
Naftalina . . .	10	24	pesata	1,08
Difenile . . .	8	26	"	1,00
Dibenzile . . .	8	26	"	0,75

Le stratificazioni risultarono come segue:

Sostanza	Naftalina	Difenile	Dibenzile
	2501	2518	2854
	2288	2307	2624
	1864	1833	1969
	1367	1326	1189
	876	864	694
	534	518	337
	341	290	157
	112	172	72
	70	104	53
	47	68	51
$\frac{h}{2\sqrt{kt}}$	0,245	0,26	0,31

Finalmente, per la costante di diffusione, i volumi specifici, l'attrito interno [2] ed i pesi molecolari, abbiamo i seguenti valori:

Sostanza	k	v	ξ	Peso molecolare calcolato	Peso molecolare trovato
Naftalina	1,059	0,8688	0,00593	128	121
Difenile	1,016	0,858	0,00580	154	152
Dibenzile	0,953	0,878	0,00580	182	180

---

di v, da noi calcolati in base alle densità allo stato puro, saranno più piccoli del vero, e quindi i pesi molecolari da noi calcolati sono probabilmente maggiori del vero; pei corpi meno densi dell'acqua l'errore probabile è in senso inverso. Tuttavia, non differendo di molto le densità da quella dell'acqua, questa consideraziooe non può alterare sensibilmente i risultati.

[1] Questi Rendiconti, 1914, II, 590.

[2] Le densità della naftalina e del difenile erano già state determinate; quella del dibenzile l'abbiamo misurata noi.

L'attrito interno del benzolo è dedotto dalle esperienze di Faust (Zeitschrift für physikalische Chemie, LXXIX, 99).

Questi risultati ci sembrano abbastanza soddisfacenti, considerando che, anche nelle determinazioni dei pesi molecolari coi metodi crioscopico ed ebullioscopico, si incorre in errori dello stesso ordine di grandezza: e si noti che nel nostro caso entrano in giuoco numerosi fattori, tutti da determinarsi sperimentalmente; ed entrano tutti (meno il volume specifico) nella espressione che dà il peso molecolare, con potenze superiori ad uno, cosa che accresce di molto l'influenza degli errori. Tuttavia noi crediamo che, con determinazioni numerose ed accurate, si potrà arrivare a risultati ancor più precisi.

Chimica. — *Sopra alcuni derivati della metilvanillina, e sopra un nuovo prodotto di condensazione* (1). Nota preliminare di B. L. Vanzetti, presentata dal Socio G. Koerner (2).

In prosecuzione di alcune ricerche sui derivati dell'*isolivile* (3) ho avuto occasione di occuparmi, alcuni anni or sono, dei prodotti di condensazione e di ossidazione della metilvanillina: e precisamente ho potuto preparare una certa quantità di *veratrile* e di *veratroino*, seguendo le prescrizioni ben note per la preparazione degli analoghi derivati del benzile e della benzoina. Alcun tempo dopo ripresi il lavoro per tentare la sintesi dell'*acido veratrilico*, corrispondente al benzilico, e mi venne incidentalmente sott'occhio una pubblicazione di P. Fritsch (4), in cui si trovava la descrizione del veratroino e del veratrile, preparati a tutt'altro scopo, con processi poco diversi da quelli usati da me. Potei così constatare la identità dei risultati e, tra altro, il curioso comportamento del veratroino, il quale, contrariamente a quanto accade per i suoi analoghi, non si è potuto ottenere cristallizzato. È inutile che io elenchi in questo luogo i tentativi da me fatti per ottenere questo corpo allo stato cristallino; mi riservo di descrivere per esteso tutti questi derivati e le loro caratteristiche altrove, quanto prima, e mi limito ad accennare qui alla preparazione dell'acido veratrilico, per dire di una interessante reazione di trasformazione riscontrata da me accidentalmente nel corso delle numerose ricerche, e per quanto so, per la prima volta in questo gruppo di composti.

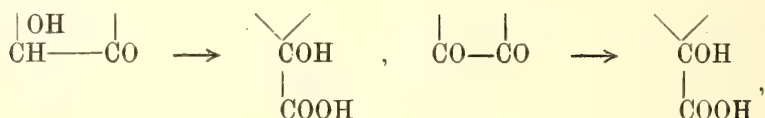
(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di chimica organica della R. Scuola superiore di agricoltura di Milano e nel laboratorio di chimica generale della R. Università di Padova.

(2) Pervenuta all'Accademia il 28 ottobre 1915.

(3) Körner e Vanzetti, *Ricerche sopra l'olivile* (Memorie d. R. Accad. dei Lincei, 1911).

(4) *Synthese in der Isochinolinreihe* (Lieb. Ann., *329*, pp. 37-65, an. 1903).

L'*acido veratrilico* (3-4, 3'-4'-tetrametossibenzilico) non si ottiene così facilmente dai suaccennati composti a funzione chetonica, secondo la nota trasposizione e ossidazione:

$$\overset{|\,OH}{CH} — \overset{|}{CO} \longrightarrow \overset{\diagdown\diagup}{C}OH\text{—}COOH \;,\quad \overset{|}{CO} — \overset{|}{CO} \longrightarrow \overset{\diagdown\diagup}{C}OH\text{—}COOH \;,$$

come avviene per il benzile, l'anisile, il piperonile ed altri, in cui la reazione è poco meno che quantitativa; ma sembra che la molecola, con la introduzione di nuovi metossili, sia divenuta più inerte rispetto a quella reazione e più adatta invece ad altre trasformazioni, a tutta prima impreviste.

Per esempio, mentre il benzoino si trasforma direttamente in acido benzilico per semplice azione di una corrente d'aria, in presenza di alcali a caldo [Klinger ([1])], il veratroino si ossida quantitativamente a veratrile e l'ossidazione non procede oltre. Anche il trattamento del veratrile con potassa acquosa, col metodo indicato da M. Marx per l'esametossibenzile ([2]), non conduce a migliori risultati, perchè neppure dopo 20 ore di ebollizione il veratrile accenna minimamente a passare in soluzione. Solo l'aggiunta di alcool, o, meglio, il trattamento diretto del veratrile con soluzione alcoolica di idrato potassico, permette il passaggio in soluzione, in seguito a contatto prolungato a caldo. Anche in questi casi, però, il rendimento è lungi dall'essere quantitativo; tuttavia l'acido si ottiene subito allo stato di sufficente purezza, in piccoli gruppi di mammelloni bianchi, o in bellissimi aghi setacei, lunghi più di un centimetro, disposti a sfera. Il punto di fusione loro è a circa 68°; a 105° avviene una parziale scomposizione (eliminazione d'acqua) e a 150° s'inizia un imbrunimento, che va aumentando con l'elevarsi della temperatura. All'analisi la molecola organica si mostra idratata: la composizione corrisponde cioè a $C_{18}H_{20}O_7 . H_2O$.

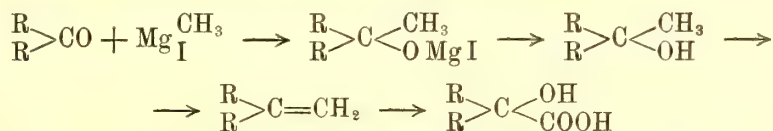
Con la speranza di trovare una via più acconcia per la preparazione di questa sostanza, ed avendo un po' di acido veratrico gentilmente cedutomi dal prof. Koerner, ò preparato del veratrofenone (3, 4, 3', 4'-tetrametossibenzofenone: punto di fus. 144°.5) attraverso il cloruro di veratroile (fondente a 70-71°), che fu combinato con una molecola di veratrolo, in presenza di $AlCl_3$. Dal veratrofenone, per addizione di ioduro di Mg-metile, ò preparato il dive-

([1]) Ber. d. d. Ges., *19*, pag. 1868. — Secondo Biltz e Wienands (Lieb. Ann., 308, pag. 11), anche l'anisile, in presenza di potassa e in corrente d'aria, si trasforma in acido anisilico.

([2]) Lieb. Ann., *263*, pag. 255.

ratrilmetilcarbinolo (punto di fus. 95-96°) e il diveratriletilene, dal quale, per ossidazione, si può ottenere l'acido veratrilico:

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{R}{R}\!\!>CO + Mg\genfrac{}{}{0pt}{}{CH_3}{I} \longrightarrow \genfrac{}{}{0pt}{}{R}{R}\!\!>C\!\!<\genfrac{}{}{0pt}{}{CH_3}{O\,MgI} \longrightarrow \genfrac{}{}{0pt}{}{R}{R}\!\!>C\!\!<\genfrac{}{}{0pt}{}{CH_3}{OH} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \genfrac{}{}{0pt}{}{R}{R}\!\!>C{=}CH_2 \longrightarrow \genfrac{}{}{0pt}{}{R}{R}\!\!>C\!\!<\genfrac{}{}{0pt}{}{OH}{COOH}$$

Descriverò, in altro luogo, anche queste sostanze; mi basti dire, per ora, che questa via non si mostrò conveniente per la preparazione dell'acido veratrilico, e dovetti perciò ricorrere ancora al veratrile ed ebbi così occasione di studiarne meglio il comportamento verso l'idrato potassico a fusione. Questa reazione dà, per l'acido benzilico e per l'anisilico, dei rendimenti abbastanza elevati; meno per il piperilico. Col veratrile le cose vanno ancor peggio; tanto che si può avere in prevalenza formazione di acido veratrico. I rendimenti variano inoltre, in sommo grado, col variare della temperatura alla quale si fa la fusione, e possono intervenire contemporaneamente delle trasformazioni più complicate, per le quali la massa assume una colorazione più scura e si ottengono sostanze di aspetto resinoso. Da queste sostanze resinose, per azione successiva di varî solventi, sono riuscito ad isolare una sostanza giallo-arancio, che cristallizza in laminette dall'aspetto dell'azobenzolo. Su di essa ò tentato alcune prove, che mi hanno condotto a constatazioni molto interessanti. Essa è insolubile nell'acqua e nelle soluzioni alcaline calde, o fredde; solubile nei solventi organici. È sublimabile. Lasciata ricristallizzare dall'acido acetico, si deposita in bellissimi aghetti rosso-bruni lucenti; i quali alla temperatura di 110-120° si ritrasformano nel composto giallo aranciato fondente a 198°. Con acido solforico concentrato freddo dà una bella colorazione verde-azzurra, che in pochi minuti si muta in una colorazione rosea e, in seguito a diluizione spontanea, o provocata, dà luogo a un intorbidamento rossiccio, dovuto al riprecipitarsi della sostanza allo stato di polvere. Colorazioni simili sono date dal veratrile e dall'acido veratrilico.

Da una prima analisi risulterebbe che la sua composizione è molto prossima a quella del veratrile, con un po' meno d'idrogeno. L'aspetto ed il comportamento chimico fanno pensare ai derivati di nuclei condensati, tipo fenantrene, o antracene. Parrebbe trattarsi cioè del fenantrenchinone, o dell'antrachinone corrispondente; più probabilmente del secondo, perchè non si à, con o-fenilendiammina la nota reazione delle chinossaline (1); è inoltre da notarsi che per ossidazione non si è ottenuto l'acido deidroveratrico corrispondente, noto (2), e d'altra parte il composto è perfettamente indifferente all'azione di SO_2 e dei bisolfiti alcalini.

Supposto che non si tratti di un composto proveniente da parziale smetilazione, il che è poco vero simile, credo che si potrà ricercare l'analogo

(1) G. Körner, Atti Ist. lombardo, giugno 1881; O. Hinsberg, Ber. XVII, 318 (1884); e G. Körner, Rend. Acc. Linc., VIII, 219, transunti.

(2) Herissey e Doby, Centralbl., 1909, II, pag. 1807.

nella resina rossa che si ottiene dalla scomposizione termica dell'acido benzilico, dalla quale non credo si siano mai potute isolare sostanze cristallizzate [1]. Mi sono proposto, perciò, di studiare il prodotto resinoso rosso dell'acido benzilico, più facilmente accessibile; e spero di poter riferirne tra breve.

Microbiologia. — *Ulteriori ricerche sull'attività proteolitica dei fermenti lattici.* II. *L'influenza del substrato* [2]. Nota del prof. Costantino Gorini, presentata dal Socio G. Briosi [3].

Nell'anno 1907 [4], descrivendo un tipo di batterio acido-presamigeno isolato dalle mammelle vaccine, davo il primo esempio di un fermento lattico il quale rivelava il proprio potere proteolitico solamente nelle culture in latte e non nelle culture in gelatina. Nell'anno 1910 [5], descrivendo un tipo di cocco acido-presamigeno isolato dal formaggio, davo un secondo esempio di mancata corrispondenza proteolitica fra le culture in gelatina e le culture in latte di un medesimo fermento lattico. Venni così a mettere sull'avviso che la incapacità di liquefazione della gelatina non fornisce un criterio bastevole per escludere l'azione peptonizzante di un dato fermento lattico sulla caseina [6]. Dimostrai, peraltro, che tale diverso comportamento non è attribuibile ad una differenza fra l'enzima proteolitico agente sulla gelatina e quello agente sulla caseina; infatti, se si prende della gelatina sterile, la si fonde, la si addiziona di qualche goccia di lattocultura peptonizzata dei suddetti batterî, la si mette solo per qualche ora alla temperatura di digestione, e la si riporta poi alla temperatura ambiente od anche in ghiaccio, essa, a differenza della gelatina di controllo, non risolidifica più, dando così segno indubbio che la sua peptonizzazione è avvenuta in grazia dell'enzima proteolitico che era contenuto nella lattocultura aggiunta [7].

A spiegazione del non parallelismo della gelatinocultura colla lattocultura io addussi allora la deficiente attitudine eugenesica della gelatina verso quei tipi di batterî, i quali effettivamente nella gelatinocultura si sviluppavano

[1] A. Jena, Ber., II (1869); Nef, Lieb. Ann., *298*, pag. 241.

[2] Lavoro eseguito nel Laboratorio di batteriologia della Scuola superiore di agricoltura di Milano.

[3] Pervenuta all'Accademia il 25 ottobre 1915.

[4] Gorini C., Il *Bacillus minimus mammae*, in Rendic. Ist. lomb. sc. e lett., 1907, pag. 947; 1908, pag. 122.

[5] Gorini C., *I cocchi acido-presamigeni del formaggio*. in Rendic. R. Acc. Lincei, 1910, pag. 150.

[6] Le mie ricerche furono poi confermate da varî autori, fra cui S. H. Ayers di Washington (28° Annuel Report of the Bureau of animal industry of the U. S. Department of agriculture, 1911, pag. 229).

[7] Ved. anche il mio lavoro *Sui presami animali e microbici*, in Rend. R. Ist. lomb. sc. e lettere 1908, XLI, pag. 117.

stentatamente. Senonchè, in seguito, ho incontrato altri tipi di fermenti latticocaseolitici i quali non fondevano la gelatina, sebbene vi si sviluppassero rigogliosamente; per tali casi adunque era necessario di cercare un'altra interpretazione del contraddittorio comportamento in gelatina. Questa ricerca forma oggetto della presente Nota.

* * *

Data l'insufficienza della gelatinocultura a svelare l'attività proteolitica dei fermenti lattici, è chiaro che, se si ricorre alle piatte in gelatina per l'isolamento dei fermenti latticocaseolitici, bisogna trapiantare in latte non solamente le colonie fondenti ma anche tutte le colonie non fondenti, come praticai appunto nei miei primi studî sull'argomento.

Desiderando evitare spreco di tempo e di materiale, ho pensato che si sarebbe potuto agevolare il còmpito allestendo le culture a piatto non più in gelatina, ma in agar addizionato di latte, che è quanto dire in latte reso solido coll'aggiunta di agar. Per preparare questo agarlatte, parvemi superfluo di ricorrere all'aggiunta di estratto di carne e peptone come si usa per il comune agar nutritivo; dappoichè si tratta di germi proprî del latte, basta offrir loro un agarlatte nel quale l'agar serva esclusivamente da solidificante. A tal uopo faccio una soluzione semplice di agar in acqua al 2 %, che distribuisco e sterilizzo in provette o in boccette; al momento dell'uso la faccio fondere, vi mescolo del latte sterilizzato nella proporzione di 1 su 2 e poi verso nelle piatte l'agarlatte. Per prevenire una intempestiva parziale solidificazione dell'agar, è consigliabile di riscaldare il latte a circa 50° C. prima di mescolarlo coll'agar; la seminagione può esser fatta per *disseminazione* nell'agarlatte tuttora liquido a 40° C., prima di versarlo nella piatta, oppure per *strisciamento* sull'agarlatto già solidificato nella piatta. A meno che si tratti di germi anaerobii obbligati, è preferibile questa seconda maniera perchè riesce più facile di ravvisare le colonie caseolitiche.

Le colonie caseolitiche spiccano sul fondo biancastro opaco dell'agarlatte per il fatto che attorno ad esse si forma una zona chiara di limpidificazione, dovuta alla solubilizzazione (peptonificazione) della caseina circostante. Questo alone è tanto più esteso quanto maggiore è l'attività proteolitica del batterio e quanto meno numerose e stipate sono le colonie che si sviluppano su una medesima piatta; ciò per ragioni ovvie di concorrenza vitale. Curioso, però, che la larghezza dell'alone non è sempre proporzionale alla grandezza della colonia; vi sono delle colonie di batterî acidopresamigeni piccole, puntiformi, le quali si circondano di una zona di chiarificazione smisuratamente estesa, assai più estesa di quella che attornia colonie più grandi. Ciò va d'accordo con quanto si rileva talvolta anche nelle culture di siffatti batterî in gelatina, dove si scorgono coloniette, grumetti minutissimi, nuotare in seno a grandi masse di gelatina fusa [1].

[1] Ved. nel mio lavoro *Sui batterî dei dotti galattofori* il tipo di cocco che designai «*a rapida e sproporzionata fusione*», in Rend. R. Acc. Lincei, 1902, pag. 162.

***

Per questo mezzo delle culture su agarlatte ho potuto accertare l'attività proteolitica in fermenti lattici che nelle culture in gelatina non fluidificavano; non solo, ma ho potuto svelare tale attività in fermenti lattici che non la palesavano nemmeno, o appena dubbiosamente, nelle stesse culture in latte. Tutto ciò sta a provare che la capacità dei fermenti lattici di attaccare la caseina è di constatazione difficile e delicata; essa si mostra tanto legata, non solamente alle condizioni di temperatura e di aerobiosi (come ho dimostrato in altri lavori) (1) ma altresì alla natura del substrato, che differenze anche minime nella composizione di questo possono impedirne la manifestazione.

Queste differenze minime sono bene spesso inafferrabili, come quelle che si riferiscono alle qualità del latte impiegato per le culture (2). Già *ab origine* i latti possono differire fra loro per ragioni fisiologiche inerenti alle mungane; ancor più lo possono poi per opera degli enzimi e dei germi che, nel lasso di tempo più o meno lungo inter corrente fra la mungitura e l'arrivo in Laboratorio, hanno campo di alterarlo e di elaborarvi varî prodotti eterogenei; in Laboratorio infine l'operazione della sterilizzazione più o meno profonda a cui il latte va soggetto, e la più o meno lunga permanenza del latte allo stato sterile prima di essere coltivato, sono altrettante cause di modificazioni che, in base alle mie osservazioni, appaiono sufficienti a influire sul dispiegamento dell'attività caseolitica da parte dei fermenti lattici.

Ho potuto convincermi di tutto ciò in occasione dei trapianti periodici in latte che da parecchi anni vado facendo dei fermenti lattici della mia collezione. Pur troppo nella maggior parte dei casi ho dovuto limitarmi a constatare il fatto della irregolare comparsa o scomparsa dell'attività caseolitica in un medesimo fermento lattico, e a riconoscere che il fenomeno non poteva dipendere da altro che dalla diversa qualità del latte, senza tuttavia arrivare a darmene ragione precisa, avendo escluso le altre influenze (temperatura, aerobiosi, ecc.).

Ultimamente però le suaccennate culture in agarlatte mi hanno messo sulla via di avanzare un'ipotesi o, meglio, di rintracciare una spiegazione che può attagliarsi a molti casi.

***

Come ho fatto conoscere da parecchio tempo (3), una delle sedi abituali di batterî acidopresamigeni, che sono poi fermenti latticocaseolitici, è la mammella

(1) Gorini, C., Bollettino uff. del Min. agricoltura, Roma, 1897. — Annales de micrographie, Parigi, 1897, IX, pag. 433.

(2) Gorini C., Rend. R. Ist. lomb. sc. e lett. 1907, XL, pag. 947.

(3) Gorini C., Rend. R. Ist. lomb. sc. e lett., 1901, vol. 34, pag. 1279; Rendiconti R. Acc. Lincei, 1902, pag. 162. — Landwirts. Jahrbueh der Schweiz, 1902, pag. 22; Centrabl. f. Bakter, II Abt., *8*, 1902; *Revue générale du lait*, 1902.

vaccina, dalla quale essi fuorescono col latte, e segnatamente colle prime stille di latte. Se si prende qualche goccia di questo primo latte e lo si semina per strisciamento su piatte di agarlatte, è ben raro di non assistere allo sviluppo di colonie munite dell'alone caseolitico sopradescritto. Se però queste colonie vengono trapiantate in latte, non sempre (com' è ovvio di intuire da quanto ho esposto indietro) si verifica la conferma dell'attività caseolitica.

Orbene, in alcuni casi di fallita conferma ho provato a riportare la cultura su agarlatte per assicurarne l'identità; con mia sorpresa, notai che il batterio più non si rivelava caseolitico nemmeno sull'agarlatte: che cioè le colonie vi restavano prive di alone caseolitico. Eppure nei rispetti morfologici non c'era dubbio sulla purezza delle culture. Pensai allora d'indagare se nella preparazione dell'agarlatte vi fosse stata qualche modificazione alla quale attribuire il modificato comportamento del batterio; non ne ravvisai altra apprezzabile, all'infuori della qualità del latte adoperato. E per vero, l'agarlatte, che aveva servito alla semina originaria fatta direttamente dalla mammella, era stato allestito col medesimo latte appena munto; invece l'agarlatte delle semine successive era stato allestito con latte commerciale non più certamente fresco e quindi indubbiamente alterato per via enzimatica e microbica. Volli ripetere la prova su agarlatte al latte appena munto; e le colonie di quella medesima cultura ricomparvero coll'alone caratteristico di peptonificazione. Laonde mi parve lecito di supporre che la causa della mancata manifestazione proteolitica stesse in qualche condizione per cui il latte commerciale differisce dal latte appena munto.

Troppe sono le cause che possono far variare i due latti, segnatamente per azione microbica ed enzimatica, perchè io mi proponessi di prenderle in esame singolarmente. Una però ve ne ha, sulla quale parvemi meritasse fermare l'attenzione, perchè mi permetteva di estendere al caso mio una legge fisiologica che è già stata invocata per giustificare la incostanza e perfino la perdita di proprietà funzionali presso altri batterî.

È noto, ad es., che certi azotobatterî cessano dall'assimilare l'azoto libero quando sono coltivati nei laboratorî in mezzi troppo nutritivi, talchè, volendo utilizzare culture artificiali di quei microbi per arricchire di nitrogeno il terreno, si è pensato di affamarli, di obbligarli cioè anche nelle culture artificiali a lavorare per procurarsi il cibo azotato. Ora, mi domandai, non potrebbe verificarsi un fatto consimile anche per certi fermenti lattici rispetto alla loro attività proteolitica? Non potrebbe essere che essi siano stimolati a produrre il necessario enzima peptonizzante solamente quando non hanno a disposizione abbondanza di albuminoidi solubili? In tal guisa si comprenderebbe, almeno in parte, la sospensione delle loro manifestazioni caseolitiche in presenza di alcuni latti, considerando che le albumine solubili, naturalmente contenute nel latte, possono variare per ragioni fisiologiche, considerando ancora che esse possono venire più o meno completamente precipitate nel processo di sterilizzazione, considerando altresì che un latte può

arrivare in laboratorio colla caseina già parzialmente solubilizzata da germi peptonizzanti; e via dicendo.

Io ho incontrato latti commerciali dai quali, mediante candela Chamberland, filtrava un siero che dava precipitati non indifferenti con acido fosfovolframico e con solfato ammonico, mostrando quindi di contenere ragguardevoli quantità di albuminoidi solubilizzati. Simili latti avrebbero potuto ben servire per rispondere al quesito sopraindicato: senonchè, in primo luogo, il quantitativo di albuminoidi disciolti, che può indurre un batterio a risparmiarsi dall'elaborare enzimi proteolitici, non è certamente suscettibile di determinazione; in secondo luogo, un latte commerciale può, per via microbico-enzimatica, aver subìto anche altre alterazioni capaci di influire sul comportamento delle culture.

Pertanto, desiderando controllare l'attendibilità della ipotesi avanzata, ho stimato miglior consiglio mettere a raffronto due agarlatti preparati colla medesima qualità di latte appena munto, ad uno dei quali fosse stato aggiunto del peptone secco Witte [1] nella proporzione di $^1/_4$ $^0/_0$. Facendo culture comparative con diversi tipi di fermenti latticoproteolitici, ho constatato che alcuni di essi, e precisamente quelli a potere caseolitico incostante, nell'agarlatte semplice davano colonie piccole ma alonate, mentre nell'agarlattepeptone davano colonie prive di alone caseolitico sebbene meglio sviluppate. Resta così provato che *il contenuto di albuminoidi solubili (peptoni) in un latte è da ritenere altra delle cause per cui un fermento lattico non manifesta le proprie attività caseolitiche.*

Se ora riflettiamo all'altro fatto, da me pure messo in luce, di fermenti latticoproteolitici che nelle culture in gelatina si sviluppano senza fonderla, mentre poi l'enzima caseolitico da essi prodotto nelle latto-culture esercita azione fluidificante sulla gelatina stessa, sembrami logico di ammettere che la presenza di peptone nella gelatina nutritiva sia la causa della mancata elaborazione di enzima proteolitico da parte delle colonie ivi sviluppantisi. Disgraziatamente qui non sarebbe indicato di istituire culture comparative su gelatina con e senza peptone, perchè la gelatina semplice senza aggiunta di albuminoidi solubili non è materiale nutritivo sufficiente per i fermenti lattici, come del resto per la pluralità dei batterî.

*
* *

Riassunto e deduzioni. — Riassumendo, adunque, la presente Nota reca un nuovo contributo alla dimostrazione, da me già data in precedenti

[1] Ho specificato la qualità di peptone adoperato, perchè data la grande variabilità dei peptoni che vanno sul commercio, è possibile che con altri peptoni si ottengano risultati differenti. Circa l'influenza della qualità del peptone sul biochimismo dei batterî vedasi il mio lavoro pubblicato nel 1893 sul « Giornale della R. Società Italiana d'Igiene », anno XV, n. 5.

lavori, circa la *influenza del substrato sull'attività proteolitica dei fermenti lattici*.

Quest'influenza si rivela in modo manifesto *confrontando il comportamento di certi fermenti lattici nelle culture in gelatina e nelle culture in latte*, in quanto essi, mentre peptonificano il latte, non arrivano a fluidificare la gelatina, sebbene d'altra parte gli enzimi caseolitici da essi elaborati in latte si dimostrino atti a peptonizzare la gelatina.

Ma l'influenza del substrato è così sensibile che si rivela *puranco confrontando il comportamento di uno stesso fermento lattico di fronte a diverse qualità di latte*, sia coltivandolo nel latte liquido tal quale, sia coltivandolo nel latte reso solido con agar (agarlatte). Onde ne deriva che l'azione caseolitica di certi fermenti lattici appare incostante per cause per lo più imprecisabili e dipendenti verosimilmente dalle alterazioni subìte dal latte prima, durante o dopo la sua sterilizzazione in laboratorio.

Fra le cause che valgono a spiegare l'incostanza dell'attività caseolitica dei fermenti lattici va annoverato il *contenuto in albuminoidi solubili* (*peptone*) *del latte*, massime del latte commerciale. Per analogia è lecito di inferire che la mancata fluidificazione della gelatina nutritiva da parte di certi fermenti latticocaseolitici debba ascriversi agli albuminoidi solubili (peptone) in essa contenuti.

Ciò guida alla supposizione che presso certi fermenti lattici lo stimolo a produrre enzimi proteolitici sia subordinato al bisogno di procurarsi dell'azoto solubile per il proprio sostentamento; quando essi trovano quest'azoto solubile in quantità sufficiente e già bell'e pronto nel substrato, potrebbero esimersi dal secernere l'enzima solubilizzante.

Comunque sia, resta accertato, dalle mie ricerche precedenti e dalle attuali, che per giudicare della capacità proteolitica di un fermento lattico non sono criterî sufficienti le culture in gelatina e nemmeno le culture in qualunque sorta di latte; bisogna esperimentare variando le qualità di latte e tenendo conto particolarmente delle differenze che possono intercorrere fra i latti freschi appena munti e i latti commerciali, massime nei riguardi del contenuto in albuminoidi solubili (peptone), per cause microbiche ed enzimatiche.

Ed ora, se sommiamo quello che ho esposto nella presente Nota circa l'influenza del substrato, con quello che ho esposto nella Nota precedente [1] circa l'influenza della temperatura sulle manifestazioni proteolitiche dei fermenti lattici, vediamo come occorra procedere guardinghi prima di escludere che un fermento lattico sia capace di peptonizzare la caseina in ambiente acido, e come sia lecito di presumere che tale capacità (da me primamente messa in luce) sia più diffusa di quanto indurrebbero a ritenere gli autori che delle suddette influenze non si sono preoccupati.

[1] Gorini C., Rend. R. Acc. Lincei, 1915, 24°, pag. 369.

Chimica. — *Analisi termica delle miscele degli idrati alcalini coi corrispondenti alogenuri. III: Composti di litio* [1]. Nota di Giuseppe Scarpa, presentata dal Socio G. Ciamician.

In due Note [2] precedenti ho esposto i risultati ottenuti studiando il comportamento termico delle miscele degli idrati di potassio e di sodio coi corrispondenti composti alogenati.

Da questi risultati si deduce che la tendenza a dar composti fra idrati e alogenuri dello stesso metallo aumenta dal potassio al sodio. Dato questo, per completare le mie ricerche mi parve non privo di interesse di estendere lo studio termico ai sistemi formati dai corrispondenti composti di litio, per vedere se, data la minore elettroaffinità del Li^+ rispetto a quella del Na^+, aumenti la tendenza a dare questi composti ossialogenati.

Vennero studiate perciò le quattro coppie di sali seguenti: $LiOH$-LiF, $LiOH$-$LiCl$, $LiOH$-$LiBr$, $LiOH$-LiJ. Per le esperienze mi servii del dispositivo già usato per i sali potassici e sodici.

Dei sali adoperati, l'idrato ed il fluoruro di litio provenivano dalla ditta Kahlbaum di Berlino; il cloruro, il bromuro e l'ioduro dalla ditta C. Erba di Milano.

Come per l'idrato di potassio e di sodio, venne determinata la quantità di umidità e di carbonato contenuto nell'idrato di litio. L'analisi diede i risultati seguenti:

$$LiOH \text{ contiene: } LiOH = 98.5\ \%,\ Li_2CO_3 = 0.8\ \%,\ H_2O = 0.7\ \%.$$

La disidratazione dei sali di litio venne fatta per essiccazione in capsula di platino. Dopo essiccazione però si nota che questi sali, a differenza dei corrispondenti sali di potassio e di sodio, reagiscono debolmente alcalini, a causa di piccole tracce di ossido e di carbonato che in essi si formano durante il riscaldamento all'aria.

Durante le esperienze il peso delle miscele fu tenuto costantemente eguale a venti grammi.

Sistema $LiOH$-$LiFl$.

Sul punto di fusione dell'idrato di litio si hanno dati scarsi ed incerti. Secondo Dittmar [3] e De Forcrand [4], il punto di fusione di questo sale giace a 445°; dalle mie esperienze esso risulta a 462°. Alquanto superiore

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Padova, diretto dal prof. G. Bruni.

[2] Rend. Accad. Lincei, XXIV, 1° sem., pag. 738; XXIV, 1° sem., pag. 955.

[3] Journ. of Soc. chem. industry, *7*, 733 (1888).

[4] Compt. rend., *142*, 1255 (1906).

a quello dato da Carnelley [1] (801°) giace il punto di fusione del fluoruro di litio, da me trovato a 840°. Come appare dalla figura 1ª, questi due sali sono completamente miscibili allo stato liquido, e danno soluzioni solide, in rapporti assai ristretti.

La curva di cristallizzazione primaria discende dal punto di solidificazione del fluoruro di litio sino ad un eutettico alla temperatura di 430°, e risale poi lentamente al punto di fusione dell' idrato di litio. Sulle curve di raffreddamento si nota in modo evidente l'arresto eutettico per tutte le miscele da 5 a 85 mol. °/₀ circa di Li OH. Queste percentuali molecolari possono quindi essere assunte come i limiti di miscibilità, allo stato solido, dei due sali, la cui miscela eutettica presenta il massimo di durata a 80 mol. °/₀ di Li OH.

TABELLA I.

Mol. °/₀ LiOH	Mol. °/₀ LiFl	Peso °/₀ LiOH	Peso °/₀ LiFl	Temperature cristallizzazione primaria	Temperature fine cristallizzazioni	Temperature arresto eutettico	Durate in secondi
0.00	100 00	0.00	100.00	840	—	—	—
2.50	97.00	2.32	97.68	835	740	—	—
5.00	95 00	4.64	95.36	820	—	420	10
10.00	90.00	9.30	90.70	810	—	420	20
20.00	80.00	18.80	81.20	770	—	420	25
25.00	75.00	23.50	76.50	750	—	425	30
30.00	70.00	28.40	71.60	735	—	425	45
35.00	65.00	33.20	66 80	710	—	430	60
40.00	60.00	38.10	61.90	695	—	430	70
45.00	55.00	43.20	56.80	665	—	430	80
50.00	50.00	47.90	52.10	635	—	430	90
55.00	45.00	53.00	47.00	605	—	430	100
60.00	40.00	58.00	42.00	555	—	430	105
65.00	35.00	63 88	36.12	520	—	430	115
70.00	30.00	68 30	31.70	495	—	430	125
75.00	25.00	73.40	26.60	460	—	430	140
80.00	20.00	78.60	21.20	430	—	430	160
85.00	15.00	83.90	16.10	435	—	430	90
90.00	10.00	89.20	10.80	445	—	430	10
95.00	5.00	94.60	5.40	455	445	—	—
100.00	0.00	100.00	0.00	462	—	—	—

Per alcune miscele, che dànno luogo a formazione di cristalli misti, si potè cogliere in modo preciso la fine della cristallizzazione. (Ved. fig. 1 e tab. 1).

Sistema Li OH-Li Cl.

Il punto di fusione del cloruro di litio, da me trovato, giace a 605°, ed è in buon accordo quindi con quello degli altri sperimentatori [Guntz [2] (600°), Huttner e Tammann [3] (600°), Zemczuzny e Rambach [4] (614°)].

[1] Journ. of chem. soc., *33*, 281 (1878).
[2] Compt. rend., *117*, 732 (1893).
[3] Rendiconti Accad. Lincei, *22*, 1° sem., 631 (1913).
[4] Zeitschr. anorg. Chem., *65*, 403 1910).

I dati termici di questo sistema sono rappresentati nella fig. 2 e raccolti nella tabella II. La curva di cristallizzazione primaria discende dal punto di solidificazione di Li Cl sino ad un eutettico alla temperatura di 290° circa, presentando un gomito evidente per la miscela a 50 mol. °/₀ di Li OH; poi risale direttamente al punto di fusione dell' idrato di litio. L'arresto

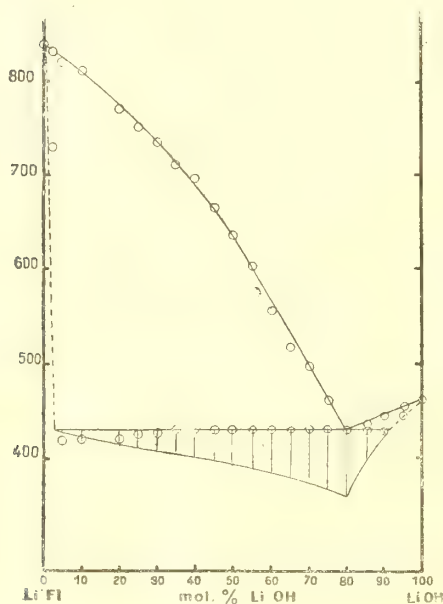
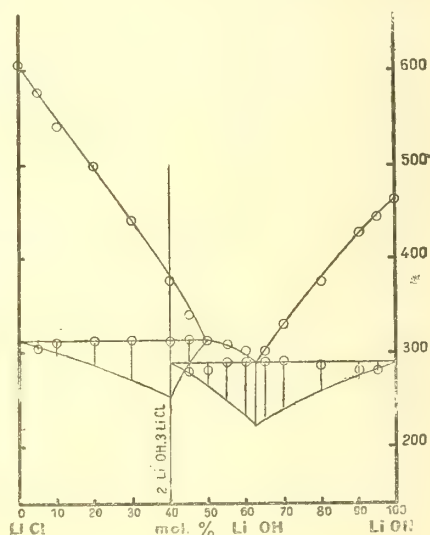



Fig. 1. Fig. 2.

eutettico, per tutte le miscele da 45 a 100 mol. °/₀ di Li OH, si nota a circa 285°, e assume un massimo di durata per la miscela a 65 circa mol. °/₀ di idrato di litio.

Tabella II.

Mol. °/₀ LiOH	Mol. °/₀ LiCl	Peso °/₀ LiOH	Peso °/₀ LiCl	Temperature cristallizzaz. primaria	Temperature 1° arresto	Durate in secondi	Temperature arresto eutettico	Durate in secondi
0.00	100.00	0.00	100.00	605	—	—	—	—
5.00	95.00	2.87	97.13	575	305	20	—	—
10.00	90.00	9.40	90.60	540	310	40	—	—
20.00	80.00	12.10	87.90	500	315	60	—	—
30 00	70.00	19.50	80.50	400	315	100	—	—
40.00	60.00	28.20	71.80	380	315	130	—	—
45.00	55.00	31.60	68.40	340	315	60	280	20
50.00	50.00	36.10	63.90	315	315	—	280	40
55 00	45.00	40.80	59.20	308	—	—	290	100
60.00	40.00	45.90	54.10	300	—	—	290	140
65.00	35.00	51.20	48 80	300		—	290	120
70.00	30 00	56.80	43.20	330	—	—	290	90
80.00	20.00	69.30	30.70	375	—	—	285	70
90.00	10.00	83.50	16.50	425	—	—	280	50
95.00	5.00	91.40	8.60	445	—	—	280	30
100.00	0.00	100.00	0.00	462	—	—	—	—

Le miscele da 0 a 50 mol. °/₀ di Li OH presentano, oltre all'arresto di prima cristallizzazione, un secondo arresto alla temperatura di 315°, il quale assume un massimo per la miscela a 40 mol. °/₀ di Li OH. Questo arresto corrisponde alla formazione di un composto decomponibile alla fusione e al quale con ogni probabilità corrisponde la formula 2 Li OH · 3 Li Cl.

Il presentarsi, in modo assai pronunciato, dell'arresto eutettico per le miscele a 5 e a 95 mol. °/₀ di idrato di litio, fa supporre che non si abbia formazione di soluzioni, nemmeno in rapporti ristretti, fra i due componenti.

Sistema Li OH-Li Br.

Dalle mie esperienze il punto di solidificazione del bromuro di litio giace a 550°, temperatura abbastanza concordante con quella data da Carnelley (547°) (loc. cit.).

Questi due sali presentano un diagramma di stato, simile a quello dato dai due sali del sistema precedente. I due rami della curva di cristallizzazione primaria, discendendo dai punti di fusione dei due componenti, s'intersecano in un punto eutettico alla temperatura di 275° e alla concentrazione di 45 mol. °/₀ di Li OH.

TABELLA III.

Mol. °/₀ LiOH	Mol. °/₀ LiBr	Peso °/₀ LiOH	Peso °/₀ LiBr	Temperature cristallizzaz. primaria	Temperature 1° arresto	Durate in secondi	Temperature arresto eutettico	Durate in secondi
0.00	100.00	0.00	100.00	550	—	—	—	—
5.00	95.00	1.43	90.57	520	—	—	250	10
10.00	90.00	3.00	97.00	485	—	—	255	30
20.00	80 00	6.50	93 50	440	—	—	275	50
25.00	75.00	8.41	91.59	500	—	—	275	60
30.00	70.00	10.70	89.30	380	—	—	275	80
40.00	60.00	16.50	83.50	320	—	—	275	120
45.00	55.00	18 40	81.60	275	—	—	275	150
50.00	50.00	22.00	78.00	285	—	—	270	120
55.00	45.00	25.20	74.80	295	—	—	275	100
60.00	40.00	29 30	70 70	300	—	—	265	80
65.00	35.00	33.90	66.10	310	—	—	270	50
70.00	30.00	39.20	60.80	330	310	60	265	20
75.00	25.00	45.30	54.70	355	310	125	—	—
80.00	20 00	52.50	47 50	380	310	100	—	—
90 00	10.00	71.80	28 20	425	305	50	—	—
95 00	5.00	83 90	16.10	440	305	20	—	—
100.00	0.00	100.00	0.00	462	—	—	—	—

Le miscele da 0 a 70 mol. °/₀ di Li OH presentano tutte l'arresto eutettico, il quale scompare per le miscele da 75 a 100 mol. °/₀ di idrato di litio. Per le miscele comprese fra queste ultime percentuali si nota invece un forte arresto alla temperatura di 310°, arresto che assume un massimo di durata a 75 mol. °/₀ di Li OH, e che corrisponde alla formazione di un composto decomponibile. A questo composto — come si può dedurre dall'arresto mas-

simo che si presenta a 310° per la miscela a 75 mol. °/₀ di Li OH, e dalla scomparsa dell'arresto eutettico per la miscela della medesima concentrazione — spetta assai verosimilmente la formula 3 Li OH · Li Br.

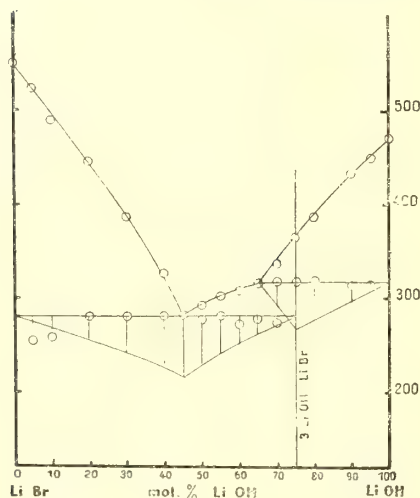
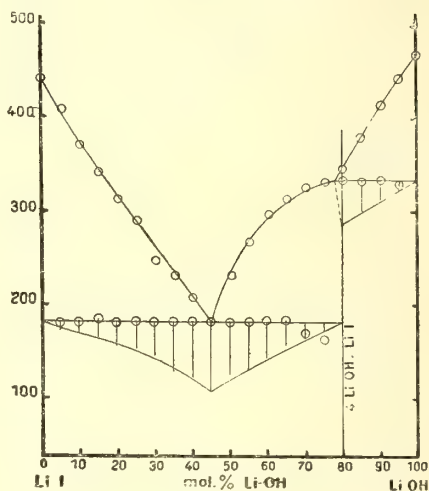



Fig. 3. Fig. 4.

Tabella IV.

Mol. °/₀ LiOH	Mol. °/₀ LiJ	Peso °/₀ LiOH	Peso °/₀ LiJ	Temperature cristallizzaz. primaria	Temperature 1° arresto	Durate in secondi	Temperature arresto eutettico	Durate in secondi
0.00	100.00	0.00	100.00	440	—	—	—	—
5.00	95.00	0.93	99.07	405	—	—	180	30
10.00	90 00	1.90	98.10	368	—	—	180	40
15.00	85.00	3.70	96.30	340	—	—	185	60
20.00	80.00	4.40	95.60	312	—	—	180	70
25.00	75 00	5.60	94.40	290	—	—	180	90
30.00	70.00	7.10	92.90	245	—	—	180	110
35.00	65.00	8.70	91.30	230	—	—	180	130
40.00	60.00	10.60	89.40	205	—	—	180	150
45 00	55.00	12.80	77.20	180	—	—	180	180
50.00	50.00	15.20	74 80	230	—	—	182	140
55 00	45 00	17.90	82 10	265	—	—	182	120
60.00	40.00	21.10	78 90	295	—	—	182	100
65.00	35.00	24.90	75.10	310	—	—	180	60
70.00	30.00	29 40	70 60	325	—	—	165	40
75.00	25.00	34.90	65.10	328	—	—	160	20
80.00	20 00	41.70	58.30	340	330	120	—	—
85.00	15.00	50.30	49.70	375	330	90	—	—
90.00	10.00	61.70	38.30	410	330	60	—	—
95.00	5 00	77.20	22.80	440	325	30	—	—
100.00	0.00	100.00	0.00	462	—	—	—	—

Sistema Li OH — Li J.

L'ioduro di litio fondeva a 440°. Questa temperatura di fusione è alquanto più bassa di quella data da Carnelley (loc. cit.) (446°) e da San-

donnini [1] (450°). Questo abbassamento del punto di fusione dell'ioduro di litio rispetto ai punti di solidificazione dei sopracitati autori è dovuto probabilmente al fatto che lo ioduro da me usato venne disidratato per essicazione in capsula di platino; ora, durante questa operazione lo ioduro perde piccole quantità di iodio, trasformandosi in ossido, il quale abbassa il punto di fusione dello ioduro di litio puro.

Questi due sali dànno luogo alla formazione di un composto decomponibile alla fusione.

La curva di cristallizzazione primaria discende dal punto di fusione dell'idrato di litio sino a un punto eutettico a 45 mol. °/₀ di Li OH, presentando un fortissimo gomito per la miscela a 75 mol. °/₀ di idrato di litio; dal punto eutettico essa risale regolarmente al punto di fusione dell'ioduro corrispondente.

L'arresto eutettico giace alla temperatura di circa 180°, e assume un massimo di durata a 45 mol. °/₀ di Li OH.

L'arresto che si presenta, per le miscele di concentrazione superiore a 75 mol. °/₀ di idrato di litio, alla temperatura di 310° circa, è dovuto certamente alla formazione di un composto non stabile alla fusione.

La mancanza dell'arresto eutettico per la miscela a 80 mol. °/₀ di Li OH è un buon indizio per concludere che essa corrisponde alla formazione del composto, al quale spetterebbe quindi la formula 4 Li OH · Li J.

Il netto e ancor forte arresto eutettico per le miscele a 5 e a 95 mol. °/₀ di idrato di litio fanno lecito di supporre che non si abbia formazione di soluzioni solide, o, se pure, in limiti assai ristretti.

Concludendo, si ha che l'idrato di litio dà:

col fluoruro formazione di un semplice eutettico e soluzioni solide di due specie in limiti assai ristretti;

col cloruro, col bromuro e collo ioduro formazione di tre composti, la cui esistenza, a quanto mi consta, era finora sconosciuta, e ai quali spettano, con ogni probabilità, rispettivamente le formole: 2 Li OH · 3 Li Cl, 3 Li OH · Li Br, 4 Li OH · Li J.

Conclusioni.

Come appare chiaramente dai risultati termici ottenuti, la tendenza a dare composti fra gl'idrati alcalini e i sali alogenati dello stesso metallo va aumentando gradatamente passando dal potassio al sodio e al litio, ossia col diminuire dell'elettroaffinità del catione.

Questo è d'accordo con la teoria di Abegg e Bodländer [2] sull'elettroaffinità e sulla formazione di complessi, secondo la quale la tendenza a dare

[1] Atti R. Accad. dei Lincei [5], *22*, sem. II, 520 (1913).

[2] Zeitschr. f. anorg. Chem., *20*, 453 (1899).

composti molecolari con cationi complessi è tanto maggiore quanto più forte è l'elettroaffinità dell'anione e quanto più debole l'elettroaffinità del catione, cosicchè quest'ultimo presenta una grande capacità a rafforzarsi coll'unione di molecole neutre.

Nel caso dell'idrato di litio infatti, a differenza dell'idrato sodico, e maggiormente dell'idrato potassico, abbiamo un sale il quale è assai adatto alla probabile formazione di questi cationi complessi, presentando vicino all'anione monovalente OH, che per i metalli alcalini sappiamo essere un anione piuttosto forte, il debole catione Li.

Passando dall'idrato di litio agli idrati di sodio e di potassio, ossia aumentando l'elettroaffinità del catione, la tendenza a dare cationi complessi con molecole neutre va diminuendo, tanto che, mentre per il sodio si ottiene un solo composto con lo ioduro corrispondente, per il potassio non si ha formazione alcuna di composti.

In base a queste considerazioni è ora facile di prevedere che questa capacità a dare composti coi sali alogenati corrispondenti andrà sempre più diminuendo col passare agli omologhi del potassio, cioè al rubidio e al cesio, l'elettroaffinità dei quali è superiore a quella del potassio.

Questo comportamento dei sali di litio, a differenza dei corrispondenti sali degli altri metalli alcalini, è inoltre in accordo col fatto che il litio, come sappiamo, essendo il primo termine del primo gruppo del primo piccolo periodo, si discosta alquanto, nel modo di comportarsi, dagli altri metalli del suo gruppo, e presenta una grande analogia col primo termine del secondo gruppo del secondo piccolo periodo, il magnesio, del quale sono già noti alcuni cloruri basici.

Per ciò che si riferisce invece alla miscibilità allo stato solido, essa va aumentando dal litio al potassio e cioè in senso inverso alla tendenza a dare complessi. Essa va poi, come era prevedibile, diminuendo dai fluoruri agli ioduri ed è forte solo nei primi. Ciò sta in accordo col fatto ben noto che in varii solfati e silicati minerali l'atomo di Fl è spesso sostituito parzialmente col gruppo OH (es: apatite topazio).

Nel seguente quadro riassuntivo sono riportati i risultati delle coppie studiate in questa e nelle due Note precedenti. In esso, con V si indica la formazione di semplice eutettico; con X X, cristalli misti con lacuna; con X - X, cristalli misti in ogni rapporto.

		Fluoruri	Cloruri	Bromuri	Joduri
Idrati	Li	X X	$2LiOH \cdot 3LiCl$	$3LiOH \cdot LiBr$	$4LiOH \cdot LiJ$
	Na	X X	X X	V	$2NaOH \cdot 3NaJ$
	K	X - X	X X	V	V

CORRISPONDENZA

Il Presidente Blaserna presenta un piego suggellato, inviato dal prof. D. Lomonaco perchè sia conservato negli Archivi accademici.

E. M.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 novembre 1915.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

CORRISPONDENZA

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 15 gennaio 1916.* **N. 11.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 dicembre 1915.

Volume XXIV°. — Fascicolo 11°

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 dicembre 1915.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica celeste. — *Sul problema piano dei tre corpi. Forme esplicite (mista e canoniche) delle equazioni regolarizzate.* Nota II [1] del Socio T. LEVI-CIVITA [2].

7. — REGOLARITÀ.

Le equazioni canonico-euleriane del moto di S dipendono esclusivamente [cfr. § 8 della Nota M), pag. 246 di questo stesso volume] dalla funzione

$$H = \Theta - \frac{E}{U}, \tag{15}$$

col valore di Θ esplicitato nel § precedente.

Siamo *a priori* assicurati [3] che il sistema differenziale ha comportamento regolare *anche* nell'intorno d'un eventuale urto binario (una delle ρ nulla, e le altre due diverse da zero). Ne abbiamo conferma diretta nella *regolarità della* H *per tutti i valori finiti degli argomenti* p, Ω_ν, q, γ_ν, questi ultimi essendo coseni direttori, ossia legati dalla relazione $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$. Invero, le (11) mostrano intanto che, per $q > 0$, come (§ 2) va sempre ritenuto, può annullarsi una sola delle ρ (in corrispondenza al va-

[1] Cfr. Nota I, pp. 421-433.

[2] Pervenuta all'Accademia il 30 settembre 1915.

[3] R), pag. 74.

lore ± 1 della γ affetta dallo stesso indice). Con ciò, i rapporti $\frac{1}{U}, \frac{1}{\rho_\nu^2 U}$, nonchè $\frac{1}{\rho_{\nu+1}^2 \rho_{\nu+2}^2 U}$ $(\nu = 0, 1, 2)$, si comportano regolarmente, anche in prossimità di urti binarî; e, in virtù delle (28), (31), (15), lo stesso segue per H, c. d. d.

8. — Digressione su due vettori desumibili dalla funzione H.

Studiamo un po' i due vettori ω, Γ, le cui componenti (secondo gli assi $Ox_0\, x_1\, x_2$) sono

$$\omega_\nu = \frac{\partial H}{\partial \Omega_\nu} \quad , \quad \Gamma_\nu = -\frac{\partial H}{\partial \gamma_\nu} .$$

Sappiamo già [M), § 8] che ω è la velocità angolare, quello stesso vettore che ripetutamente figura nei §§ antecedenti; si tratta di renderne espressiva anche la dipendenza formale dagli elementi costitutivi della funzione H.

All'uopo premettiamo che, per essere identicamente

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_0^2{}_\nu\, \Omega_\nu\, \mathbf{u}_\nu ,$$

si ha, dalla (30),

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \Omega_\nu} = \gamma \wedge \mathbf{u}_\nu ;$$

quindi, in quanto $\mathfrak{S}$ è una dilatazione,

$$\frac{\partial H}{\partial \Omega_\nu} = \mathbf{u}_\nu \times \mathfrak{S}\boldsymbol{\Omega} + (\gamma \wedge \mathbf{u}_\nu) \times \mathfrak{S}\boldsymbol{X} = \mathbf{u}_\nu \times (\mathfrak{S}\boldsymbol{\Omega} + \mathfrak{S}\boldsymbol{X} \wedge \gamma) .$$

Il primo membro è, per definizione, la componente di ω secondo Ox_ν; l'ultimo membro si presenta come l'omologa componente del vettore $\mathfrak{S}\boldsymbol{\Omega} + \mathfrak{S}\boldsymbol{X} \wedge \gamma$. Perciò

$$\omega = \mathfrak{S}\boldsymbol{\Omega} + \mathfrak{S}\boldsymbol{X} \wedge \gamma . \tag{32}$$

In modo analogo segue, dalla (30),

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \gamma_\nu} = pq\, \mathbf{u}_\nu + \mathbf{u}_\nu \wedge \boldsymbol{\Omega} ,$$

talchè, per le (15) e (31),

$$\Gamma_\nu = -\frac{\partial H}{\partial \gamma_\nu} = -pq\, \mathbf{u}_\nu \times \mathfrak{S}\boldsymbol{X} - (\mathbf{u}_\nu \wedge \boldsymbol{\Omega}) \times \mathfrak{S}\boldsymbol{X} + \Gamma_\nu^\star ,$$

l'ultimo addendo rappresentando il contributo proveniente: sia dal termine

$-\frac{E}{U}$ (energia potenziale), sia dal fatto che anche l'operatore $\mathfrak{C}$ dipende dalle γ_ν.

I primi due addendi equivalgono complessivamente a

$$-\mathbf{u}_\nu \times (pq\mathfrak{C}X + \Omega \wedge \mathfrak{C}X),$$

ossia alle componenti Ψ_ν del vettore

$$\Psi = pq\mathfrak{C}X + \Omega \wedge \mathfrak{C}X, \tag{33}$$

prese con segno cambiato.

Quanto a Γ_ν^*, si vede subito:

1°) che l'energia potenziale dà luogo al contributo $-\frac{\partial}{\partial\gamma_\nu}\frac{E}{U}$;

2°) che, per tener conto dell'intervento delle γ_ν in $\mathfrak{C}$, giova porre

$$g = \frac{1}{8U\rho_0^2\rho_1^2\rho_2^2} \tag{34}$$

e scrivere Θ per disteso sotto la forma

$$\Theta = g\sum_0^2 \frac{1}{m_\nu}\rho_\nu^2(\Omega_\nu^2 + X_\nu^2), \tag{31'}$$

con che la derivazione dei coefficienti rapporto a γ_ν, tenute presenti le (11), porge

$$\frac{\partial \log g}{\partial\gamma_\nu}\Theta - \frac{2}{m_\nu}q^2\gamma_\nu(\Omega_\nu^2 + X_\nu^2).$$

Ne viene

$$\Gamma_\nu^* = -\frac{\partial}{\partial\gamma_\nu}\frac{E}{U} + \frac{\partial \log g}{\partial\gamma_\nu}\Theta - \frac{2}{m_\nu}q^2\gamma_\nu(\Omega_\nu^2 + X_\nu^2), \tag{35}$$

e quindi

$$\Gamma_\nu = \Psi_\nu + \Gamma_\nu^*, \tag{36}$$

essendo Ψ_ν le componenti del vettore (33) e le Γ_ν^* definite dalla (35).

9. — Equazioni canonico-euleriane.

Ecco ormai le equazioni del moto quali risultano dalla formula generale (I) [M), pag. 247]:

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} (\mathrm{I}_a) & \dfrac{dp}{d\tau} = -\dfrac{\partial H}{\partial q}\,, \quad \dfrac{dq}{d\tau} = \dfrac{\partial H}{\partial p}\,; \\ (\mathrm{I}_b) & \dfrac{d\Omega}{d\tau} = \mathfrak{M}\,; \\ (\mathrm{I}_c) & \dfrac{d\gamma}{d\tau} = \gamma \wedge \omega\,: \end{cases}$$

$\mathfrak{M}$ sta per

$$\boldsymbol{\Omega} \wedge \omega + \boldsymbol{\Gamma} \wedge \gamma ,$$

ω e $\boldsymbol{\Gamma}$ avendo le determinazioni specificate nel precedente §.

Una conseguenza delle (I), che va rilevata, è l'espressione della derivata del vettore ausiliario $\boldsymbol{X}$.

Si ha in primo luogo dalla (30), applicando materialmente le (I),

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{d\tau} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q} q\gamma + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p} p\gamma + pq(\gamma \wedge \omega) + (\gamma \wedge \omega) \wedge \boldsymbol{\Omega} + \gamma \wedge \mathfrak{M} .$$

Sostituendo poi per $\mathfrak{M}$ la sua espressione e badando alle due identità

$$\boldsymbol{\Omega} \wedge (\omega \wedge \gamma) + \omega \wedge (\gamma \wedge \boldsymbol{\Omega}) + \gamma \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \omega) = 0 ,$$
$$\gamma \wedge (\boldsymbol{\Gamma} \wedge \gamma) = \boldsymbol{\Gamma} - (\boldsymbol{\Gamma} \times \gamma)\, \gamma ,$$

nonchè, ancora una volta, alla (30), si trova subito

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \tau} = \left(p \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p} - q \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q}\right)\gamma + \boldsymbol{X} \wedge \omega + \boldsymbol{\Gamma} - (\boldsymbol{\Gamma} \times \gamma)\, \gamma . \tag{37}$$

10. — Interpretazione dell' integrale $\boldsymbol{\Omega} \times \gamma = \text{cost}$.

Sappiamo [M), § 10] che le equazioni (I) (oltre a comportare l'identità geometrica $\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1$) ammettono i due integrali:

$$\mathrm{H} = \text{cost} ,$$

che assume (§ 1) la specificazione

$$\mathrm{H} = 1 ,$$

e

$$\boldsymbol{\Omega} \times \gamma = \text{cost} .$$

Nella citata Nota M), abbiamo anche assegnato, dipendentemente dalla effettiva costituzione del sistema S quale aggregato di punti materiali, una condizione sotto cui l'integrale suddetto si interpreta quale integrale del momento delle quantità di moto rispetto all'asse (fisso) Oz (delle aree rispetto al piano Oxy). Nel caso presente non possiamo riportarci a condizioni di questo tipo, dacchè S è definito solo astrattamente (§ 1) per mezzo della forza viva e della funzione delle forze: esso proviene, per trasformazione di Darboux, dal sistema di tre punti materiali P_ν $(\nu = 0, 1, 2)$, che si attraggono secondo la legge di Newton e si muovono in un piano fisso.

Per l'interpretazione di $\Omega \times \gamma$, conviene quindi far capo al problema originario. All'uopo, riprendiamo anzitutto la definizione (14) delle Ω_ν, e esplicitiamo il prodotto scalare $\Omega \times \gamma$. Avremo

$$\Omega \times \gamma = \sum_0^2{}_\nu \frac{\partial T}{\partial \omega_\nu} \gamma_\nu .$$

Le derivate parziali $\frac{\partial T}{\partial \omega_\nu}$ vanno calcolate in base alle (2), (12), (10′) e (7). Le (12), (10′) e (7) dànno

$$\xi'_\nu = \xi_\nu \, q' + \xi_{\nu+1} \omega_{\nu+2} - \xi_{\nu+2} \omega_{\nu+1} ,$$

da cui

$$\xi'_{\nu+1} = \xi_{\nu+1} q' + \xi_{\nu+2} \omega_\nu - \xi_\nu \, \omega_{\nu+2} ,$$

$$\xi'_{\nu+2} = \xi_{\nu+2} q' + \xi_\nu \, \omega_{\nu+2} - \xi_{\nu+2} \omega_{\nu+1} ,$$

colle analoghe per $\eta'_\nu, \eta'_{\nu+1}, \eta'_{\nu+2}$.

Siccome T, a norma della (2), dipende da ω_ν pel tramite delle ξ', η', si ricava immediatamente

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_\nu} = \frac{\partial T}{\partial \xi'_{\nu+1}} \xi_{\nu+2} - \frac{\partial T}{\partial \xi'_{\nu+2}} \xi_{\nu+1} + \frac{\partial T}{\partial \eta'_{\nu+1}} \eta_{\nu+2} - \frac{\partial T}{\partial \eta'_{\nu+2}} \eta_{\nu+1} .$$

Sostituiamo in $\sum_0^2{}_\nu \frac{\partial T}{\partial \omega_\nu} \gamma_\nu$ e riportiamo in ciascun termine del sommatorio le derivate di T all'indice ν: per es., nel primo termine

$$\sum_0^2{}_\nu \frac{\partial T}{\partial \xi'_{\nu+1}} \xi_{\nu+2} \gamma_\nu ,$$

scambiamo ν in $\nu+2$, con che (tenuto conto che $\nu+3$ e $\nu+4$ si identificano rispettivamente con ν e $\nu+1$, e che all'indice ν basta far assumere tre valori consecutivi qualisivogliano) esso diviene

$$\sum_0^2{}_\nu \frac{\partial T}{\partial \xi'_\nu} \xi_{\nu+1} \gamma_{\nu+2} .$$

Procedendo nello stesso modo anche per gli altri tre termini, risulta

$$\Gamma \times \gamma = \sum_0^2{}_\nu \frac{\partial T}{\partial \omega_\nu} \gamma_\nu =$$

$$= \sum_0^2{}_\nu \left[\frac{\partial T}{\partial \xi'_\nu} (\xi_{\nu+1} \gamma_{\nu+2} - \xi_{\nu+2} \gamma_{\nu+1}) + \frac{\partial T}{\partial \eta'_\nu} (\eta_{\nu+1} \gamma_{\nu+2} - \eta_{\nu+2} \gamma_{\nu+1}) \right] .$$

Mercè le identità

$$\xi_\nu = \eta_{\nu+1} \gamma_{\nu+2} - \eta_{\nu+2} \gamma_{\nu+1} ,$$

$$\eta_\nu = - (\xi_{\nu+1} \gamma_{\nu+2} - \xi_{\nu+2} \gamma_{\nu+1})$$

[che conseguono dalle (7) e dalla ortogonalità dei vettori α, β, γ] si ha infine

$$\Gamma \times \gamma = \sum_0^2{}_\nu \left(\xi_\nu \frac{\partial T}{\partial \eta'_\nu} - \eta_\nu \frac{\partial T}{\partial \xi'_\nu} \right).$$

Trasformiamo ulteriormente il secondo membro, facendovi apparire, al posto delle ξ_ν, η_ν, e loro derivate, le componenti x_ν, y_ν dei lati del triangolo dei tre corpi, colle derivate relative. Già abbiamo ricordato, al § 1, che si ha

$$x_\nu + i y_\nu = (\xi_\nu + i \eta_\nu)^2,$$

da cui, derivando rapporto a τ,

$$x'_\nu + i y'_\nu = 2 (\xi_\nu + i \eta_\nu)(\xi'_\nu + i \eta'_\nu);$$

e, moltiplicando membro a membro per

$$x_\nu - i y_\nu = (\xi_\nu - i \eta_\nu)^2,$$

si ricava, in base alla definizione (3) di ρ_ν^2,

$$(x_\nu - i y_\nu)(x'_\nu + i y'_\nu) = 2 \rho_\nu^2 (\xi_\nu - i \eta_\nu)(\xi'_\nu + i \eta'_\nu).$$

L'eguaglianza dei coefficienti di i nei due membri porge

$$x_\nu y'_\nu - y_\nu x'_\nu = 2 \rho_\nu^2 (\xi_\nu \eta'_\nu - \eta'_\nu \xi'_\nu).$$

Siccome la variabile τ del problema trasformato è legata al tempo t del problema originario dei tre corpi dalla relazione differenziale

$$dt = \frac{d\tau}{\mathrm{U}},$$

così, moltiplicando l'identità testè stabilita per $m_\nu^* \mathrm{U}$, e designando con un punto sovrapposto le derivate rispetto a t, otteniamo

$$m_\nu^* (x_\nu \dot{y}_\nu - y_\nu \dot{x}_\nu) = 2 \mathrm{U} m_\nu^* \rho_\nu^2 (\xi_\nu \eta'_\nu - \eta_\nu \xi'_\nu),$$

che, in causa della (2), può essere scritta

$$m_\nu^* (x_\nu \dot{y}_\nu - y_\nu \dot{x}_\nu) = \tfrac{1}{2} \left(\xi_\nu \frac{\partial T}{\partial \eta'_\nu} - \eta_\nu \frac{\partial T}{\partial \xi'_\nu} \right).$$

La precedente espressione di $\Omega \times \gamma$ assume così l'aspetto

$$\Omega \times \gamma = 2 \sum_0^2{}_\nu \, m_\nu^* (x_\nu \dot{y}_\nu - y_\nu \dot{x}_\nu).$$

Il sommatorio del secondo membro si può manifestamente risguardare come componente secondo l'asse Oz, perpendicolare al piano dei tre corpi, del vettore

$$\mathbf{K} = \sum_0^2{}_\nu \mathbf{r}_\nu \wedge m_\nu^* \dot{\mathbf{r}}_\nu ,$$

essendo

$$\mathbf{r}_\nu = \mathrm{P}_{\nu+2} - \mathrm{P}_{\nu+1} \qquad (\nu = 0\,,1\,,2).$$

Ora è facile stabilire, in generale (qualunque sia il moto, anche non piano, dei tre corpi), che il vettore **K** suddetto si identifica col momento risultante delle quantità di moto: nè occorre specificare il polo, poichè, ritenendosi fisso il baricentro dei tre corpi, è nulla la risultante delle loro quantità di moto.

Per la dimostrazione, basta sfruttare le relazioni che intercedono fra i vettori $\mathbf{r}_\nu$, rappresentativi dei lati del triangolo $P_0P_1P_2$, e i raggi vettori

$$\mathrm{P}_\nu - \mathrm{O} = \mathbf{R}_\nu ,$$

che riterremo *baricentrali*, immaginando assunta nel baricentro l'origine O degli assi fissi di riferimento.

Si ha anzitutto

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{R}_{\nu+2} - \mathbf{R}_{\nu+1} ;$$

quindi, sostituendo in **K**,

$$\mathbf{K} = \sum_0^2{}_\nu \mathbf{R}_{\nu+2} \wedge m_\nu^* \dot{\mathbf{r}}_\nu - \sum_0^2{}_\nu \mathbf{R}_{\nu+1} \wedge m_\nu^* \dot{\mathbf{r}}_\nu .$$

Cambiando, nella prima sommatoria, ν in $\nu+1$, e, nella seconda, ν in $\nu+2$ (in modo da riportare in entrambe il vettore **R** all'indice ν), si ottiene

$$\mathbf{K} = \sum_0^2{}_\nu \mathbf{R}_\nu \wedge (m_{\nu+1}^* \dot{\mathbf{r}}_{\nu+1} - m_{\nu+2}^* \dot{\mathbf{r}}_{\nu+2}) .$$

Ciò posto, si ricordi [R), § 3] che

$$m_\nu \mathbf{R}_\nu = m_{\nu+1}^* \mathbf{r}_{\nu+1} - m_{\nu+2}^* \mathbf{r}_{\nu+2}$$

e si derivi rapporto a t. La sostituzione in **K** porge

$$\mathbf{K} = \sum_0^2{}_\nu \mathbf{R}_\nu \wedge m_\nu \dot{\mathbf{R}}_\nu ,$$

che è appunto il momento risultante delle quantità di moto dei tre punti P_ν rispetto ad O, c. d. d.

Concludiamo che

$$\Omega \times \gamma = 2\mathrm{K}_z = \mathrm{cost}$$

non è altro che l'integrale delle aree dell'originario problema piano dei tre corpi.

11. — Angoli di Eulero – Interpretazione intrinseca.

Dacchè (§ 2) le configurazioni di S sono in corrispondenza biunivoca coll'insieme (q, orientazione del corpo C), possiamo assumere a coordinate lagrangiane del sistema la stessa q e i tre angoli di Eulero ϑ, φ, ψ, che individuano l'orientazione della terna $Ox_0 x_1 x_2$ solidale con C.

Dalle note espressioni dei coseni direttori, avvertendo che (per la convenzione fatta di riguardare equivalenti gli indici congrui fra loro rispetto al modulo 3) l'indice zero corrisponde a quello abitualmente designato con 3, si ha

$$(38) \qquad \gamma_1 = \sin\vartheta \sin\varphi \quad , \quad \gamma_2 = \sin\vartheta \cos\varphi \quad , \quad \gamma_0 = \cos\vartheta \, ;$$

inoltre

$$\alpha_0 = \sin\vartheta \sin\psi \quad , \quad \beta_0 = -\sin\vartheta \cos\psi \, ,$$

le quali, complessivamente, dànno luogo ad una interpretazione dei parametri ϑ, φ, ψ in relazione diretta col triangolo dei tre corpi.

Per quanto concerne ϑ e ψ, vi si perviene, ricordando (§ 1) che le componenti x_0, y_0 del vettore $P_2 - P_1$ sono legate alle corrispondenti ξ_0, η_0 dalle equazioni

$$x_0 = \xi_0^2 - \eta_0^2 \quad , \quad y_0 = 2\xi_0 \eta_0 \, ,$$

le quali, per le (7) e per le espressioni surriferite di α_0, β_0, si scrivono

$$x_0 = -q^2 \sin^2\vartheta \cos 2\psi \quad , \quad y_0 = -q^2 \sin^2\vartheta \sin 2\psi \, .$$

Da queste apparisce che $\sin^2\vartheta = \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{q^2}$ *si identifica col rapporto fra il lato* $\overline{P_1P_2}$ *e il semiperimetro* q^2 (cfr. § 2) *del triangolo dei tre corpi, mentre* 2ψ *misura l'inclinazione dello stesso lato, più precisamente del vettore* $P_1 - P_2$ *sull'asse delle ascisse*: si intende che si tratta di inclinazione contata, al pari delle anomalie, positivamente nel senso $Ox \longrightarrow Oy$.

Il significato dell'angolo φ risulta poi ovviamente dalle (11) e (38). Si ha infatti dalle (11)

$$\gamma_\nu^2 = \frac{q^2 - \rho_\nu^2}{q^2} \qquad (\nu = 0, 1, 2) \, ,$$

donde in particolare

$$\frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} = \frac{q^2 - \rho_1^2}{q^2 - \rho_2^2} \, .$$

Se ne desume, badando alle (38), che $\mathrm{tg}^2 \varphi$ *fornisce il rapporto fra gli eccessi del semiperimetro* q^2 *sui due lati* $\overline{P_0 P_2}$, $\overline{P_0 P_1}$.

12. — Prima forma canonica pura.

Le equazioni del moto del sistema S si possono naturalmente presentare anche nella tipica forma hamiltoniana, assumendo come funzioni incognite [anzichè le $q, \gamma_\nu, p, \Omega_\nu$ delle (I)] quattro coordinate lagrangiane e le loro coniugate.

Assumeremo per coordinate $q, \vartheta, \varphi, \psi$, ricordando, poichè ne avremo bisogno tra un momento, le classiche espressioni delle componenti della velocità angolare in funzione degli angoli di Eulero e loro derivate prime. Esse sono

$$
(39) \qquad \begin{cases} \omega_1 = \vartheta' \cos\varphi + \psi' \gamma_1, \\ \omega_2 = -\vartheta' \sin\varphi + \psi' \gamma_2, \\ \omega_0 = \psi' \gamma_0 + \varphi', \end{cases}
$$

le γ avendo, ben si intende, i valori (38).

Per introdurre le coniugate

$$
p, p_\vartheta, p_\varphi, p_\psi
$$

dei quattro parametri

$$
q, \vartheta, \varphi, \psi,
$$

conviene immaginare la forza viva T espressa mediante i parametri e loro derivate $q', \vartheta', \varphi', \psi'$; dopo di che

$$
p = \frac{\partial T}{\partial q'}, \quad p_\vartheta = \frac{\partial T}{\partial \vartheta'}, \quad p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \varphi'}, \quad p_\psi = \frac{\partial T}{\partial \psi'}.
$$

Una tale espressione di T si può risguardare proveniente dalla $T(q, \gamma_\nu; q', \omega_\nu)$ del § 4, intendendovi le γ_ν, ω_ν sostituite dai loro valori (38), (39). Dacchè in queste formule non c'è traccia di q', si vede, intanto, che la coniugata di q coincide colla p dei §§ antecedenti [definita dalla prima delle (14)].

Si ha poi

$$
p_\vartheta = \sum_0^2{}_\nu \frac{\partial T}{\partial \omega_\nu} \frac{\partial \omega_\nu}{\partial \vartheta'}, \text{ ecc.,}
$$

ossia, esplicitando in base alle (38) e ricordando la definizione (14) delle Ω_ν,

$$
(40) \qquad \begin{cases} p_\vartheta = \cos\varphi\, \Omega_1 - \sin\varphi\, \Omega_2, \\ p_\varphi = \Omega_0, \\ p_\psi = \gamma_0 \Omega_0 + \gamma_1 \Omega_1 + \gamma_2 \Omega_2 = \boldsymbol{\Omega} \times \gamma, \end{cases}
$$

le quali, risolute rapporto ad $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_0$, ove si ponga per brevità

$$\bar{\omega} = \frac{p_\psi - p_\varphi \cos\vartheta}{\sin\vartheta}, \tag{41}$$

dànno

$$\left\{\begin{aligned} \Omega_1 &= \quad p_\vartheta \cos\varphi + \bar{\omega}\sin\varphi, \\ \Omega_2 &= -p_\vartheta \sin\varphi + \bar{\omega}\cos\varphi, \\ \Omega_0 &= \quad p_\varphi. \end{aligned}\right. \tag{42}$$

Si ha ormai tutto quanto occorre per formare la funzione caratteristica H del sistema hamiltoniano negli otto argomenti

$$\begin{matrix} q, & \vartheta, & \varphi, & \psi, \\ p, & p_\vartheta, & p_\varphi, & p_\psi. \end{matrix}$$

Essa è notoriamente l'energia totale $T - \frac{E}{U}$, o, se si vuole,

$$H = \Theta - \frac{E}{U}, \tag{15}$$

in cui si abbia cura di fare apparire esclusivamente gli otto argomenti suindicati.

Ponendo mente all'espressione (31) di Θ [e considerando, ben si intende, le ρ_ν come date dalle (11), e le γ_ν dalle (38)], l'unica operazione che resti da fare è la sostituzione, in H, delle Ω_ν mediante le (42): va da sè che il vettore $\boldsymbol{X}$ deve preventivamente ritenersi espresso per $\boldsymbol{\Omega}$, a norma della (30).

Se si nota che nè l'espressione di H, da cui si parte, nè le (38), nè le (42) contengono esplicitamente ψ, si può anche affermare *a priori* che l'espressione finale di H sarà esente da ψ. Questa è dunque, come dicono gli inglesi, una coordinata ignorabile, e, dall'essere $\frac{\partial H}{\partial \psi} = 0$, segue che il sistema canonico di funzione caratteristica H ammette l'integrale

$$p_\psi = \text{cost}.$$

In virtù della terza delle (40), questo integrale non è che la nuova forma assunta dall'integrale delle aree

$$\boldsymbol{\Omega} \times \gamma = 2 K_z = \text{cost}.$$

Val la pena di notare che, in questo modo, può ritenersi automaticamente compiuta anche la riduzione del problema piano dei tre corpi a tre soli gradi di libertà, sfruttando i suoi tre integrali cardinali delle quantità di moto e delle aree. Infatti, nel problema trasformato, già si trova eseguita

la riduzione corrispondente ai due integrali delle quantità di moto. L'ulteriore abbassamento di un grado di libertà (da quattro a tre, cioè dall'ottavo al sesto ordine) si ha considerando, in H, la p_ψ come una costante arbitraria e limitando in conformità il sistema canonico di funzione caratteristica H alle tre coppie di variabili coniugate.

$$\begin{matrix} q\ , & \vartheta\ , & \varphi\ , \\ p\ , & p_\vartheta\ , & p_\varphi\ . \end{matrix}$$

Ulteriore conseguenza delle formule precedenti, di cui trarremo partito più avanti, è un'espressione vettoriale del binomio $p_\vartheta d\vartheta + p_\varphi d\varphi$. Per ricavarla, partiamoci dal prodotto

$$\gamma \wedge \boldsymbol{\Omega} \times d\gamma\,,$$

ossia dal determinante

$$\begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \Omega_0 & \Omega_1 & \Omega_2 \\ d\gamma_0 & d\gamma_1 & d\gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Sostituendovi i differenziali delle γ, coi loro valori derivanti dalle (38), si ha

$$d\vartheta \begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \Omega_0 & \Omega_1 & \Omega_2 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi \end{vmatrix} + d\varphi \begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \Omega_0 & \Omega_1 & \Omega_2 \\ 0 & \gamma_2 & -\gamma_1 \end{vmatrix},$$

da cui, sviluppando i due determinanti (secondo gli elementi della seconda riga) e badando ancora alle (38), viene

$$(\Omega_1 \cos\varphi - \Omega_2 \sin\varphi)\, d\vartheta + \{\Omega_0(1-\gamma_0^2) - \Omega_1\gamma_0\gamma_1 - \Omega_2\gamma_0\gamma_2\}\, d\varphi\,.$$

Ne risulta, in virtù delle (40),

$$\gamma \wedge \boldsymbol{\Omega} \times d\gamma = p_\vartheta\, d\vartheta + p_\varphi\, d\varphi - \gamma_0\, p_\psi\, d\varphi\,.$$

Isoliamo il binomio $p_\vartheta d\vartheta + p_\varphi d\varphi$, e notiamo che il $d\varphi$, fornito dalle (38),

$$d\varphi = \frac{\gamma_2\, d\gamma_1 - \gamma_1\, d\gamma_2}{1-\gamma_0^2}\,,$$

si può presentare sotto la forma

$$\frac{1}{1-\gamma_0^2} \begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ d\gamma_0 & d\gamma_1 & d\gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Dacchè 1, 0, 0 sono le componenti del vettore unitario $\mathbf{u}_0$, il determinante si identifica col prodotto

$$\gamma \wedge \mathbf{u}_0 \times d\gamma ,$$

e si ha infine

$$p_\vartheta \, d\vartheta + p_\varphi \, d\varphi = \gamma \wedge \mathbf{\Omega}^\star \times d\gamma , \tag{43}$$

essendosi posto per brevità

$$\mathbf{\Omega}^\star = \mathbf{\Omega} + \frac{\gamma_0}{1-\gamma_0^2} p_\psi \, \mathbf{u}_0 . \tag{44}$$

13. — Osservazione elementare di calcolo vettoriale.

Suppongasi che un vettore (incognito) **R** verifichi le due equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma \wedge \mathbf{R} = \mathbf{A} , \\ \gamma \times \mathbf{R} = a , \end{array} \right. \tag{45}$$

essendo assegnati i vettori γ ed **A**, e lo scalare a: si intende che γ ed **A** debbono ottemperare alla condizione

$$\gamma \times \mathbf{A} = 0 , \tag{46}$$

necessaria perchè possa sussistere la prima delle (45).

Vogliamo mostrare che, ritenuto $\gamma \neq 0$, risulta univocamente

$$\mathbf{R} = a\gamma + \mathbf{A} \wedge \gamma . \tag{47}$$

All'uopo basta rilevare:

1°) che l'espressione (47) di **R** soddisfa effettivamente alle (45)

2°) che non possono esistere altre soluzioni $\mathbf{R}^\star$ distinte dalla (47).

La prima verificazione è immediata, purchè si tenga conto, nel formare $\gamma \wedge \mathbf{R}$, che si ha identicamente

$$\gamma \wedge (\mathbf{A} \wedge \gamma) = \mathbf{A} - (\mathbf{A} \times \gamma) \gamma ,$$

e che l'ultimo termine è nullo, in virtù della (46).

Quanto all'unicità della soluzione, essa risulta dalla circostanza che la differenza $\mathbf{R} - \mathbf{R}^\star$, ove non fosse nulla, dovrebbe essere ad un tempo parallela e perpendicolare al vettore γ, per ipotesi $\neq 0$; parallela, perchè avrebbe nullo il prodotto vettoriale per γ; perpendicolare, perchè avrebbe nullo anche il prodotto scalare, c. d. d.

14. — Coordinate simmetriche – Seconda forma canonica.

La relazione delle posizioni di S coll'orientazione di un corpo rigido ci ha portati naturalmente ad assumere i tre angoli di Eulero ϑ, φ, ψ come altrettante coordinate lagrangiane del nostro sistema, la quaderna essendo completata da q. Questi parametri, pur avendo (§ 9) una stretta relazione col triangolo dei tre corpi, difettano di simmetria.

Si rimedia a questo inconveniente, conservando ψ e associandogli la terna

$$(48) \qquad \zeta_0 = q\gamma_0 \quad , \quad \zeta_1 = q\gamma_1 \quad , \quad \zeta_2 = q\gamma_2 \, ,$$

che, in base alle (38), risulta manifestamente costituita da combinazioni indipendenti di q, ϑ, φ.

Ove si risguardino le ζ_ν quali componenti (secondo gli assi mobili $Ox_0x_1x_2$) del vettore

$$(48') \qquad \zeta = q\gamma \, ,$$

si può dire che ψ e ζ (angolo e vettore completamente indipendenti) determinano in modo univoco la configurazione di S.

Le ζ_ν, in base alla loro definizione e alle (11), sono legate al triangolo dei tre corpi dalle relazioni semplicissime

$$(49) \qquad \zeta_\nu^2 = q^2\gamma_\nu^2 = q^2 - q^2(1-\gamma_\nu^2) = q^2 - \rho_\nu^2 = q^2 - r_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2);$$

esse rappresentano dunque, coi loro quadrati, i tre eccessi del semiperimetro sui lati.

Dalle (49), sommando, si trae

$$q^2 = \sum_0^2{}_\nu \, \zeta_\nu^2 \, ,$$

con che

$$(49') \qquad r_\nu = \rho_\nu^2 = q^2 - \zeta_\nu^2 = \zeta_{\nu+1}^2 + \zeta_{\nu+2}^2 \, .$$

Si è già osservato che le nuove coordinate ζ_ν sono combinazioni di q, ϑ, φ, esenti da ψ. Perciò, anche nel nuovo sistema, la coniugata p_ψ di ψ è quella di prima. Per assegnare le coniugate Z_ν delle nuove variabili ζ_ν, giova appoggiarsi sulla circostanza che la trasformazione fra le due sestuple $(q, \vartheta, \varphi; p, p_\vartheta, p_\varphi)$, (ζ_ν, Z_ν) deve risultare canonica e quindi verificare la condizione caratteristica

$$\sum_0^2{}_\nu \, Z_\nu \, d\zeta_\nu = p\, dq + p_\vartheta \, d\vartheta + p_\varphi \, d\varphi \, .$$

Il secondo membro, badando all' identità $\gamma \times \gamma = 1$ e alle (48') e (43), si scrive

$$\frac{1}{q}(pq\gamma \times \gamma\, dq + \gamma \wedge \Omega^\star \times q\, d\gamma) .$$

In entrambi i termini si può mettere in evidenza il fattore $d\zeta$. Infatti, a norma della (48'),

$$d\zeta = q\, d\gamma + \gamma\, dq ;$$

e quindi

$$\gamma \times d\zeta = \gamma \times \gamma\, dq ,$$

in virtù dell' identità $\gamma \times d\gamma = 0$; mentre, per la perpendicolarità fra $\gamma \wedge \Omega^\star$ e γ, segue

$$\gamma \wedge \Omega^\star \times d\zeta = \gamma \wedge \Omega^\star \times q\, d\gamma .$$

Ne consegue

$$\sum_0^2{}_\nu Z_\nu\, d\zeta_\nu = \frac{1}{q}(pq\gamma + \gamma \wedge \Omega^\star) \times d\zeta .$$

Eguagliando i coefficienti dei singoli $d\zeta_\nu$ nei due membri, si ricava la *espressione cercata delle* Z_ν: *esse si identificano con le componenti del vettore*

$$\frac{1}{q}(pq\gamma + \gamma \wedge \Omega^\star).$$

Compendiando a lor volta le Z_ν in un vettore $\boldsymbol{Z}$, si ha

$$\boldsymbol{Z} = \frac{1}{q}(pq\gamma + \gamma \wedge \Omega^\star) . \tag{50}$$

Non è questa ancora la forma che giova, per introdurre nella quadrica Θ gli argomenti $\boldsymbol{Z}, p_\psi$. Ma vi si arriva subito, ricordando le (30) e (44), che dànno

$$\boldsymbol{Z} = \frac{1}{q}\left(\boldsymbol{X} + \frac{\gamma_0\, p_\psi}{1 - \gamma_0^2}\, \gamma \wedge \mathbf{u}_0\right) ,$$

ossia

$$\boldsymbol{X} = q\boldsymbol{Z} - \frac{\gamma_0\, p_\psi}{1 - \gamma_0^2}\, \gamma \wedge \mathbf{u}_0 . \tag{51}$$

Coll' intesa che q e le γ_ν si risguardano funzioni delle ζ_ν a norma delle (48) [o (48')], la (51) ci porge l'espressione di $\boldsymbol{X}$ nelle variabili trasformate. Resta da procurarsi l'analoga espressione di Ω, dopodichè la trasformazione di Θ potrà ritenersi compiuta, in base alla (31).

Per ricavare Ω nella forma desiderata, basta associare l'equazione (50) all'ultima delle (40),

$$\gamma \times \Omega = p_\psi .$$

Assumendo provvisoriamente come incognita $\Omega^* = \Omega + \frac{\gamma_0 p\psi}{1-\gamma_0^2}\mathbf{u}_0$, le dette due equazioni si possono scrivere

$$\begin{cases} \gamma \wedge \Omega^* = q\mathbf{Z} - pq\gamma, \\ \gamma \times \Omega^* = p\psi + \frac{\gamma_0^2 p\psi}{1-\gamma_0^2} = \frac{1}{1-\gamma_0^2} p\psi . \end{cases}$$

Per la formula (47) del § precedente, ne ricaviamo

$$\Omega^* = \frac{p\psi}{1-\gamma_0^2}\gamma + q\mathbf{Z} \wedge \gamma,$$

da cui, riponendo per Ω^* il suo valore (44) e sostituendo, nel primo addendo, per γ, il trinomio $\gamma_0 \mathbf{u}_0 + \gamma_1 \mathbf{u}_1 + \gamma_2 \mathbf{u}_2$, risulta

$$\Omega = q\mathbf{Z} \wedge \gamma + \frac{p\psi}{1-\gamma_0^2}(\gamma_1 \mathbf{u}_1 + \gamma_2 \mathbf{u}_2). \tag{52}$$

15. — Coordinate asteroidiche - Terza forma canonica.

Per passare utilmente al caso-limite in cui una delle masse — diciamo m_0 — è trascurabile di fronte alle altre due, conviene abbandonare la simmetria rispetto a tutti i tre corpi, pur conservandola rispetto ai due di massa finita P_1, P_2. Appare all'uopo indicata una piccola modificazione della quaderna ζ_ν, ψ, consistente nel sostituire a ζ_1, ζ_2 le combinazioni ρ, φ definite da

$$\zeta_1 = \rho \sin\varphi \quad , \quad \zeta_2 = \rho \cos\varphi , \tag{53}$$

senza toccare nè ζ_0, nè ψ.

Il significato geometrico delle nuove variabili ρ, φ segue senz'altro dalle (48) e (49'). *L'angolo φ è ancora quello che figura nella terna euleriana* [essendo, per le (53) e (48), $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ proporzionali a γ_1, γ_2, con fattore di proporzionalità positivo]; *e $\rho^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2$ si identifica col lato $\rho_0^2 = r_0 = \overline{P_1 P_2}$*.

Quanto alle coordinate non trasformate, va da sè che la ψ è ancora uno degli argomenti euleriani, 2ψ rappresentando (§ 9) l'inclinazione del lato $P_2 P_1$ (nel verso da P_2 a P_1), mentre (§ 14) $\zeta_0 = \sqrt{q^2 - r_0}$.

Chiameremo *asteroidica* la quaderna ζ_0, ρ, φ, ψ.

Importa notare che, dalla prima delle (48), si ha

$$\zeta_0 = q\gamma_0 = q\cos\vartheta ,$$

e dalla prima delle (49)

$$\zeta_0^2 = q^2 - \rho_0^2 = q^2 - \rho^2 ,$$

donde, senza ambiguità, dacchè $\sin\vartheta > 0$,

$$\rho = q \sin\vartheta .$$

Ne consegue che la quaderna asteroidica differisce (non soltanto dalla simmetrica, ma anche) dalla prima quaderna di coordinate lagrangiane $q, \vartheta, \varphi, \psi$ per una semplice trasformazione binaria, e precisamente per la sostituzione della coppia

$$q \quad , \quad \vartheta$$

con

$$\zeta_0 = q\cos\vartheta \quad , \quad \rho = q\sin\vartheta .$$

Dacchè φ rimane inalterata e non interviene nelle nuove combinazioni ζ_0, ρ, rimarrà pure inalterata la coniugata p_φ: questa si identifica pertanto con Ω_0, a norma della terza delle (42). Del resto, considerando insieme le coniugate p_ρ, p_φ, le possiamo esprimere in termini delle variabili simmetriche ζ_1, ζ_2 e loro coniugate Z_1, Z_2, desumendole dalla condizione differenziale di canonicità (della trasformazione fra $\zeta_1, \zeta_2, Z_1, Z_2$ e $\rho, \varphi, p_\rho, p_\varphi$)

$$p_\rho d\rho + p_\varphi d\varphi = Z_1 d\zeta_1 + Z_2 d\zeta_2 .$$

Introducendo per $d\zeta_1, d\zeta_2$ i valori forniti dalle (53) ed eguagliando i coefficienti di $d\rho, d\varphi$ nei due membri, risulta

$$(54) \qquad \begin{cases} p_\rho = \sin\varphi\, Z_1 + \cos\varphi\, Z_2 , \\ p_\varphi = \rho(\cos\varphi\, Z_1 - \sin\varphi\, Z_2) , \end{cases}$$

da cui

$$(54') \qquad \begin{cases} Z_1 = \sin\varphi\, p_\rho + \dfrac{\cos\varphi}{\rho} p_\varphi , \\ Z_2 = \cos\varphi\, p_\rho - \dfrac{\sin\varphi}{\rho} p_\varphi . \end{cases}$$

Queste ultime formule, unitamente alle (53), esprimono in definitiva le due coppie coniugate $\begin{pmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{pmatrix}$ del sistema simmetrico, mediante le due del sistema asteroidico $\begin{pmatrix} \rho & \varphi \\ p_\rho & p_\varphi \end{pmatrix}$. Ove si trasformino per loro mezzo le (51), (52), sottointendendo ulteriormente che

$$(55) \qquad \begin{cases} q = \sqrt{\zeta_0^2 + \rho^2} \text{ (col valore aritmetico del radicale)}, \\ \gamma_0 = \dfrac{\zeta_0}{q} \quad , \quad \gamma_1 = \dfrac{\rho}{q}\sin\varphi \quad , \quad \gamma_2 = \dfrac{\rho}{q}\cos\varphi , \end{cases}$$

si è in grado di fare il calcolo effettivo della Θ, e quindi della funzione caratteristica H nelle nuove variabili.

Per avere in pronto tutti gli elementi del calcolo, trascriviamo qui appresso le espressioni di X e di Ω derivanti dalle (51), (52):

$$(56)\quad \begin{cases} X_0 = q Z_0 , \\ X_1 = \quad q \sin\varphi\, p_\rho + \frac{q}{\rho} \cos\varphi\, p_\varphi - \frac{\zeta_0}{\rho} \cos\varphi\, p_\psi , \\ X_2 = \quad q \cos\varphi\, p_\rho - \frac{q}{\rho} \sin\varphi\, p_\varphi + \frac{\zeta_0}{\rho} \sin\varphi\, p_\psi ; \end{cases}$$

$$(57)\quad \begin{cases} \Omega_0 = \qquad\qquad\qquad\qquad p_\varphi \\ \Omega_1 = -\rho \cos\varphi\, Z_0 + \zeta_0 \cos\varphi\, p_\rho - \frac{\zeta_0}{\rho} \sin\varphi\, p_\varphi + \frac{q}{\rho} \sin\varphi\, p_\psi , \\ \Omega_2 = \quad \rho \sin\varphi\, Z_0 - \zeta_0 \sin\varphi\, p_\rho - \frac{\zeta_0}{\rho} \cos\varphi\, p_\varphi + \frac{q}{\rho} \cos\varphi\, p_\psi . \end{cases}$$

Intesi che q va considerato come abbreviazione di $\sqrt{\zeta_0^2 + \rho^2}$, nei secondi membri compariscono, come si richiede per la sostituzione in H, soltanto coordinate asteroidiche e coniugate relative.

Fisica matematica. — *Campi elettromagnetici dipendenti da una solo coordinata.* Nota del Corrispondente O. TEDONE.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Alotrichite di Rio (isola d'Elba).* Nota del Corrispondente FEDERICO MILLOSEVICH.

Alla numerosa serie di solfati noti come provenienti dai giacimenti ferriferi dell' isola d'Elba, quali la melanterite, la copiapite, la fibroferrite, la glockerite (?), la jarosite, la calcantite, la lettsomite (?), il gesso, l'epsomite, l'allumogeno ecc. ecc., posso aggiungere ora anche l'alotrichite da me recentemente osservata.

Questa specie si presenta in due campioni della collezione Foresi appartenente al Museo mineralogico di Firenze, i quali portano nell' antica etichetta la denominazione di solfato d'alluminio e la provenienza « Rio » senza maggiore specificazione. Non sono quindi in grado di dire con esattezza da quale dei giacimenti dei dintorni di Rio provengano: se per esempio, come parrebbe probabile, da Vigneria, o dalla Trincera presso le Cavacce, che sono, come è noto, le zone più ricche in solfati.

Il suo aspetto è di masserelle abbastanza compatte, a struttura fibrosa, costituite da fibre con andamento all'incirca parallelo. Esternamente la massa è ricoperta da uno straterello di alterazione pulvurulento e di color giallo-terra molto chiaro; ma all'interno le fibre sono bianche, o di un bianco appena azzurrognolo con perfetta lucentezza sericea. Con facilità si possono isolare, dalla massa, delle fibre lunghe fin 4 cm., pieghevoli ed abbastanza elastiche.

La durezza del minerale è circa 2,5.

Il suo peso specifico, determinato col picnometro in olio a temperatura di 14°, è 1,901.

L'estinzione nelle fibre, osservata al microscopio, in alcune si presenta parallela, in altre un po' obliqua rispetto alla direzione di allungamento.

Il minerale ha sapore astringente. Si scioglie bene nell'acqua; benissimo nell'acqua acidulata.

Saggi quantitativi rivelano la presenza di acido solforico, allumina, ferro (in gran parte sotto forma di sale ferroso) e acqua.

Si trovano anche tracce indosabili di calcio.

L'analisi quantitativa diede i seguenti risultati:

SO_3	35,40
Al_2O_3	11,97
Fe_2O_3	0,67
FeO	7,49
CaO	tracce
H_2O	43.80
	99,33

I dati dell'analisi corrispondono abbastanza bene a quelli calcolati per la formola dell'allume di ferro, $FeSO_4 \cdot Al_2(SO_4)_3 + 24\,H_2O$, che sarebbero i seguenti:

SO_3	34,54
Al_2O_3	11,03
FeO	7.78
H_2O	46,65
	100,00

L'eccesso di SO_3 si spiega ammettendo che vi sieno, come impurità, solfato ferrico, solfato di alluminio e solfato di calcio.

Il difetto di acqua può imputarsi a parziale disidratazione, che in ambiente secco avviene anche a temperatura ordinaria.

I campioni del minerale, da me osservati, sono accompagnati da pirite in piccoli cristalli e da scaglie di ematite.

Fra le alotrichiti note nella scienza, questa di Rio, per l'aspetto esterno ed anche per le poche proprietà fisiche che furono potute determinare, si accosta, più che alle altre, a quella di Tierra Amarilla presso Copiapò (Cile) [1], anch'essa originata dalla alterazione di materiali piritosi.

Meno somiglia invece al materiale di origine vulcanica, che ha la stessa composizione chimica, scoperto da A. Scacchi [2] tra i prodotti della solfatara di Pozzuoli e da lui chiamato alotrichina: questo, nei campioni che ho potuto osservare, si presenta in fibre più corte e più esili, costituenti piuttosto una specie di feltro cristallino che non una massa relativamente compatta a struttura fibrosa subparallela.

Alotrichiti di origine vulcanica furono descritte da Bellini [3] per la grotta dello Zolfo a Miseno, e recentemente da Panichi [4] per i Faraglioni di Vulcano. A questo proposito è opportuno di notare che le mie osservazioni intorno alla variabilità dell'angolo di estinzione nell'alotrichite di Rio confermano le analoghe osservazioni sul minerale dei Faraglioni di Vulcano fatte da Panichi, il quale crede probabile che l'angolo di estinzione nelle alotrichiti sia variabile insieme col loro contenuto di ferro e forse anche di acqua.

Meccanica. — *Profili di pelo libero in canali di profondità finita.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

L'applicazione sistematica del criterio adottato da lord Rayleigh per dare una esauriente giustificazione teorica del fenomeno della *onda solitaria* [5] si è già mostrato parecchie altre volte utile nella trattazione approssimata di moti ondosi o, più generalmente, di questioni riguardanti moti fluidi laminari che, avendo sede in piani verticali, sono strettamente connessi alla gravità [6].

[1] Linck G., *Beitrag zur Kenntniss der Sulfate von Tierra Amarilla bei Copiapò in Chile.* Zeitschr. f. Kryst. *15*, 1889, pag. 1.

[2] Scacchi A., *Memorie geologiche della Campania.* Napoli, Rend. Acc. sc., *9*, 1850, pag. 84.

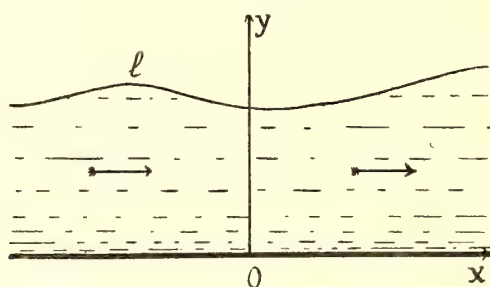
[3] Bellini R., *La grotta dello zolfo nei campi Flegrei.* Roma, Boll. Soc. geol. ital., *20*, 1901, pag. 470.

[4] Panichi U., *Contributo allo studio dei minerali dell'isola di Vulcano.* Roma, Mem. Soc. XL, (ser. 3ª), *19*, pag. 3.

[5] Scientific papers, vol. I, pag. 256.

[6] Cisotti, *Sopra il regime permanente nei canali a rapido corso* [questi Rendiconti, vol. XX (1911), pag. 633; oppure Zeitschrift für Math. und Phys., B. 61 (1912), pag. 76]; *Sopra l'efflusso a stramazzo* [questi Rend., vol. XXI (1912), pag. 97]; *Sull'efflusso di un liquido pesante da un orificio circolare* [questi Rend., vol. XXIII (1914), pag. 324]; *Nuovi tipi di onde periodiche permanenti e rotazionali* [questi Rendiconti, vol. XXIII, pag. 556; ibid., vol. XXIV (1915), pag. 129; oppure Nuovo Cimento, vol. XI (1915), pag. 242].

Mi si conceda di esporre un'altra applicazione del medesimo criterio, allo scopo di assegnare le varie forme che il profilo del pelo libero può assumere in canali rettilinei di profondità finita.

Si supponga, al solito, che il moto avvenga regolarmente e senza vortici, per piani verticali paralleli e, in uno generico di essi, entro una striscia limitata da una retta orizzontale indefinita (fondo del canale) e da una linea l (pelo libero) pure indefinita (vedi figura).

Sieno: q la portata, che si suppone costante; g l'accelerazione di gravità. Si può mettere in rilievo che — entro limiti convenienti — sono possibili infinite forme del pelo libero e soddisfacenti a tutte le debite condizioni dinamiche. Esse rientrano analiticamente nel tipo seguente (il sistema di riferimento è indicato in figura):

$$F(y , \eta) = 0 ,$$

dove si è posto

$$\eta = x + \left(\frac{gy^2}{q} - \frac{q}{y}\right) t ,$$

e F rappresenta una funzione arbitraria degli argomenti indicati, mentre t rappresenta il tempo; si è naturalmente assunta eguale ad 1 la densità del liquido.

Questa circostanza, che mi sembra degna di rilievo, mi permetterò di discutere in seguito. Per ora mi limito a segnalarla e a giustificarla.

1. Per essere il moto regolare ed irrotazionale, esisteranno due funzioni

$$\varphi(x , y ; t) \qquad \text{(potenziale di velocità)},$$

$$\psi(x , y ; t) \qquad \text{(funzione di corrente)},$$

armoniche e regolari nella striscia, e legate tra loro dalle relazioni differenziali

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} .$$

Scende da queste che, posto

$$z = x + iy \quad , \quad f = \varphi + i\psi ,$$

f è funzione della variabile complessa z (oltre che di t); scriveremo pertanto

$$(1) \qquad \varphi + i\psi = f(z\,;t) = f(x + iy\,;t) .$$

Le condizioni al contorno provengono dall'esprimere:

a) che tanto il fondo del canale, quanto il pelo libero l, sono linee di flusso;

b) che la linea l è pelo libero, cioè lungo essa la pressione deve essere costante (ed eguale alla pressione atmosferica).

Alla prima di queste condizioni si soddisfa esprimendo, notoriamente, che tanto sul fondo, quanto sul pelo libero, la funzione di corrente ψ deve avere valori costanti. Si assuma

$$(2) \qquad \psi = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad y = 0 , \\ q & \text{sopra} \quad l ; \end{cases}$$

con ciò viene messo in evidenza che q è la portata della corrente.

Per soddisfare alla condizione *b*), ricordiamo che, posto

$$V^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 ,$$

le equazioni idrodinamiche di Eulero si compendiano nell'unica relazione (la densità essendo $= 1$)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + gy + p = \text{funzione della sola } t ,$$

dove p designa la pressione.

Sopra l dev'essere p costante: dunque

$$(3) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + gy = \text{funzione della sola } t, \text{ sopra } l .$$

Le (2) e la (3) esauriscono le condizioni al contorno.

2. Per soddisfare a queste condizioni, conviene partire dalla (1) e, applicando l'artificio di lord Rayleigh, sviluppare la $f(x + iy\,;t)$ in serie di Taylor, rispetto alle potenze di y.

Si avrà

$$\varphi + i\psi = f(x\,,t) + i\,y\,\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{y^2}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cdots$$

Ora, poichè, per la prima delle condizioni (2), la f dev'essere reale per z reale, avremo, separando nella precedente la parte reale dalla parte immaginaria,

$$(4) \qquad \begin{cases} \varphi = f - \dfrac{y^2}{2} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cdots, \\ \psi = y \dfrac{\partial f}{\partial x} + \cdots, \end{cases}$$

dove, s' intende, la f e le sue derivate dipendono, in generale, oltre che dalla variabile x, anche dal tempo t.

È lecito sfruttare le (4) tutte le volte si possa, sia pure *a posteriori*, legittimarne l' uso, per ciò che concerne la convergenza e la derivabilità delle serie ivi indicate [1],

Supponiamo che di ciascuna delle serie (4) si possano trascurare i termini seguenti il primo.

Si ha allora

$$(5) \qquad \begin{cases} \varphi = f, \\ \psi = y \dfrac{\partial f}{\partial x}. \end{cases}$$

Notiamo che la condizione al fondo è soddisfatta, qualunque sia la funzione $f(x\,;t)$. Rimangono le due condizioni sul pelo libero: la seconda delle (2) e la (3). Tenendo presenti le (5), tali condizioni si possono esprimere nel modo seguente:

$$(6) \qquad \begin{cases} y \dfrac{\partial f}{\partial x} = q, \\ \dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + gy = \text{funzione della sola } t, \\ \qquad (\text{sopra } l). \end{cases}$$

La eliminazione della f tra queste, fornisce un'unica relazione tra la y, x e t, che definisce ad ogni istante la forma del pelo libero l.

3. Eliminando in quest' ultima la $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, a mezzo della prima, si ottiene:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{y^2} + gy = \text{funzione della sola } t.$$

[1] Cfr., a tale proposito, Levi-Civita, *Sulla espressione del resto in una operazione funzionale usata da lord Rayleigh* [questi Rend., vol. XX (1911), pp. 605 e segg.].

Derivando rispetto ad x e tenendo conto della prima delle (6) nell'eliminazione della $\frac{\partial^2 f}{\partial t\, \partial x}$, si ottiene infine:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \left(\frac{q}{y} - \frac{gy^2}{q}\right)\frac{\partial y}{\partial x} = 0 . \tag{7}$$

È questa l'equazione differenziale del pelo libero l.

Come si vede, si tratta di un'equazione a derivate parziali del primo ordine, la quale contiene esplicitamente la funzione incognita.

La sua integrazione rientra notoriamente nella teoria generale delle equazioni del tipo accennato; l'integrale generale si ha subito, ponendo

$$\eta = x + \left(\frac{gy^2}{q} - \frac{q}{y}\right) t \tag{8}$$

ed uguagliando a zero una funzione arbitraria F dei due argomenti y ed η:

$$F(y\,,\eta) = 0 \quad (^1). \tag{9}$$

Rimarrebbe ora da rendersi conto delle circostanze secondo cui sono applicabili i risultati ottenuti.

E di ciò in una prossima Nota.

(¹) Infatti, posto per un momento

$$Y = \frac{q}{y} - \frac{gy^2}{q} ,$$

la (7) può scriversi

$$\frac{\partial y}{\partial t} + Y \frac{\partial y}{\partial x} = 0 . \tag{7'}$$

Considerando la y definita in modo implicito da una relazione

$$F(y\,, x\,, t) = 0 ,$$

con che

$$\frac{\partial y}{\partial t} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} ,$$

la (7′) diviene

$$\frac{\partial F}{\partial t} + Y \frac{\partial F}{\partial x} = 0 , \tag{7''}$$

la quale equivale, notoriamente, al sistema differenziale ordinario

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{Y} = \frac{dy}{0} ,$$

nel senso che l'integrale generale di (7″) ha la forma

$$F(f_1\,, f_2) ,$$

essendo $f_1 =$ costante, $f_2 =$ costante due integrali indipendenti del sistema differenziale precedente. È manifesto che $y =$ costante è uno, e allora $x - tY$ è un altro; c. d. d.

Storia della matematica. — *Sulle scoperte di Pietro Mengoli.* Nota I di Giovanni Vacca, presentata dal Socio V. Volterra.

I. Le opere di Pietro Mengoli [1], scolaro di Bonaventura Cavalieri, furono poco apprezzate e poco lette fino ai nostri giorni, sebbene vi sia stato chi seppe trar profitto dall'opera sua e dalle sue fatiche, senza riconoscere, anzi cercando di nascondere la fonte a cui attinse.

Vi sono alcuni teoremi che meritano di portare il nome del loro primo scopritore Pietro Mengoli; ed io spero che questo breve scritto potrà persuadere gli studiosi imparziali e sinceri a tributare il dovuto omaggio ad un matematico italiano il quale, se non fu tra i primi, pur fece *qualche cosa.*

Le opere di Pietro Mengoli, descritte dal Riccardi [2], delle quali parlerò, sono:

1. *Novae quadraturae arithmeticae, seu de additione fractionum,* Bononiae, 1650, 8 fol. n. n., pp. 130. in-8°.

2. *Via regia ad mathematicas . . . ,* Bononiae, 1655, 64 pp., in-8°.

3. *Geometria speciosa. Geometriae speciosae elementa,* Bononiae, Ferroni, 1659, pp. 80, 392, in-8°.

4. *Circolo del Mengoli,* Bologna, 1672. 4 fol. n. n., pp. 60, in-8°.

5. *Anno di Pietro Mengoli,* Bologna, 1673, fol. 12 n. n., pp. 280, in-8°.

6. *Arithmeticae rationalis elementa quatuor,* Bononiae, 1674, pp. 64, in-8°.

Queste opere si trovano nelle principali biblioteche italiane. Converrà inoltre osservare che esse furono conosciute e studiate dal Collins in Inghilterra, il quale le ebbe forse dal Wallis per mezzo del Borelli [3]; di un'altra copia, esistente in Germania, si parla nella corrispondenza di Huygens [4]; Leibniz ammise di conoscerle, come poi si dirà. Infine una copia di queste opere si trovava nella Biblioteca dell'Università di Lovanio, ora distrutta, e fu appunto questa la copia che io ebbi occasione di studiare per la prima volta ne' primi giorni di settembre del 1910.

[1] Pietro Mengoli, nato in Bologna nel 1625, morì in Bologna il 7 giugno 1686. Oltrechè di matematica, scrisse pure una importante opera sulla musica, ricordata con lode dagli storici della musica, intitolata: *Speculazioni di musica,* Bologna, 1670, 295 pp. in 8°.

[2] P. Riccardi, *Bibliot. mathematica.*

[3] Cfr. G. Eneström, *Zur Geschichte der Unendlichen Reihen in die Mitte des siebzehnten Jahrhunderts,* Bibl. mathematica, 1912, vol. 12°, ser. 3ª, pp. 135-148.

[4] Huygens, *Oeuvres,* tomo 3, pag. 433; lettera di G. Schott a Chr. Huygens, 28 dicembre 1661: « Est hîc qui ex ultimis nundinis Francofurtensibus huc attulit...... « *Elementa Geometriae speciosae et Geometria speciosa.....* ».

II. La più importante di queste opere è senza dubbio la prima, del 1650; dal che si può concludere che il Mengoli (il quale fu, com'egli dice, priore di S. Maddalena, professore di meccaniche nel collegio dei nobili di Bologna, filosofo collegiato, dottor di leggi), non continuò che per breve tempo nell'indirizzo ricevuto dal suo maestro.

Come notò recentemente G. Eneström [1], e come aveva notato lo stesso Mengoli [2], è nella prefazione all'opera stessa che sono contenute importanti scoperte. Converrà quindi riferirne qualche passo [3].

« Meditanti mihi persaepe Archimedis parabolae quadraturam, propter- « quam infinita triangula in continue quadrupla proportione existentia certos « limites quantitatis non excedunt, occurrit universalis illa quadratura « eiusdem argumenti occasione a geometris demonstrata, qua magnitudine « infinitae continuam quamlibet proportionem maioris inaequalitatis possi- « dentes in praefinitas homogeneas quantitates colliguntur. Admirabile sane « theorema, cuius contemplatione in eam quaestionem inductus sum, utrum « magnitudines ea quacunque lege dispositae, ut aliqua possit assumi minor « qualibet proposita, vel ut deficientes in infinitum evanescant, infinitae « compositae omnem propositam quantitatem valeant superare . . . ».

Pervenuto così all'idea generale di serie il cui termine generale tende a zero, il Mengoli continua enunciando [4] e dimostrando che le frazioni

$$\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{9}\cdots$$

« in infinitum dispositae et aggregatae, infinitam extensionem valent implere »; ovvero le stesse frazioni « superant quamlibet propositam quantitatem ».

La dimostrazione è semplice, come appare dalle sue stesse parole:

« Sit, exempli gratia, numerus assignatus 4, et sumantur a ternario « quatuor continue proportionales in subtripla, 3, 9, 27, 81, quorum summa « 120; igitur sumptae fractiones in multitudine numeri 120 superant assi- « gnatum numerum 4, nam prime tres superant . . . unitatem, novem dein- « ceps . . . superant unitatem; et propter eamdem demonstrationem [che è « qui inutile di riprodurre, perchè è oggi classica ed evidente], 27 et 81 « subsequentes singulas unitates superabunt ».

[1] op. cit., pag. 138.

[2] *Geometria speciosa*, pag. 363.

[3] *Novae quadraturae arithmeticae, praefatio.*

[4] È singolare come l'Eneström, nell'art. cit., pag. 136, non renda giustizia a Mengoli, pretendendo che nello scritto del Mengoli manchi la *conclusione* (*Schlussfolgerung*). Essa c'è, e più volte ripetuta. È veramente ingiusto, dopo aver letto il Mengoli, l'attribuire ancora a Giacomo Bernoulli il merito di aver enunciato per il primo nel 1689, la la divergenza della serie armonica.

Da questo primo teorema, che è cioè infinita la somma della serie armonica, il Mengoli trae due corollarî.

« Primum, quod eadem dispositio, a quocumque ordinetur principio, in « infinitum extenditur; utpote si dispositarum fractionum prima sit $\frac{1}{5}$, et « aliae deinceps adhuc ipsam dispositionem $\frac{1}{5}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{9}$ &c. propositum « quemvis numerum superare posse: finitum enim est aggregatum ex iis, « quae sunt omissae $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}$, et finiti ab infinito subtractio finitum relin- « quere non potest ».

L'altro corollario è che è parimenti infinita la somma dei reciproci di qualsivoglia progressione aritmetica.

Essendo infatti b e c due interi positivi, se la serie, il cui termine generale è $\frac{1}{b+nc}$, si confronta colla serie il cui termine generale è $\frac{1}{b+n}$, cioè la serie armonica a partire dal termine $\frac{1}{b}$, il rapporto di due termini corrispondenti delle due serie è maggiore di $\frac{1}{c}$, dal che segue che non si può assegnare nessun valore finito alla serie $\sum \frac{1}{b+nc}$, poichè questo valore, moltiplicato per c, supererebbe la somma della serie $\sum \frac{1}{b+n}$, il che è assurdo.

III. Il Mengoli procede poi ad esaminare le somme dei reciproci dei numeri triangolari

$$\frac{1}{3}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{21}\ \frac{1}{28}\ \text{ecc.}$$

e trova che « propositae fractiones aggregatae infinitae sunt aequales unitati ».

Poi continua dicendo:

« Ab huius fractionum dispositionis contemplatione feliciter expeditus, « ad aliam progrediebar dispositionem in qua singulae unitates numeris qua- « dratis denominantur. Haec speculatio fructus quidem laboris rependit, non- « dum tamen affecta est solvendo, sed ingenii ditioris postulat adminiculum, « ut praecisam dispositionis, quam mihimetipsi proposui, summa valeat « reportare »

E veramente difficile era questo problema di trovare la somma dei reciproci dei quadrati dei numeri. Leibniz, sebbene a lungo vi studiasse, pur facendo passare per suo [1] il desiderio di investigare la somma di questa serie, non vi riuscì.

[1] In una lettera a Giovanni Bernoulli del novembre 1696 scriveva: « Circa summam harmonicorum nondum mihi satisfeci, et vereor ne sim deceptus.

Occorreva ancora quasi un secolo, prima che Eulero (¹) riuscisse a calcolarla, adoperando (come Giovanni Bernoulli (²) aveva osservato), un elegantissimo teorema di Newton.

Il Mengoli riesce però a trovare le somme delle serie

$$\sum \frac{1}{n^2+n}, \quad \sum \frac{1}{n^2+2n}, \quad \sum \frac{1}{n^2+3n}, \ \ldots$$

« Unitates denominatae compositis ex quadratis ab unitate, et lateribus « eorumdem dispositae in infinitum et aggregatae, sunt aequales unitati ».

« Unitates denominatae compositis, ex quadratis ab unitate, et lateribus eorumdem duplis dispositae in infinitum, et aggregatae, sunt aequales $\frac{3}{4}$ ».

Nel secondo libro dimostra poi (pag. 63):

« Unitates denominatae solidis omnium numerorum ab unitate in infi- « nitum dispositae, et aggregatae, sunt aequales quartae parti unitatis »:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{60}+\frac{1}{120}+\text{ecc.}=\frac{1}{4}$$

« Unitates denominatae solidis omnium imparium ab unitate, dispositae « in infinitum, et aggregatae, sunt aequales $\frac{1}{12}$ »:

$$\frac{1}{1\,.\,3\,.\,5}+\frac{1}{3\,.\,5\,.\,7}+\frac{1}{5\,.\,7\,.\,9}+\ldots=\frac{1}{12}.$$

E così prosegue poi a generalizzare ancora alquanto questi risultati che invano Leibniz tentò di appropriarsi nella sua lettera (³) ad Oldenburg del 3 febbraio 1672/3:

« Multa alia... observata sunt a me, ex quibus illud eminet, quod « modum habeo summam inveniendi seriei fractionum in infinitum decre-

---

« Interim circa cognata proponam quae olim in mente venere, ubi et iudicium tuum et « auxilium desidero.

« Quaeritur summa horum numerorum $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}$ etc.?... ».

Commercium phylosophicum Leibnitii et Bernoullii, Lausannae, 1745, tomo 1, pag. 213.

(¹) Euler, « Comm. Acc. scient. Petrop. », tomus VII ad annos 1734-1735, Petropoli, typis Acad. 1740, *De summis serierum reciprocarum*, pag. 124: « Deductus sum autem « super omnino inopinato ad elegantem summae huius seriei $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots\ldots$ « expressionem quae a circuli quadraturae pendet..... Inveni enim summae huius seriei « sextuplum aequalem esse quadrato circuli cuius diameter est 1 ».

(²) Johannis Bernoulli, *Opera Omnia* 1742, tomo IV, pag. 25.

(³) Edizione di Gehrhardt, pag. 78.

« scentium, quorum numerator unitas, nominatores vero triangulares, aut py-
« ramidales etc. ».

E facendogli Oldenburg osservare che Collins aveva già letto in Mengoli questi risultati, Leibniz risponde (1): « Cum Mengoli liber non sit ad « manus, videri ex relatione vestra, Mengolum summam tantum iniisse seriei « talium fractionum finitae, v. g. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$, me vero invenire « summam totius seriei infinitae $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}$ etc. ... Si tamen idem et « Mengolus praestitit, non miror; saepe enim concorrere solent diversi ».

Chi potrà credere che Leibniz ignorasse Mengoli? Tanto più che nella minuta di una lettera precedente, non giunta ad Oldenburg, si scusa in altro modo: « quamquam enim nondum mihi inquirendi in Mengolum otium « fuerit ... » (2).

Non sarebbe stato più naturale che Leibniz, così avido lettore, se non conosceva Mengoli, avesse chiesto ad Oldenburg notizie intorno a Mengoli? Ma non ne aveva forse bisogno.

IV. Il *Circolo* del Mengoli è un opuscolo che ha pure subìto un giudizio ingiusto da parte di Montucla (3). Non è davvero egli uno dei tanti *quadratori del circolo* ma egli espone veramente una quadratura del circolo esatta, quella per mezzo di un prodotto infinito, scoperta dal Wallis. Mengoli non parla mai di Wallis, sebbene la sua *Arithmetica infinitorum*, pubblicata nel 1655, dovesse essere giunta in Italia.

Egli dice di aver trovato il risultato (4), da molto tempo cercato, nell'anno 1660, cinque anni dopo la pubblicazione dell'opera del Wallis. Per quanto oscuramente esposta, sebbene forse con metodo più rigoroso, la via del Mengoli è sostanzialmente la stessa di quella del Wallis, tanto che io crederei che, sebbene ne taccia il nome, il Mengoli abbia veramente conosciuto l'opera del grande geometra inglese (5). Soltanto forse a causa

(1) Leibniz an Oldenburg, Paris, 14 Maij 1673; ed. Gehrhardt, pag. 95.

(2) Ibid., pag. 93.

(3) *Hist. des math.*, nouv. éd., II, Paris, an. VII, pag. 92: « Son nom a resté dans l'oubli et il l'a merité ». Ha quindi parimenti torto il Riccardi il quale dice nella sua *Bibl. Mathematica*: « collochiamo quest'opera fra le molte nelle quali si ebbe la sven- « tura di scoprire la quadratura del circolo ».

(4) *Circolo*, pag. 1.

(5) Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1655; *Opera Omnia*, Oxford, 1695, volume 1, pp. 458-466. Gli enunciati di Wallis sono abbastanza oscuri. Eccone uno: « $M\left(1\middle|\frac{3}{2}\right)$ « significet terminum medium inter 1 et $\frac{3}{2}$ in progressione hypergeometrica decrescente

$$1, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \text{ etc. } \left(\text{continue multiplicando } 1\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{4} \text{ etc.}\right).$$

della difficoltà della lettura (il libro del Wallis non fu capito in Francia dal sommo Fermat), il Mengoli ricostruì da sè, più che non lesse, la lunga serie di dimostrazioni che lo condussero al risultato:

« Il quadrato all'inscritto circolo è minore che non è il prodotto di « un numero dispari, per tutti li quadrati de' numeri precedenti dispari, in « riguardo al prodotto del primo par che è il binario, per tutti li qua- « drati de gli altri numeri precedenti pari ».

« Il quadrato all'inscritto circolo è maggiore che non è il prodotto « da tutti i quadrati de' numeri dispari, presi sino ad un qualche pari, in « riguardo al prodotto da quest'ultimo pare, che è il binario, per tutti li « quadrati de gli altri numeri pari precedenti ».

Il metodo del Mengoli, come quello del Wallis, consiste nel calcolare per *interpolazione* l' $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx$, considerandolo come termine medio tra gli integrali binomii $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$, dove m, n sono interi positivi.

Vedremo in una prossima Nota come al Mengoli si debbano altre scoperte, e tra esse quella delle prime serie convergenti per mezzo delle quali è possibile calcolare i logaritmi dei numeri razionali.

Matematica. — *Sulla condizione Picard-Lauricella per l'esistenza di soluzioni nell'equazione integrale di 1ª specie.* Nota di Attilio Vergerio, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

1. È già noto il seguente teorema dimostrato dal Picard [2] per le equazioni integrali di 1ª specie, a funzione caratteristica chiusa, e poi esteso dal Lauricella [3] alle equazioni a nucleo qualunque:

condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione

$$g(s) = \int_a^b \mathrm{K}(st)\, h(t)\, dt \tag{1}$$

« Circulus est ad quadratum diametri ut 1 ad $\mathrm{M}\left(1\,\middle|\,\frac{3}{2}\right)$ ». Colle nostre notazioni moderne ciò significa:

Si consideri la successione:

$$1 = \int_0^1 dx\,,\ \frac{2}{3} = \int_0^1 (1-x^2)\,dx\,,\ \frac{8}{15} = \int_0^1 (1-x^2)^2\,dx\,,\ \frac{48}{105} = \int_0^1 (1-x^2)^3\,dx \ldots$$

Il termine medio tra i primi due di questa successione è: $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$.

[1] Pervenuta all'Accademia il 24 settembre 1915.

[2] Comptes Rendus, 14 juin 1909.

[3] *Sull'equazione integrale di 1ª specie*, Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, vol. XVIII, ser. 5ª, 2° sem., fasc. 3°.

ammetta soluzione, è che sia convergente la serie

$$\sum_\nu \lambda_\nu^2 d_\nu^2 = \sum_\nu \lambda_\nu^2 \left\{ \int_a^b \varphi_\nu(r)\, g(r)\, dr \right\}^2 ,$$

e che la $g(s)$ abbia la forma

$$g(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s) \int_a^b \varphi_\nu(r)\, g(r)\, dr = \sum_\nu d_\nu\, \varphi_\nu(s) .$$

In tre Note ([1]) precedenti, apparse in questi Rendiconti, ho considerato dei casi particolari, stabilendo per essi delle condizioni necessarie e sufficienti, indipendentemente dalla conoscenza degli autovalori del nucleo e delle relative autofunzioni, senza però riuscire a stabilire una condizione analoga pel caso generale.

Qui invece, servendomi di alcuni risultati ottenuti in una Nota precedente ([2]), mi propongo di trasformare la condizione Picard-Lauricella, rendendola indipendente dalla conoscenza degli autovalori e delle corrispondenti autofunzioni del nucleo dell'equazione data, che supporremo simmetrico.

2. Siano λ_ν gli autovalori, e $\varphi_\nu(s)$ le corrispondenti autofunzioni del nucleo simmetrico $K(st)$, che, per maggior generalità, supporremo esser tale che, se ammette l'autovalore λ, ammetta anche l'altro $-\lambda$.

In una Nota precedente ([3]), abbiamo dimostrato che il nucleo

$$H_1(st) = \lim_{n=\infty} \frac{K_{2n+1}(st)}{\gamma^n}$$

non può ammettere autovalori diversi da $\lambda_1 = + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ e $\lambda_2 = - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$; e che, di fronte ad essi, si comporta come $K(st)$. Come conseguenza, abbiamo visto che

$$H_1(st) = \sum_{r=1}^{p_1} \frac{\varphi_1^{(r)}(s)\, \varphi_1^{(r)}(t)}{\lambda_1} + \sum_{r=1}^{p_2} \frac{\varphi_2^{(r)}(s)\, \varphi_2^{(r)}(t)}{\lambda_2} ;$$

dove p_1 e p_2 indicano il numero delle autofunzioni normalizzate e linearmente indipendenti, relative agli autovalori λ_1 e λ_2 rispettivamente.

([1]) Vergerio, *Sull'equazione integrale di 1ª specie* (seduta dell'8 novembre 1914); *Una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di soluzioni nell'equazione integrale di 1ª specie* (seduta del 6 giugno 1915); *Sulla risolubilità dell'equazione integrale di 1ª specie*, vol. XXIV, fasc. 3, 2° sem.

([2]) Vergerio, *Gli autovalori e le autofunzioni dei nuclei simmetrici*, Rendiconti dei Lincei, vol. XXIV, fasc. 7, 2° sem.

([3]) Ved. l'ultima delle mie Note citate, §§ 2 e 3.

In modo perfettamente analogo, ripetendo, pel nuovo nucleo simmetrico

$$F^{(2)}(st) = K(st) - H_1(st),$$

le considerazioni fatte per $K(st)$, si arriverebbe a dimostrare che il nucleo

$$H_1^{(2)}(st) = \lim_{n=\infty} \frac{F_{2n+1}^{(2)}(st)}{\Gamma_2^n}$$

non può ammettere autovalori diversi da $\lambda_3 = +\frac{1}{\sqrt{\Gamma_2}}$, $\lambda_4 = -\frac{1}{\sqrt{\Gamma_2}}$; e che

$$H_1^{(2)}(st) = \sum_{r=1}^{p_3} \frac{\varphi_3^{(r)}(s)\,\varphi_3^{(r)}(t)}{\lambda_3} + \sum_{r=1}^{p_4} \frac{\varphi_4^{(r)}(s)\,\varphi_4^{(r)}(t)}{\lambda_4}.$$

Ad analoghi risultati si perverrebbe ripetendo il ragionamento per il nucleo

$$F^{(3)}(st) = F^{(2)}(st) - H^{(2)}(st);$$

e così di seguito.

In generale, si dimostrerebbe che gli autovalori del nucleo

$$H_1^{(\nu)}(st) = \lim_{n=\infty} \frac{F_{2n+1}^{(\nu)}(st)}{\Gamma_\nu^n},$$

dove

$$F^{(\nu)}(st) = F^{(\nu-1)}(st) - H_1^{(\nu-1)}(st).$$

non possono essere diversi da $\lambda_{2\nu-1} = +\frac{1}{\sqrt{\Gamma_\nu}}$ e $\lambda_{2\nu} = -\frac{1}{\sqrt{\Gamma_\nu}}$; ed inoltre che

$$H_1^{(\nu)}(st) = \sum_{r=1}^{p_{2\nu-1}} \frac{\varphi_{2\nu-1}^{(r)}(s)\,\varphi_{2\nu-1}^{(r)}(t)}{\lambda_{2\nu-1}} + \sum_{r=1}^{p_{2\nu}} \frac{\varphi_{2\nu}^{(r)}(s)\,\varphi_{2\nu}^{(r)}(t)}{\lambda_{2\nu}}. \tag{2}$$

3. Osserviamo che, posto

$$H^{(\nu)}(st) = \lim_{n=\infty} \frac{F_{2n}^{(\nu)}(st)}{\Gamma_\nu^n},$$

si ha

$$\int_a^b H_1^{(\nu)}(sr)\,H_1^{(\nu)}(rt)\,dr = \lim_{n=\infty} \int_a^b \frac{F_{2n+1}^{(\nu)}(sr)}{\Gamma_\nu^n} \frac{F_{2n+1}^{(\nu)}(rt)}{\Gamma_\nu^n}\,dr =$$

$$= \Gamma_\nu \lim_{n=\infty} \frac{F_{4n+2}^{(\nu)}(st)}{\Gamma_\nu^{2n+1}} = \Gamma_\nu\, H^{(\nu)}(st);$$

mutando quindi, nella (2), s in r ed integrando, dopo averne moltiplicati i membri per $H_1(sr)\,dr$, si avrà

$$\Gamma_\nu \, H^{(\nu)}(st) = \sum_{r=1}^{p_{2\nu-1}} \frac{\varphi_{2\nu-1}^{(r)}(s)\, \varphi_{2\nu-1}^{(r)}(t)}{\lambda_{2\nu-1}^2} + \sum_{r=1}^{p_{2\nu}} \frac{\varphi_{2\nu}^{(r)}(s)\, \varphi_{2\nu}^{(r)}(t)}{\lambda_{2\nu}^2} \,;$$

ed ancora, essendo

$$\lambda_{2\nu-1}^2 \, \Gamma_\nu = \lambda_{2\nu}^2 \, \Gamma_\nu = 1 \,, \tag{3}$$

avremo

$$H^{(\nu)}(st) = \sum_{r=1}^{p_{2\nu-1}} \varphi_{2\nu-1}^{(r)}(s)\, \varphi_{2\nu-1}^{(r)}(t) + \sum_{r=1}^{p_{2\nu}} \varphi_{2\nu}^{(r)}(s)\, \varphi_{2\nu}^{(r)}(t) \,. \tag{4}$$

Si moltiplichino ambo i membri di quest'ultima per $g(s)\, g(t)\, ds\, dt$, e si eseguisca la doppia integrazione: posto

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_a^b H^{(\nu)}(st)\, g(t)\, dt = G^{(\nu)}(s) \,, \\ &\int_a^b \varphi_\nu(s)\, g(s)\, ds = d_\nu \,, \end{aligned} \right. \tag{5}$$

si ottiene

$$\int_a^b G^{(\nu)}(s)\, g(s)\, ds = \sum_{r=1}^{p_{2\nu-1}} [d_{2\nu-1}^{(r)}]^2 + \sum_{r=1}^{p_{2\nu}} [d_{2\nu}^{(r)}]^2 \,;$$

ed anche ricordando la (3),

$$\frac{1}{\Gamma_\nu} \int_a^b G^{(\nu)}(s)\, g(s)\, ds = \sum_{r=1}^{p_{2\nu-1}} \lambda_{2\nu-1}^2 (d_{2\nu-1}^{(r)})^2 + \sum_{r=1}^{p_{2\nu}} \lambda_{2\nu}^2 (d_{2\nu}^{(r)})^2 \,;$$

sarà quindi

$$\sum_\nu \frac{1}{\Gamma_\nu} \int_a^b G^{(\nu)}(s)\, g(s)\, ds = \sum_\nu \lambda_\nu^2\, d_\nu^2 \,.$$

E poichè

$$\int_a^b [G^{(\nu)}(s)]^2\, ds = \int_a^b G^{(\nu)}(s)\, ds \int_a^b H^{(\nu)}(st)\, g(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b G^{(\nu)}(t)\, g(t)\, dt = D_\nu \,,$$

come si vede subito integrando la (5), dopo averne moltiplicati i membri

per $H^{(\nu)}(rs)\,ds$, ed osservando che

$$\int_a^b H^{(\nu)}(rs)\, H^{(\nu)}(st)\, ds = H^{(\nu)}(rt)\,,$$

avremo infine

$$\sum_\nu \frac{D_\nu}{\Gamma_\nu} = \sum_\nu \lambda_\nu^2\, d_\nu^2\,. \tag{6}$$

Appresso, moltiplicando i membri della (4) per $g(t)\,dt$ ed integrando, si ottiene

$$G^{(\nu)}(s) = \sum_{r=1}^{p_{2\nu-1}} \varphi_{2\nu-1}^{(r)}(s)\, d_{2\nu-1}^{(r)} + \sum_{r=1}^{p_{2\nu}} \varphi_{2\nu}^{(r)}(s)\, d_{2\nu}^{(r)}\,;$$

e quindi

$$\sum_\nu G^{(\nu)}(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s)\, d_\nu\,. \tag{7}$$

Per le (6) e (7) possiamo quindi affermare che

condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione (1), *a nucleo simmetrico, ammetta soluzione, è che sia convergente la serie*

$$\sum_\nu \frac{D_\nu}{\Gamma_\nu} = \sum_\nu \frac{1}{\Gamma_\nu} \int_a^b \{G^{(\nu)}(s)\}^2\, ds\,;$$

e che la $g(s)$ *si possa mettere sotto la forma*

$$g(s) = \sum_\nu G^{(\nu)}(s)\,. \tag{7'}$$

4. Nel caso che le costanti γ_n di $K(st)$ siano tutte eguali tra loro, essendo

$$F^{(2)}(st) = F^{(3)}(st) = \cdots = 0\,,$$

e quindi

$$G^{(\nu)}(s) = 0 \qquad (\nu > 1)$$

la (7') diventa

$$g(s) = G^{(1)}(s) = \lim_{n=\infty} \int_a^b \frac{K_{2n}(st)}{\gamma^n}\, g(t)\, dt =$$
$$= \lim_{n=\infty} \frac{1}{\gamma} \int_a^b K_2(sr)\, dr \int_a^b \frac{K_{2n-2}(rt)}{\gamma^{n-1}}\, g(t)\, dt =$$
$$= \frac{1}{\gamma} \int_a^b K_2(sr)\, G^{(1)}(r)\, dr = \frac{g_2(s)}{\gamma}\,;$$

che è la condizione già nota [1].

5. Posto ora

$$\int_a^b H_1^{(\nu)}(st)\, g(t)\, dt = G_1^{(\nu)}(s)\,,$$

[1] Ved. la prima delle mie Note citate.

si ha

$$(8) \qquad G^{(\nu)}(s) = \int_a^b H^{(\nu)}(st)\, g(t)\, dt = \frac{1}{\Gamma_\nu} \int_a^b F^{(\nu)}(sr)\, dr \int_a^b H_1^{(\nu)}(rt)\, g(t)\, dt = $$

$$= \frac{1}{\Gamma_\nu} \int_a^b F^{(\nu)}(sr)\, G_1^{(\nu)}(r)\, dr .$$

Inoltre, essendo

$$\int_a^b H_1^{(\nu)}(sr)\, H_1^{(\mu)}(rt)\, dr = 0$$

per ogni $\mu \neq \nu$, perchè le autofunzioni, mediante le quali si può esprimere $H_1^{(\nu)}(sr)$, sono ortogonali a quelle che servono a rappresentare $H_1^{(\mu)}(rt)$, sarà anche

$$\int_a^b H_1^{(\mu)}(rt)\, G_1^{(\nu)}(t)\, dt = 0 \qquad (\mu \neq \nu).$$

E poichè

$$F^{(\nu)}(sr) = K(sr) - H_1^{(1)}(sr) - H_1^{(2)}(sr) - \cdots - H_1^{(\nu-1)}(sr) ,$$

la (8) assumerà la forma

$$G^{(\nu)}(s) = \frac{1}{\Gamma_\nu} \int_a^b K(sr)\, G_1^{(\nu)}(r)\, dr .$$

Potendo, con ciò, la (7′) scriversi

$$g(s) = \int_a^b K(st) \sum_\nu \frac{G_1^{(\nu)}(t)}{\Gamma_\nu}\, dt ,$$

una soluzione della (1) sarà data da

$$h(t) = \sum_\nu \frac{G_1^{(\nu)}(t)}{\Gamma_\nu} .$$

6. Il caso in cui il nucleo della (1) non sia simmetrico si riconduce subito a quello ora considerato, cicordando [1] che l'*equazione integrale* (1) *a nucleo non simmetrico, equivale sempre all'equazione integrale a nucleo simmetrico*

$$g'(s) = \int_a^b K(st)\, h(t)\, dt ,$$

dove

$$g'(s) = \int_a^b K(rs)\, g(r)\, dr \quad , \quad K(st) = \int_a^b K(rs)\, K(rt)\, dr .$$

[1] Lauricella, *Sulla risoluzione dell'equazione integrale di 1ª specie*. Rend. della R. Accad. dei Lincei, sed. del 23 aprile 1911.

7. Noteremo, da ultimo, che, se la serie

$$\sum_{\nu} \mathrm{H}_1^{(\nu)}(st)$$

è uniformemente convergente, dovrà necessariamente aversi

$$K(st) = \sum_{\nu} \mathrm{H}_1^{(\nu)}(st) \ . \tag{9}$$

Basta infatti notare che, per la (2),

$$\sum_{\nu} \mathrm{H}_1^{(\nu)}(st) = \sum_{\nu} \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu} \ .$$

e ricordare un noto teorema dimostrato dallo Schmidt [1].

In particolare, la (9) sarà sempre valida se il suo secondo membro si riduce alla somma d'un numero finito di termini; il che accadrà quando il numero degli autovalori λ_ν, di $K(st)$, è finito.

Matematica. — *Sul concetto di gruppo di monodromia per una funzione ad infiniti valori.* Nota di G. Andreoli, presentata dal Socio V. Volterra.

Matematica. — *Sulle varietà algebriche con infiniti sistemi regolari di integrali riducibili.* Nota di Gaetano Scorza, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

Fisica. — *Sulla legge di Lo Surdo.* Nota del dott. Carlo Sonaglia, presentata dal Corrispondente A. Garbasso.

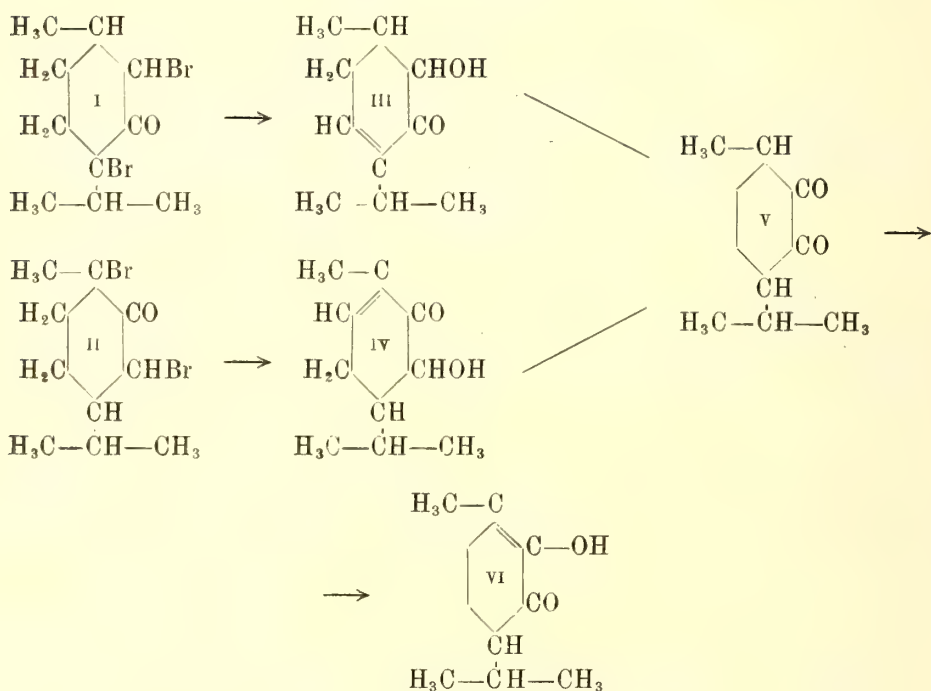
Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

(1) *Entwicklung willkürlicher Functionen nach Systemen vorgeschriebener.* Inaugural Dissertation, Göttingen, 1905, § 8.

Chimica. — *Processi di riduzione e ossidazione nel gruppo dei terpeni.* Nota di Guido Cusmano, presentata dal Socio A. Angeli.

Altra volta ([1]) è stato dimostrato che nella bromurazione diretta del mentone e del tetraidrocarvone si formano rispettivamente i composti I e II, e che questi, trattati con soluzioni diluite di idrati alcalini, forniscono ambedue il diosfenol (VI) o bucco-canfora, componente dell'essenza di *Diosma crestata*. Per spiegare il risultato, si è proposto lo schema

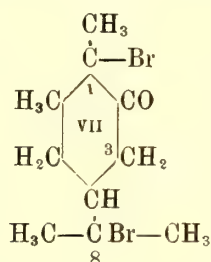
```
H3C—CH                      H3C—CH
H2C     CHBr                H2C     CHOH
     I             →             III
H2C     CO                  HC      CO
  CBr                          C
H3C—CH—CH3                  H3C—CH—CH3
                                                  H3C—CH
                                                       CO
                                                    V          →
                                                       CO
                                                    CH
                                                  H3C—CH—CH3
H3C—CBr                     H3C—C
H2C     CO                  HC      CO
     II            →             IV
H2C     CHBr                H2C     CHOH
   CH                          CH
H3C—CH—CH3                  H3C—CH—CH3

                                 H3C—C
                                        C—OH
                       →           VI
                                        CO
                                     CH
                                 H3C—CH—CH3
```

in cui si è ammesso che gli alcali, agendo, come in altri casi noti, sui gruppi alogenati, diano origine agli alcooli non saturi III e IV; che questi ultimi, per un processo di mutua riduzione e ossidazione fra il doppio legame e il carbinolo secondario, si trasformino nel chelone V, dal quale è ovvio il passaggio a bucco-canfora.

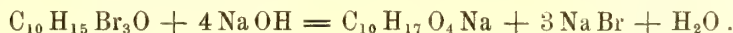
([1]) G. Cusmano, questi Rendiconti, vol. XXII, ser., 5ª, 2° sem., pag. 569; G. Cusmano e P. Poccianti, ibid., vol. XXIII, ser. 5ª, 1° sem., pag. 347.

Mi son proposto di verificare se i risultati sopradetti siano stati interpretati in modo esatto, specialmente per quanto riguarda la trasposizione che conduce dagli alcooli non saturi III e IV al chetone saturo V. Perciò ho cercato di preparare, partendo da chetoni terpenici alogenati e per eliminazione degli alogeni mediante gli alcali, alcuni composti contenenti nel medesimo nucleo un carbinolo secondario e un doppio legame, per poi determinare se e in quali condizioni le due funzioni possono mutuamente modificarsi nel modo sopradetto.

Uno dei chetoni alogenati che ho impiegato è il tribromotetraidrocarvone, preparato da O. Wallach [1] dal dibromo-1-8-tetraidrocarvone (VII)

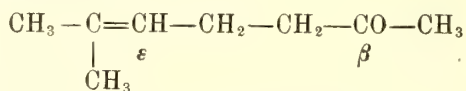
```
           CH3
           C—Br
         /  1  \
     H3C         CO
        |  VII  |
     H2C       3 CH2
         \     /
           CH
   H3C—C Br—CH3
           8
```

Per esso rimaneva da stabilire la posizione dell'atomo di bromo introdotto per ultimo; ma era presumibile (poichè è conosciuto che gli alogeni tendono ad attaccare gli atomi di carbonio adiacenti al carbonile) che la posizione stessa fosse la 3. Secondo tale ipotesi, confermata poi dall'esperienza, il tribromo- sarebbe stato un derivato del dibromo-1-3-tetraidrocarvone (formola II); poteva quindi aspettarsi che l'eliminazione, mediante gli alcali, degli alogeni del nucleo, procedesse come in quest'ultimo chetone. Invece, per ora, si è trovato che non si forma nessun doppio legame nel nucleo, in cui entrano due ossidrili al posto dei due atomi di bromo. Come si vede, lo scopo dello studio è venuto, almeno per il momento, a mancare. Tuttavia, siccome l'azione degli alcali sul tribromotetraidrocarvone non si limita all'entrata dei due ossidrili, ma trasforma la molecola del chetone in modo profondo, credo opportuno pubblicare i risultati di questa ricerca.

Il tribromotetraidrocarvone, in contatto con gli idrati alcalini in soluzione acquosa al 2,5 %, reagisce a freddo quantitativamente secondo l'equazione

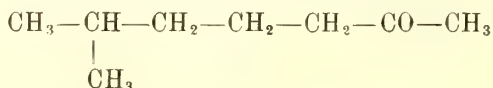
$$C_{10}H_{15}Br_3O + 4\,NaOH = C_{10}H_{17}O_4Na + 3\,NaBr + H_2O\,.$$

Il composto $C_{10}H_{17}O_4Na$ è il sale di un acido monocarbossilico della serie grassa, che possiede un doppio legame e due ossidrili. Esso, trattato

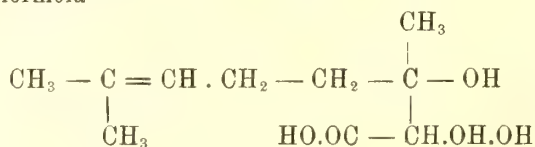
[1] Liebig's Annalen *286*, 127.

in soluzione acetica diluita con perossido di piombo, sviluppa acido carbonico e fornisce metileptenone

$$\underset{\displaystyle CH_3}{\overset{}{CH_3-\underset{|}{C}}}\overset{\varepsilon}{=}CH-CH_2-CH_2-\overset{\beta}{CO}-CH_3$$

Egualmente fornisce detto chetone in quantità teorica, quando si riscalda a secco oltre i 250°.

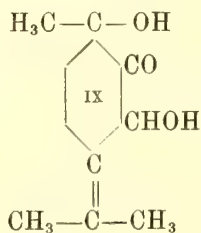
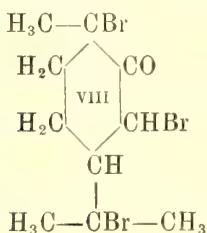
In soluzione acquosa, in presenza di nero di platino, il sale $C_{10}H_{17}O_4Na$ assorbe due atomi d'idrogeno; e il nuovo composto, riscaldato a secco, dà quantitativamente metileptanone o isoamilacetone:

$$\underset{\displaystyle CH_3}{CH_3-\underset{|}{CH}}-CH_2-CH_2-CH_2-CO-CH_3$$

Questi risultati ci dicono che nell'acido $C_{10}H_{18}O_4$ è inclusa la molecola del metileptenone, e che basterà unire a questa un gruppo alcoolico e un carbossile per avere la struttura dell'acido. L'unione è da ricercarsi negli atomi di carbonio β e ε del metileptenone, i quali corrispondono a quelli 1 e 4 del tribromotetraidrocarvone. Ora, è da escludere che essa si faccia al carbonio ε, poichè nel trattamento con perossido di piombo dell'acido $C_{10}H_{18}O_4$ l'atomo sarebbe stato ossidato. Per l'acido, allora, non rimane che la formola

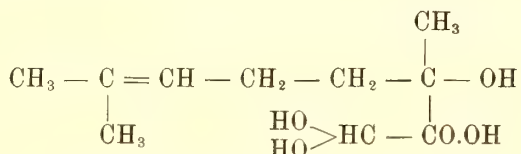
$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad CH_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad | \\ CH_3 - C = CH\,.\,CH_2 - CH_2 - C - OH \\ \qquad\;\; | \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\, | \\ \qquad CH_3 \qquad\quad HO.OC - CH.OH.OH \end{array}$$

quella di un acido α-β diossi-citronellico. L'ossidrile terziario e il doppio legame derivano dagli atomi di bromo in 1 e in 8 del tribromotetraidrocarvone; gli altri gruppi ossigenati, dal carbonile e dalla sostituzione del terzo atomo di bromo. La posizione di quest'ultimo risulta, perciò, nel carbonio 3 e la formola del chetone, quella VIII.

Stabilito ciò, il decorso della reazione fra il tribromo 1-3-8-tetraidrocarvone e gli alcali potrà rappresentarsi come segue:

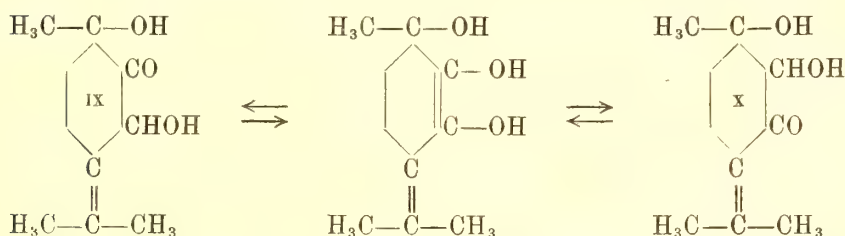
Da prima si forma il composto IX

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} H_3C-CBr \\ H_2C \diagup \quad \diagdown CO \\ | \quad \text{VIII} \quad | \\ H_2C \diagdown \quad \diagup CHBr \\ CH \\ | \\ H_3C-CBr-CH_3 \end{array} & \qquad\qquad & \begin{array}{c} H_3C-C-OH \\ \diagup \quad \diagdown CO \\ | \quad \text{IX} \quad | \\ \diagdown \quad \diagup CHOH \\ C \\ \| \\ CH_3-C-CH_3 \end{array} \end{array}$$

e poi

a) o esso subisce l'idrolisi fra gli atomi di carbonio 3 e 4, e dà luogo all'aldeide idrata

```
                                         CH3
                                          |
CH3 — C = CH — CH2 — CH2 — C — OH
      |                    |
     CH3        HO>HC — CO.OH
                HO
```

che si cambia nel suddetto acido diossicitronellico per reciproca riduzione e ossidazione dei gruppi carbonilico e aldeidico;

b) ovvero il composto IX genera per tautomeria il composto X

```
H3C—C—OH            H3C—C—OH            H3C—C—OH
   /\                  /\                  /\
  |  CO               |  C—OH             |  CHOH
  | IX        <—      |  ||               | X         
  |  CHOH     —>      |  C—OH     —>      |  CO
   \/                  \/         <—       \/
   C                   C                   C
   ||                  ||                  ||
H3C—C—CH3           H3C—C—CH3           H3C—C—CH3
```

il quale, poi, subisce l'idrolisi fra gli atomi di carbonio 3 e 4, più rapidamente delle altre forme, fornendo l'acido. Questo secondo meccanismo sarebbe molto in accordo con la mobilità della molecola dei terpeni.

Parte sperimentale.

Azione degli alcali diluiti sopra il tribromotetraidrocarvone.

Acido α-β-diossicitronellico. — In un primo saggio si erano messi a reagire insieme il chetone alogenato e idrato sodico in soluzione acquosa al 2,5 %, nella proporzione di una mol. del primo e tre del secondo. Ma avendo osservato che dopo alcune ore la soluzione diveniva neutra, mentre ancora rimaneva inalterato $^1/_4$ del peso del tribromuro, si modificarono le condizioni come segue:

gr. 17,4 (1 mol.) di tribromotetraidrocarvone, ben polverizzati, si uniscono a una soluzione acquosa al 2,5 % di gr. 7,2 (4 mol.) d'idrato sodico, e il tutto si tiene in un agitatore per circa 30 ore. Il tribromuro si discioglie totalmente, e la soluzione diviene neutra. Questa si concentra a b. m. sino a che comincia a cristallizzare; allora con il raffreddamento si separa quasi tutto il prodotto della reazione; il rimanente si ricava da una nuova concentrazione delle madri, nelle quali rimane bromuro di sodio. Il prodotto, che ammonta a circa gr. 10, si presenta in lamelle bianche splendenti. Si

può far cristallizzare dall'acqua, in cui è solubile a freddo circa 8 %; è solubite nell'alcool bollente. Scolora rapidamente il permanganato. Riscaldato a secco, intorno a 185° diviene quasi fluido; fonde a una temperatura assai superiore, decomponendosi, come più sotto si dirà.

A 100° non perde di peso. Bruciati con acido solforico:

I gr. 0,2172 dànno gr. 0,0696 $Na_2 So_4$
II gr. 0,1175 » » 0,0377 »

		Trovato %	Calcolato per $C_{10}H_{17}O_4Na$
I	Na	10,38	10,27.
II	»	10,40	

Questo composto si forma quantitativamente. Il tribromotetraidrocarvone viene decomposto in modo analogo anche dall' idrato di potassio. Solamente, si forma un sale assai solubile, che si purifica in modo disagevole.

L'acido corrispondente al sale $C_{10}H_{17}O_4Na$ è liquido e trattiene tenacemente l'acqua, per cui l'esatta sua composizione si è fissata con l'analisi del

Sale d'argento. — Questo si prepara puro per l'analisi, mescolando a freddo la soluzione acquosa diluita del sale di sodio con una di nitrato d'argento. Se le soluzioni sono abbastanza diluite, il sale d'argento si depone lentamente in gruppi di foglioline incolori splendenti. Si raccoglie e si lava bene con acqua, in cui non è troppo solubile a freddo. Si scioglie a caldo nell'acqua, ma in parte si decompone. Seccato su acido solforico dà all'analisi:

I sostanza gr. 0,2324; CO_2 gr. 0,3324; H_2O gr. 0,1162; Ag gr. 0,0815;
II » » 0,1872; » » 0,2673; » » 0,0935

		Trovato %	Calcolato per $C_{10}H_{17}O_4Ag$
I	C	39,00	38,82
	H	5,55	5,55
	Ag	35,07	34,91
II	C	38,94	
	H	5,54	

Sale baritico. — Si può ottenere, oltre che dal sale sodico per doppia decomposizione, anche per azione dell' idrato di bario al 2,5 % sul tribromotetraidrocarvone. Cristallizza dall'acqua bollente, in foglioline lucenti. Contiene acqua di cristallizzazione; difatti, analizzato dopo essiccamento all'aria, si ha:

gr. 0,2272 dànno gr. 0,0778 CO_3Ba

	Trovato %	Calcolato per $(C_{10}H_{17}O_4)_2Ba + 2H_2O$
Ba	23,83	23,86

e dopo disseccamento a 100°:

g.r 0,2383 dànno gr. 0,0873 di $BaCO_3$

	Trovato %	Calcolato per $(C_{10}H_{17}O_4)_2Ba$
Ba	25,61	25,45

Sale $C_{10}H_{17}O_4Na + C_{10}H_{18}O_4$. — In un tentativo di eterificazione dell'acido $C_{10}H_{18}O_4$, se ne trattò il sale sodico in soluzione, con la quantità equimolecolare di solfato dimetilico. Si formò una sostanza in scagliette bianche lucenti, saponose al tatto, contenenti sodio e di reazione acida. Purificata per cristallizzazione dall'acqua bollente, fonde nettamente a 155°. Dal quantitativo di sodio sembra trattarsi dell'unione di una molecola del sale con una dell'acido libero:

sostanza (disseccata a 110°) gr. 0,1206: Na_2SO_4 gr. 0,0196

	Trovato %	Calcolato per $C_{10}H_{18}O_4 + C_{10}H_{17}O_4Na$
Na	5,26	5,40

Nella preparazione del tribromotetraidrocarvone, oltre a una parte solida costituita da questo, si ha una parte liquida. Essa, trattata con idrato sodico, fornisce una notevole quantità del sale $C_{10}H_{17}O_4Na$ e, insieme, altre sostanze. Fra queste se ne è isolata una che cristallizza dall'alcool diluito in lunghi aghi bianchi lucenti, p. f. 76°:

sostanza gr. 0.1125; CO_2 gr. 0,3814; H_2O gr. 0,1441

	Trovato %	Calcolato per $C_{10}H_{14}O_2$
C	72,18	72,22
H	8,67	8.51

Possiede odore fenolico; la sua soluzione acquosa si colora, con cloruro ferrico, in nero-violaceo; precipita con acido carbonico dalle soluzioni alcaline; volatile con il vapor d'acqua.

Ossidazione dell'acido $C_{10}H_{18}O_4$.

Metileptenone. — Per l'indagine della costituzione dell'acido si cominciò con l'ossidarlo. A tal uopo gr. 2 (1 mol.) del sale sodico si sciolsero in pochi cc. di acido acetico al 50 %; si aggiunsero gr. 2,5 (un at. di O) di biossido di piombo, riscaldando leggermente. Si notò sviluppo di acido carbonico. Facendo passare il vapor d'acqua nel miscuglio, distillò un olio incoloro di grato odore di banana, alquanto solubile nell'aqua. Ciò che non passò con il vapor d'acqua conteneva ancora dell'acido $C_{10}H_{18}O_4$ rimasto inalterato. La parte volatile, sciolta in acqua e alcool, fu trattata con acetato di semicarbazide. Si formò subito un precipitato di foglioline incolore. Lo stesso fornì l'acqua distillata insieme con l'olio. Il semicarbazone cristal-

lizzato dall'acqua bollente o da un miscuglio di etere di petrolio e benzolo, fonde a circa 135°.

I gr. 0,1210; CO_2 gr. 0,2614; H_2O gr. 0,1020
II gr. 0,0654; N cc. 12,7 a 13°,2 ed a 761 mm.

	Trovato %	Calcolato per $C_9H_{17}ON_3$
C	58.91	58 92
H	9,36	9,37
N	23,20	22,98

Da questi dati si dedusse per l'olio la composizione $C_8H_{14}O$; ed essa, insieme con i caratteri del semicarbazone, lo fece riconoscere come metileptenone. A ogni modo, si preparò un campione di quest'ultima sostanza dall'anidride cineolica, e il confronto levò ogni dubbio.

Decomposizione per mezzo del calore del sale $C_{10}H_{17}O_4Na$.

Metileptenone. — Gr. 0,5 del sale perfettamente disseccato si riscaldano in un palloncino sulla fiamma nuda. Il sale fonde decomponendosi rapidamente. Fra altro si raccolgono gr. 0,27 di un olio fragrante, da cui si ottengono gr. 0,38 del semicarbazone del metileptenone. Il rendimento di questo chetone è, quindi, quantitativo.

Riduzione dell'acido $C_{10}H_{18}O_4$.

Gr. 2 del sale $C_{10}H_{17}O_4Na$ si sciolgono in circa cc. 50 di acqua; si aggiunge qualche centigr. di nero di platino, preparato di recente, e si agita tutto in presenza d'idrogeno. Questo viene assorbito per poco più di 220 cc. a 25° e 764 mm., cioè circa nella quantità di una molecola. Fatto deporre il nero di platino, si filtra e si concentra la soluzione sino a $^1/_3$. Con il raffreddamento si depongono ciuffi di aghi appiattiti bianchi. Il composto, a differenza da quello donde deriva, è assai stabile al permanganato; è meno solubile nell'acqua a freddo; non rammollisce, anche se riscaldato alla temperatura 220°. Disseccato a 100°, dà all'analisi:

gr. 0.2394; SO_4Na_2 0,0755

	Trovato %	Calcolato per $C_{10}H_{19}O_4Na$
Na	10,24	10,18

Il *sale d'argento* che si ottiene dal sale sodico, per doppia decomposizione, è in lamine bianco-splendenti; solubile nell'acqua bollente; abbastanza stabile alla luce.

Disseccato su acido solforico, fu analizzato:

gr. 0,1793; gr. 0,2552 CO_2; 0,0995 H_2O; 0,0620 Ag

	Trovato %	Calcolato per $C_{10}H_{19}O_4Ag$
C	38,81	38,57
H	6,16	6,15
Ag	34,57	34,69

DECOMPOSIZIONE PER MEZZO DEL CALORE DEL SALE $C_{10}H_{19}O_4Na$.

Metileptanone. — Questa decomposizione avviene come nel caso del sale $C_{10}H_{18}O_4Na$. Da gr. 0,5 del primo si hanno gr 0,27 di un olio, il quale si riconosce per metileptanone o isoamilacetone, perchè fornisce un semicarbazone che cristallizza dall'alcool bollente in tavolette incolore e fonde a 158° circa [1].

Ringrazio il laureando in chimica sig. E. Gori per il valido aiuto datomi in questa ricerca.

Chimica-fisica. — *Sul calore di formazione di composti organici di addizione.* IV. *Picrati* [2]. Nota di B. L. VANZETTI e V. GAZZABIN, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

In una serie di esperienze, i cui risultati furono precedentemente comunicati, abbiamo determinato il calore di combinazione dell'acido picrico con sostanze di natura chimicamente neutra, come la naftalina, l'eugenolo, l'isosafrolo [3]. Trovammo che i valori della tonalità termica di queste combinazioni sono piuttosto bassi, in ragione della poca stabilità loro, specialmente nel caso della naftalina, che non à altre valenze disponibili, oltre a quelle che si considerano come non saturate, o parzialmente saturate, del nucleo benzinico. Per il picrato di *naftalina* si trova, infatti, un calore di combinazione, tra i componenti solidi, di circa 1 grande caloria per grammomolecola. La tonalità termica si rivela un po' maggiore quando la molecola del composto, che funziona da base verso l'acido picrico, contiene delle catene laterali e dei doppî legami di natura etilenica. Così per l'*eugenolo* e per l'*isosafrolo* trovammo un calore di combinazione di 5,9 e 4,4 circa grandi calorie per grammo-molecola.

Abbiamo messo inoltre in rilievo il fatto che nel caso dell'eugenolo si giunge ad un risultato inatteso: mentre si otteneva con una certa facilità

[1] Auden, Perkin e Rose, Journ. ch. soc. of London, 75, pag. 909 (1899).
[2] Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Padova.
[3] Questi Rendiconti, vol. XXII, 1° sem., pag. 103 (1913).

il suo picrato, non ci è stato possibile di isolare il picrato del suo isomero, l'isoeugenolo; e ciò contro la nota regola che nei composti a catena propenilica il doppio legame è meno stabile che non in quelli a catena allilica. È nostra intenzione di appurare anche questo fatto e di ricercarne le cause, che in parte possono attribuirsi alla tendenza a polimerizzarsi dell'isoeugenolo, ma che forse devono imputarsi anche alla presenza dell'ossidrile. Ma su questa apparente anomalia, che ci sembra interessante, avremo occasione di ritornare.

Nel caso dell'*α-metilindolo*, in cui si accumulano le due funzioni amminica ed etilenica, abbiamo ottenuto un valore piuttosto basso (circa 2 grandi calorie per grammomolecola).

Ora possiamo riportare qualche altro dato quantitativo sui picrati di alcune basi del gruppo piridico. Con questa esperienza abbiamo voluto mettere in rilievo le differenze che esistono tra le combinazioni dell'acido picrico e le ammine terziarie (tipo piridina, chinolina), e quelle dell'acido picrico ed i corrispondenti composti idrogenati, basi secondarie, in cui l'aggruppamento contenente l'azoto à perduto completamente il carattere aromatico (piperidina, tetraidrochinolina). Lo studio sarà esteso poi alla isochinolina, alle basi del gruppo pirrolico (indoli) e ad alcune basi naturali (nicotina, coniina, ecc.), che con le basi studiate si trovano in più diretta relazione. Il lavoro è stato interrotto per la difficoltà di procurarsi, in questo momento, sufficienti quantità di tali prodotti.

Le sostanze adoperate furono sottoposte a purificazione rigorosa e controllate con l'analisi elementare, quando ciò parve necessario, come nel caso dei picrati.

Come si vedrà dai risultati, riportati sotto, i massimi valori si sono ottenuti con la *piperidina*, in confronto con la *piridina*; e ciò era perfettamente prevedibile, in base alle cognizioni che si ànno sulla natura di queste due basi. Il confronto tra *piridina* e *chinolina* condusse invece a valori pressochè eguali; un po' minori per la seconda, che può considerarsi come una base un po' più debole. Per la *tetraidrochinolina* si ottennero, contro ogni aspettativa, dei valori molti bassi, che non abbiamo potuto però controllare per deficenza di materiale. Ritorneremo su questo prodotto, del quale ci proponiamo di determinare anche la costante di dissociazione elettrolitica, che non ci è stato possibile di trovare nella letteratura a tutt'oggi.

Data la poca solubilità di questi picrati (che non avrebbe permesso di ottenere effetti termici a bastanza elevati), anzichè determinare il calore di combinazione della differenza dei calori di soluzione del picrato e dei suoi componenti, questa volta abbiamo preferito seguire, quasi sempre, la determinazione del calore di combinazione versando contemporaneamente i due componenti nella soluzione satura del picrato, presente la fase solida. Se l'acido picrico è finamente triturato, la reazione è quasi istantanea, ciò che

facilita di molto il calcolo. Adottammo il metodo delle bolle sottili di vetro, immerse, che ci diede sempre ottimi risultati, facilmente controllabili. L'apparecchio calorimetrico usato era del tipo Thomsen con calorimetro di argento dorato di circa 500 cc. e con agitatore ad elica.

Acido picrico e piridina (punto di fusione del picrato: 164°):

1) Ac. picrico gr. 3,464, piridina gr. 1,195, in gr. 469 di soluz. acquosa; equivalente del sistema = 476,3. Innalz. di temper. dovuto alla reazione = 0,435°.
Calore della reazione = 207,2 cal.;
calore molecolare di combinazione = *13,70* Cal.

2) Ac. picrico gr. 4,415, piridina gr. 1,523, in gr. 395,6 di alcool a 95 %; equivalente del sistema = 250,34. Innalz. di temp. osserv. = 0,921°.
Calore della reazione = 230,47 cal.;
calore molecolare di soluzione e combinazione = 11,92 Cal.
Picrato di piridina gr. 5,938 in gr. 395,6 di alcool a 95 %; equivalente del sistema = 249,6 Abbass. di temp. osserv. = 0,160°;
Calore della reazione = — 39,9 cal.;
calore molecolare di soluzione del picrato = — 2,06 Cal.
da dui si calcola:
calore molecolare di combinazione = *13,98* Cal.

3) Calorimetro a mescolanza:
ac. picrico gr. 0.806 in gr. 350,9 di acqua;
piridina gr. 0,264 in gr. 143 di acqua;
$t_a = 1,788°$, $t_b = 1,372°$, $t_f = 1,524°$ (1);
A = 143,1, $B + b = 358,96$. Effetto termico della mescol. = 16,76 cal.
Effetto termico riferito alla grammolecola = *4,67* Cal.

4) Ac. picrico gr. 0,827 in gr. 300,2 di acqua;
piridina gr. 0,274 in gr. 188,0 di acqua;
$t_a = 3,292°$, $t_b = 3,616°$, $t_f = 3,768°$;
A = 188,1, $B + b = 308,3$. Effetto termico della mescol. = 14,09 cal.
Effetto termico riferito alla grammolecola = 14,09 cal.

5) Ac. picrico gr. 1,649 in alcool a 95 % gr. 250,2;
piridina gr. 0,540 in alcool a 95 % gr. 174,6;
$t_a = 2,720°$, $t_b = 2,100°$, $t_f = 2,417°$;
A = 105,5, $B + b = 159,36$. Effetto termico della mescol. = 18.55 cal.
Effetto termico riferito alla grammolecola = *2.699* Cal.

(1) Nella equazione
$$Q = A(t_f - t_a) + (B + b)(t_f - t_b),$$
t_a è la temper. della soluzione piridica, t_b quella della soluzione picrica, t_f la temper. finale della soluzione di picrato; A è l'equivalente in acqua della prima soluzione; $B + b$ quello della seconda soluzione, del calorimetro ed accessorî.

Il calore molecolare di combinazione della piridina con l'acido picrico risulta, in media, di *13,84* grandi calorie.

Alla concentrazione di 0,22 circa per cento in acqua il picrato di piridina può considerarsi dissociato per circa due terzi (temperatura ordinaria).

Alla concentrazione di 0,5 circa per cento nell'alcool parrebbe dissociato per circa quattro quinti.

Acido picrico e piperidina (punto fusione del picrato: 151-152°):

1) Ac. picrico gr. 4,055, piperidina gr. 1,505, in gr. 456,8 di soluz. acquosa; equiv. del sist. = 470,6. Innalz. di temper. dovuto alla reaz. = 0,765°; calore della reazione = 360 cal.;
calore molecolare di combinazione = *20,33* cal.

2) Ac. picrico gr. 3,651, piperidina gr. 1,355, in gr. 456,4 di soluz. acquosa; equiv. del sist. = 471.2. Innalz. di temper. dovuto alla reaz. = 0,705°; calore della reazione = 332,2 cal.;
calore molecolare di combinazione = *20,83* Cal.

3) Calorimetro a mescolanza:
Ac. picrico gr. 2,255 in gr. 352,58 di acqua;
piperidina gr. 0,837 in gr. 120.88 di acqua;
$t_a = 2,527°$, $t_b = 2,145°$, $t_f = 1,678°$;
A = 121,3, B + b = 361,36. Effetto termico della mescol. = 122,42 cal.
Effetto termico riferito alla grammolecola = *12,44* Cal.

4) Ac. picrico gr. 1,84 in gr. 356,0 di acqua;
piperidina gr, 0,683 in gr. 122,2 di acqua;
$t_a = 3,099°$, $t_b = 2,707°$, $t_f = 2,305°$;
A = 122,6, B + b = 364,6. Effetto termico della mescol. = 98,5 cal.
Effetto termico riferito alla grammolecola = *12,24* Cal.

5) Ac. picrico gr. 5,178 in gr. 263,45 di alcool a 95 %;
piperidina gr. 1,922 in gr. 165,7 di alcool a 95 %;
$t_a = 3,187°$, $t_b = 4,326°$, $t_f = 3,488°$;
A = 10,88, B + b = 263,45. Effetto term. della mescol. = 256,6 cal.
Effetto termico riferito alla grammolecola = *11,35* Cal.

6) Ac. picrico gr. 1,339 in gr. 254,2 di alcool a 95 %;
piperidina gr. 0,497 in gr. 119.9 di alcool a 95 %;
$t_a = 1,920°$, $t_b = 3,251°$, $t_f = 3,445°$;
A = 72,49, B + b = 161,63. Effetto term. della mescol. = 65,1 cal.
Effetto termico riferito alla grammolecola = *11,13* Cal.

7) Ac. picrico gr. 10,876 in gr. 260,43 di alcool a 95 %;
piperidina gr. 4,035 in gr. 119,54 di alccol a 95 %;
$t_a = 1,879°$, $t_b = 5,565°$, $t_f = 3,195°$;
A = 74,1, B + b = 170,1. Effetto termico della mescol. = 676,3 cal.
Effetto termico riferito alla grammolecola = *14,26* Cal.

Il calore molecolare di combinazione della piperidina con l'acido picrico risulta. in media, di *20,56* grandi calorie.

Alla concentrazione di 0,5 ÷ 0,6 circa per cento, in acqua, poco meno che la metà del picrato appare scissa nei suoi componenti.

Alla concentrazione di 0,5 ÷ 2 circa per cento in alcool al 95 %, parrebbe combinato per circa $^{11}/_{20}$, e alla concentrazione di circa 4 % [esper. 7) soluz. sovrasatura] sarebbero combinati circa $^{14}/_{20}$ del picrato, a parte, naturalmente, le complicazioni che si possono avere nelle formazioni del sistema « solvente-acido-base ».

Acido picrico e chinolina (punto di fusione del picrato: 204°):

1) Ac. picrico gr. 3,018, chinolina gr. 1,700, in gr. 373,4 di soluz. alcool.; equiv. del sist. = 242,2. Innalz. di temp. dovuto alla reaz. = 0,735°; calore della reazione = 178 cal.;
calore molecolare di combinazione = *13,50* Cal.
2) Ac. picrico gr. 3,110, chinolina gr. 1,752, in gr. 452,6 di soluz. acquosa; equiv. del sist. = 467,2. Innalz. di temper. dovuto alla reaz. = 0,371°; calore della reazione = 173,3 cal.;
calore molecolare di combinazione = *12,77.* Cal.

Il calore molecolare di combinazione della chinolina con l'acido picrico è, in media, di *13,2* grandi calorie circa: molto prossimo quindi a quello della piridina.

Acido picrico e tetraidrochinolina (p. di fus. del picrato: 141,5°):

1) Ac. picrico gr. 2,906, tetraidrochinolina gr. 1,687, in gr. 458,3 di soluzione acquosa;
equiv. del sist. = 472,8. Innalz. di temper. dovuto alla reaz. = 0,257°; calore della reazione = 121,5 cal.;
calore molecolare di combinazione = *9,58* Cal.
2) Ac. picrico gr. 2,530, tetraidrochinolina gr. 1,460, in gr. 472,5 di soluzione acquosa;
equiv. del sist. = 484,7. Innalz. di temper. dovuto alla reaz. = 0,239°; calore della reazione = 115,8 cal.;
calore molecolare di combinazione = *10,48* Cal.
3) Ac. picrico gr. 3,453, tetraidrochinolina gr. 2,005, in gr. 375 di soluzione alcoolica;
equiv. del sist. = 243,6. Innalz. di temper. dovuto alla reaz. = 0,601°; calore della reazione = 146,4 cal.;
calore molecolare di combinazione = *9,71* Cal.

In media, il calore molecolare di combinazione dell'acido picrico con la tetraidrochinolina sarebbe di circa *9,9* grandi calorie.

Come si vede dai dati sovraesposti, i calori di combinazione dell'acido picrico con le basi in questione ànno dunque un valore abbastanza elevato, come è giustificato dalla natura stessa delle basi.

Nella seguente tabella riassumiamo i risultati principali, ponendoli a confronto con i valori delle costanti di dissociazione elettrolitica, che sono state determinate (1):

	Costante di dissociazione elettrolitica				Cal. di comb. del picrato
	Dil.	K	t^o	Autori	
Piridina	50 ÷ 600	$2,3 \times 10^{-9}$	25°	Lundén	13,84 C.
Piperidina	8 ÷ 256	$1,6 \times 10^{-3}$	»	Bredig	20,56 »
Chinolina	60 ÷ 256	1×10^{-9}	»	»	13,20 »
Tetraidrochinolina . .	—	—	—	—	9,58 »
Ac. picrico	33 ÷ 500	$1,6 \times 10^{-1}$	18°	Rothmund	—

I calori di combinazione da noi determinati si riferiscono però ai due corpi (acido e base), che reagiscono allo stato puro (rispettivamente solido-cristallino e liquido) per formare il picrato cristallino. Il solvente non è che un intermediario, per facilitare la reazione.

In soluzione diluita i picrati di queste basi sono, come abbiamo veduto per la piridina, parzialmente dissociati nei due componenti acido e base (più profondamente quello della base più debole); e tale dissociazione si mantiene anche quando la soluzione è satura, o soprasatura rispetto al sale. Naturalmente, la determinazione del solo calore di combinazione in soluzione non è sufficiente a dimostrare in qual forma il sale si trovi dissociato, perchè, data la energia dell'acido in questione, si avrà anche una parziale dissociazione elettrolitica.

(1) Landolt-Börnstein-Roth, *Tabelle*. 1912.

Chimica-fisica. — *Elettrolisi di acidi organici: acido fenilpropiolico* [1]. Nota di B. L. VANZETTI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

La scomposizione elettrolitica dell'acido acetilenbicarbonico e del suo sale potassico in soluzione, nelle condizioni da me sperimentate precedentemente [2], si presenta come una delle più semplici e più facilmente interpretabili, tra tutte quelle che io ebbi occasione di studiare da alcuni anni a questa parte. In ultima analisi si è visto che, impiegando una corrente di sufficiente intensità, l'acido brucia completamente all'anodo, formando ossido di carbonio ed anidride carbonica. Nessuna sintesi, dovuta a residui anodici, ò potuto constatare.

Era interessante di vedere se questa grande facilità alla scomposizione, dovuta evidentemente alla presenza del triplo legame nella molecola dell'acido acetilenbicarbonico, si manteneva anche nel più semplice derivato della serie aromatica: l'acido fenilpropiolico. L'acido fenilpropiolico, che si differenzia già notevolmente dall'acido acetilenbicarbonico per essere monobasico anzichè bibasico, è ben lungi dal possedere l'energia di quest'ultimo, che si può paragonare all'acido solforico. L'acido fenilpropiolico si può collocare tuttavia tra il formico e l'ossalico, o, meglio, tra il formico ed il maleico, a lato dell'acido tartronico, od ossimalonico. La sua costante di dissociazione elettrolitica è $5,9 \times 10^{-3}$ a 25°, per una diluizione $60 \div 963$ (W. Ostwald).

L'acido fu preparato dal cinnamico seguendo le prescrizioni di Liebermann e Sachse ed avendo cura soprattutto di eliminare completamente l'alogeno dall'acido cinnamico bromurato.

La elettrolisi fu eseguita sul sale potassico dell'acido fenilpropiolico, ad una concentrazione di circa 28 %. Non si potè eseguire la elettrolisi sulla soluzione acquosa dell'acido libero, perchè esso è molto poco solubile nell'acqua; e non si potè adottare in nessun caso il sètto poroso per separare lo spazio anodico dal catodico. Anche in mancanza di sètto poroso, specialmente se la cellula è piccola e non si provvede ad una viva agitazione del liquido, può accadere che, dopo alcuni minuti, la corrente non passi

[1] Lavoro eseguito nel laboratorio di chimica generale della R. Università di Padova, diretto dal prof. G. Bruni. La parte sperimentale fu eseguita con la collaborazione del laureando C. L. Spica.

[2] Questi Rendiconti, vol. XXIV, 1° sem., pag. 611 (1915).

più, in causa di un forte deposito di acido libero, che va ad incrostare l'anodo.

La provetta, in cui si fece l'elettrolisi del sale, aveva un diametro di circa 4 cm. L'anodo era costituito da una spirale di platino filo; superficie immersa circa 12 cm^2; una rete di platino, disposta attorno l'anodo, funzionava da catodo.

Il cilindro era chiuso da un tappo di gomma in cui entravano, oltre ai due elettrodi, un termometro, un tubo per l'uscita dei gas ed un agitatore ad elica munito di chiusura a mercurio.

Furono saggiate, da prima, piccole densità di corrente, ma senza alcun altro effetto che la scomposizione di acqua. Quasi nessuna scomposizione organica si manifesta con densità al di sotto di 25 $A \times dm^2$ se si ha cura di raffreddare con ghiaccio la soluzione, in modo che la temperatura non arrivi ai 20°; se la temperatura sale al disopra di 50°, incomincia a rendersi manifesta una scomposizione, per lo svolgimento di CO_2. Contemporaneamente però diminuisce la quantità di ossigeno, che si svolge all'anodo.

I. *Durata dell'elettrolisi*: 4 ore.

$A \times dm^2$	8.3	16.6	16.6	25	25	25	25	25
t^0	12°	12°	19°	19°	50°	52°	45°	70°
Sost. non sat.	0	0	0	0	0	0	0	0
CO_2	3.9*	2.9*	0	0	0	1.6	2.4	3.6
O_2	31.6	31.6	30.1	31.6	29 7	30.5	30.1	—
O_2/H_2	0.48	0.48	0.42	0.46	0.42	0.44	0.44	—

II. *Durata dell'elettrolisi*: 47 ore. Nelle prime ore si ebbe:

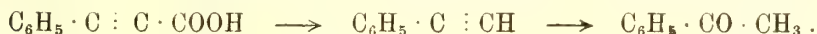
$A \times dm^2$	41.5	66	75	66	75	66	25	16 6
t^0	73°	95°	92°	85°	80°	95°	70°	56°
Sost. non sat.	0.4	0.2	0.2	0	0.3	0	0.1	0
CO_2	3.1	7.2	7.9	4.2	7.4	11.3	12.6	3.5
O_2	25.5	24.7	23.9	29 8	22.1	18.3	25.4	30.2
O_2/H_2	0.35	0.35	0.35	0.45	0.31	0.35	0.41	0.45

* L'anidride carbonica trovata in queste due analisi è dovuta al carbonato alcalino con cui si è saturato l'acido per formarne il sale.

Il più caratteristico fatto di questa elettrolisi è che non si è mai potuto constatare la presenza di ossido di carbonio nei gas della scomposizione.

Di là da una certa temperatura si svolgono invece piccole quantità di composti non saturi, assorbibili dal bromo e dal reattivo solforico.

La ricerca dell'acetilene, che si presenta talora nella scomposizione elettrolitica di composti aromatici, diede risultato negativo. Nelle prime ore dell'elettrolisi si ebbe invece marcatissimo odore di acetofenone, del quale, sulle prime, non era facile di spiegar l'origine. C. Glaser ([1]), ha trovato che riscaldando acido fenilpropiolico con acqua a 120°, si forma fenilacetilene, il quale poi, per addizione di 1 molecola d'acqua, può fornire acetofenone:

$$C_6H_5 \cdot C \vdots C \cdot COOH \longrightarrow C_6H_5 \cdot C \vdots CH \longrightarrow C_6H_5 \cdot CO \cdot CH_3 .$$

Una reazione analoga, evidentemente, avviene anche nella elettrolisi; ed è molto probabile che tra i prodotti di scomposizione si trovi, quindi, anche il fenilacetilene. Ma la scomposizione stessa è troppo lenta perchè si possano separare quantità di tali prodotti riconoscibili all'analisi. Si può tuttavia escludere che tali sostanze traggano origine da una semplice scomposizione per le elevate temperature della soluzione elettrolizzata. Alcune prove a parte dimostrano facilmente che la soluzione stessa del sale può sopportare anche un prolungato riscaldamento a 120°, senza che una alterazione del prodotto si renda manifesta.

È però un fatto facilmente constatabile, che le reazioni secondarie di questi processi elettrolitici presentano spesso molta analogia con le reazioni che ànno luogo nei processi termici di scomposizione.

La comparsa dell'anidride carbonica durante il processo di elettrolisi ad elevate temperature si potrà attribuire in parte al carbossile dell'acido; ma non deve sfuggire il fatto che, contemporaneamente alla comparsa del CO_2, si nota una diminuizione dell'ossigeno. Una parte di esso viene quindi fissata sulla molecola organica, e contribuisce alla formazione del CO_2. Ciò si vede molto bene nelle due piccole tabelle sopra riportate, confrontando il contenuto percentuale di CO_2 nella miscela gasosa colle quantità di ossigeno svoltesi, o, meglio ancora, col rapporto $O_2:H_2$, che va diminuendo man mano che la temperatura sale mentre cresce il CO_2.

Non si può quindi più parlare di una semplice scomposizione elettrolitica, perchè anche l'ossigeno anodico entra in azione contro la molecola dell'acido.

Nonostante la presenza del triplo legame, l'acido fenilpropiolico presenta dunque una grande stabilità all'elettrolisi, contrariamente a quanto ho potuto constatare per l'acido acetilenbicarbonico.

In questo, l'acido fenilpropiolico si avvicina moltissimo all'acido benzoico, col quale à comuni molte altre proprietà, quali la poca solubilità,

([1]) Liebig's Annalen, *154*, pag. 151.

la volatilità con vapor d'acqua, la sublimabilità. Esso si ritrova in massima parte inalterato dopo il passaggio della corrente, come se si trattasse di un acido minerale; e le piccole quantità di prodotti secondarî, di aspetto oleoso, che si separano in seguito ad una scomposizione forzata (forte densità di corrente e temperatura piuttosto elevata), provengono da fatti, che non sono certo in relazione diretta col processo elettrolitico, ma derivano da reazioni molto meno chiare e non prevedibili, come sono quelle che ànno la loro origine nei processi di ossidazione anodica

La formazione di acido benzoico, che avrebbe potuto considerarsi verosimile, come conseguenza di una completa ossidazione della catena carbonica, pare non abbia luogo. In nessun caso ho potuto isolare questo acido, nè comunque constatarne la presenza nelle soluzioni saline del prodotto sottoposto ad elettrolisi.

Patologia vegetale. — *Un'esperienza sull'azione reciproca fra radici micotrofiche di piante diverse.* Nota di L. PETRI, presentata dal Socio G. CUBONI.

E già noto da lungo tempo come l'olivo vegeti assai stentatamente in vicinanza di boschi di quercie; un tal fatto può essere spiegato sia come una conseguenza dell'eccessivo sfruttamento del terreno o di un particolare stato di stanchezza di questo, sia anche come un effetto dell'antagonismo che eventualmente potrebbe verificarsi fra le radici delle due specie di piante. Si tratta infatti di due apparati radicali essenzialmente diversi per il loro modo di diffondersi nel terreno e per la struttura delle loro estremità assorbenti. Mentre nelle quercie è costante la trasformazione della maggior parte delle radichette in micorize ectotrofiche, nell'olivo le radici micotrofiche sono tutte di tipo endotrofico.

È ormai dimostrato che i funghi concorrenti alla produzione di una categoria di micorize sono sistematicamente diversi da quelli che dànno origine all'altra. È quindi ammissibile che una lotta per lo sfruttamento del terreno possa verificarsi fra i funghi simbiotici di alberi a micorize endotrofiche e quelli di alberi a micorize ectotrofiche, con una conseguenza sensibile per la pianta ospite, tanto ammettendo un'utilità della simbiosi per l'albero, come negando un vero e proprio mutualismo fra fungo e radici, giacchè resta sempre possibile il danno che una data specie potrebbe risentire dall'azione di un micelio, il cui parassitismo è solo tollerato dalle radici di un'altra sorta di piante. A questo riguardo anzi è stato più volte oggetto di discussione il parassitismo che i funghi delle micorize potrebbero esercitare, in condizioni eccezionali, sulle stesse radici, all'estremità delle quali ordinariamente si trovano in un armonico rapporto di simbiosi. Non esiste

alcuna seria obbiezione contro la probabilità di una tale azione parassitaria sulle radici di altre piante, le quali con tali funghi non entrano in simbiosi.

Da queste considerazioni muove un'esperienza eseguita su quercie ed olivi con lo scopo di stabilire i rapporti che vengono a costituirsi fra gli apparati radicali di queste due piante quando si trovino a vegetare in uno spazio limitato di terreno, in modo da obbligare le loro radici a svilupparsi a reciproco contatto.

Una pianta d'olivo di 3 anni venne piantata, insieme con una piccola querce, della stessa età, in un vaso di fiori di 40 cm. di apertura, in modo che i due fusti si trovassero alla distanza di circa 10 cm. l'uno dall'altro.

In un altro vaso similmente preparato, fra i due fusti e i due apparati radicali, a guisa di piano divisorio, venne posto uno strato di letame dello spessore di 8 cm. Le due coppie di piante vennero lasciate in queste condizioni per 4 anni. La vegetazione dell'olivo si è conservata un po' meno vigorosa nel vaso non concimato, in confronto a quello concimato.

La querce, astrazion fatta dai danni dovuti all'attacco dell'oidio, ha mostrato uno sviluppo meno vigoroso dell'olivo.

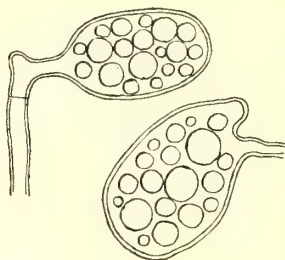
Questo primo resultato dimostra, intanto, che, a parità di età e d'impianto, l'olivo può vantaggiosamente sostenere la lotta per lo sfruttamento del terreno contro la querce, le radici della quale non posseggono quindi nessuna azione nociva su quelle dell'olivo.

Nel valutare questo resultato, conviene tener conto delle sfavorevoli condizioni di vegetazione nelle quali la querce si trova rispetto all'olivo, giacchè, dato il volume limitato di terreno, le radici della prima, per il loro più rapido accrescimento, assai più presto risentono della deficienza di spazio.

Questo inconveniente è diminuito nel vaso concimato, dove i due apparati radicali possono trovare abbondante materiale nutritivo in uno spazio di terreno relativamente molto ristretto. In questo caso, anche l'azione dei micelii delle micorize, sia fra di loro, sia sulle rispettive radici, è alquanto modificata da quella che può sussistere in un terreno povero di materiali nutritivi [1]: una condizione, quindi, meno favorevole per stabilire l'eventuale azione nociva del micelio delle micorize della querce sulle radici dell'olivo, o viceversa.

L'esame accurato delle radici di un anno della querce, cresciute a contatto con quelle dell'olivo nel terreno non concimato, ha dimostrato l'esistenza di brevi zone brune, in corrispondenza delle quali la corteccia primaria, in via di esfogliazione per la formazione della prima peridermide, presenta un processo di umificazione avanzata.

[1] È noto che in un terreno ben concimato i funghi delle micorize degli alberi si comportano come semplici commensali, del tutto innocui (cfr. L. Mangin, in *Nouv. arch. du Museum d'hist. nat.* 5ème sér., 1910).

Al microscopio simili zone di tessuto imbrunito mostrano qua e là delle vescicole irregolarmente ovali, lobate, di dimensioni che oscillano fra i 35-45 μ e i 65-75 μ. Queste vescicole, che sono rappresentate nella figura qui unita, hanno parete ispessita, giallastra, con un contenuto costituito da sostanze grasse.

Vescicole formate dall'endofita radicale dell'olivo sulle radici della querce (Ingr. $\frac{500}{1}$).

Esse si originano all'estremità di grossi filamenti di micelio di 6-9 μ di spessore. La formazione di queste vescicole avviene negli strati profondi del parenchima corticale. In alcune sezioni ne sono state osservate a contatto della peridermide.

I caratteri del micelio e delle vescicole corrispondono esattamente a quelli del micelio e delle vescicole che normalmente si trovano nelle micorize endotrofiche dell'olivo. Quale significato si deve attribuire a questo fatto? Ho già mostrato, in altri lavori [1], che il micelio esterno delle micorize endotrofiche, dopo la morte di queste, può vivere da saprofita sulle radici in decomposizione, giungendo anche a formare quei filamenti moniliformi aerei che sono stati considerati come fruttificazioni conidiche (Bernard).

Nel caso ora descritto, non si ha questo sviluppo superficiale, ma bensì uno intercellulare, con formazione di vescicole, quale avviene nel parenchima vivente della corteccia primaria. La penetrazione nelle radici di un anno della querce avviene, senza dubbio, poco prima della formazione della peridermide. Non si può quindi parlare che di un debole parassitismo esercitato sopra un tessuto morente.

Il danno risentito dalle radici per questa infezione non può essere che trascurabile. Si verifica solo un'accelerazione della morte della corteccia primaria in alcuni punti, ciò che può portare, eccezionalmente, alla formazione di piccoli cancri. Se il fatto non sembra avere un'importanza pratica, dal punto di vista delle nostre cognizioni sulle micorize, rappresenta un dato nuovo per ciò che riguarda l'azione parassitaria, che, indipendentemente dai

[1] Petri L., *Studî sulle malattie dell'olivo* (*Mem. d. staz. di patologia veg.*, Roma, G. Bertero 1911).

rapporti normali di simbiosi, certi funghi possono esercitare sulle radici delle piante superiori.

È interessante il fatto che le radici di un anno dell'olivo non presentano alcuna traccia d'infezione da parte dell'endofita delle radichette, ciò che potrebbe far concludere che la ricettività per questo organismo, a una certa distanza dall'apice, sia molto minore nelle radici dello stesso olivo che non quella offerta dalle radici della querce. Il micelio ectotrofico di queste ultime sembra esser privo di qualsiasi azione parassitaria sull'olivo. Così pure la specificità dei due funghi nella formazione delle micorize resta ben confermata dall'esperienza; infatti, nè le radici dell'olivo hanno presentato delle micorize ectotrofiche, nè quelle della querce micorize endotrofiche.

Riferendoci ora al deperimento degli olivi, più volte osservato in vicinanza di boschi di quercie, si può concludere che la causa di tale deperimento va cercata nell'eccessivo sfruttamento del suolo da parte del bosco, o in un eventuale marciume radicale per *Dematophora*, sviluppatasi sui residui sotterranei del bosco stesso. Un'azione dannosa, dovuta al micelio delle micorize della querce, deve essere assolutamente esclusa.

Fisiologia. — *Osservazioni sulla tigmotassi nei Parameci.* Nota del prof. G. A. Elrington [1], presentata dal Socio L. Luciani.

Lo scopo principale delle presenti osservazioni fu di determinare il rapporto tra la reazione tigmotattica e le variazioni termiche dell'ambiente. In occasione delle osservazioni preliminari, potemmo seguire anche gli effetti che sui parameci in tigmotassi vengon prodotti dall'urto di altri parameci o colpidii, nuotanti in giro. Essendo i risultati di queste osservazioni non privi di un certo interesse, abbiamo creduto opportuno di unirle alle altre in questa Nota preventiva.

Il termine « tigmotassi » indica le reazioni presentate dagli organismi agli stimoli di contatto da parte di corpi solidi. Tra gli infusorî ciliati si presta molto bene il paramecio allo studio di queste reazioni di contatto. Come Jennings, Pütter ed altri hanno dimostrato, basta porre pochi parameci in una goccia di acqua contenente frammenti di sostanza organica: bacterii, fibre di cotone, o piccoli pezzetti di carta sfibrata, ecc. Dopo un certo tempo, variabile, alcuni dei parameci diventano positivamente tigmotattici, assumendo una posizione caratteristica di riposo addosso all'oggetto solido.

[1] Insegnante nel Collegio Internazionale « Angelico » di Roma. Le ricerche furono fatte nell'Istituto fisiologico dell'Università di Bonn, nel semestre di estate del 1913, per consiglio e sotto la guida del prof. M. Verworn.

Essi generalmente aderiscono al corpo solido o coll'estremità anteriore oppure col fianco. In ogni caso le ciglia, che sono a contatto col corpo estraneo, sono immobili. Le ciglia della doccia orale, di solito, continuano a battere, mentre quelle delle altre regioni del corpo sono spesso tutte immobili o pulsanti solo in certe regioni. Se le ciglia sono tutte immobili, esse generalmente giacciono in direzione obliqua alla superficie del corpo: quelle di un lato sono dirette all'innanzi; quelle dell'altro lato, all'indietro.

Effetti dell'urto da parte di individui nuotanti liberamente. — I preparati per l'osservazione contenevano un certo numero di colpidii insieme coi parameci. I colpidii nuotavano in giro liberamente, venendo, così, spesso a urtare contro i parameci fermi per tigmotassi. Nel maggior numero dei casi l'urto non modificava la reazione di contatto. L'animale rimaneva fermo, o, al più, si spostava lievemente in avanti, appena cambiando di posizione. L'urto produceva, però, un certo effetto sui movimenti delle sue ciglia. Se un colpidio o paramecio veniva, per es., nel nuoto, a toccare l'estremo posteriore di un individuo fermo per tigmotassi, si osservava che le ciglia dell'estremo anteriore reagivano battendo più energicamente. Le ciglia delle altre regioni del corpo, se erano immobili, rimanevano in tale stato. Alcune volte il protozoo nuotante liberamente veniva a toccare un punto della superficie laterale dell'individuo fermo; allora spesso si vedeva che reagivano, muovendosi, le ciglia di un punto situato nella superficie del lato opposto a quello urtato. L'eccitamento prodotto dall'urto nel protoplasma, urto che non era sufficiente a modificare la tigmotassi, determinava, per così dire, in via riflessa, un movimento localizzato in alcune ciglia lontane. Il protoplasma dei parameci sembra, quindi, essere dotato di proprietà di *conduttività*, oltre che di proprietà di *eccitabilità*, come ogni sostanza vivente.

Effetti delle variazioni termiche. — I preparati erano fatti in goccia pendente, in cui era incluso un pezzetto di carta bibula sfibrata. La goccia era montata sulla cavità di un tavolino scaldabile di Pfeiffer. I parameci provenienti dalla cultura erano centrifugati e lavati due o tre volte in acqua pura. L'intervallo, che precedeva la reazione di tigmotassi allo stimolo di contatto, era nei diversi individui molto variabile; ciò che è stato osservato anche da altri. Appena alcuni individui si fermavano per tigmotassi, si leggeva la temperatura nel termometro annesso all'apparecchio; poi si faceva lentamente salire la temperatura, col far circolare una corrente di acqua calda. In altre osservazioni si sostituiva acqua fredda all'acqua calda.

Prendendo in esame dapprima i risultati ottenuti coll'aumento di temperatura, troviamo che già una lieve elevazione termica bastava per modificare profondamente la reazione al contatto. Il grado preciso, in cui i parameci interrompevano la loro posizione, era variabile e apparentemente indi-

pendente dalla temperatura in cui si erano fermati per tigmotassi. Per una temperatura iniziale oscillante tra 15° e 19° C, trovammo che la reazione tigmotattica cessava ad una temperatura oscillante tra 22° e 30° C. Facendo allora scendere lentamente la temperatura, si notava il punto in cui la tigmotassi tornava ad essere positiva. Se poi si faceva immediatamente risalire la temperatura, in generale si osservava che la reazione negativa avveniva a un grado di temperatura superiore che non nel primo esperimento. Ciò risulta chiaramente dalla seguente esperienza:

La temperatura iniziale era 18° C.; la tigmotassi negativa avvenne a 29°; tigmotassi positiva si ebbe di nuovo a 27° C.; e la seconda reazione negativa si ebbe a 33° C.

È probabile che ciò sia dovuto ad una aumentata produzione di CO_2 la quale, secondo Jennings e altri osservatori, favorisce la reazione di tigmotassi nei parameci. In ogni modo, dalle mie ricerche non è confermata l'affermazione di Pütter [1], che i parameci cessino di reagire positivamente allo stimolo di contatto, soltanto quando la temperatura è salita a 37° C. Una temperatura molto più bassa basta a produrre questo effetto.

Anche l'abbassamento di temperatura produce reazione negativa. Sotto l'azione del freddo i parameci, fermi, dapprima cominciano a muovere le ciglia, e poi si distaccano dall'oggetto e nuotano energicamente nell'acqua. In una serie di osservazioni facemmo alternativamente abbassare, e poi salire, e quindi di nuovo abbassare e così via, la temperatura. Vedemmo che una discesa di 1° a 3°, di solito, bastava a provocare la reazione negativa, come dimostra il seguente esperimento (esp. IV):

La temperatura ini ziale era di 16° C., a cui alcuni individui mostrarono tigmotassi positiva; la reazione negativa fu provocata da 15°; a 13°, tutti gli individui, che erano fermi in tigmotassi, si misero in energico movimento. La temperatura tornò ad elevarsi a 14°, in cui si ripresentò la reazione positiva, che fu interrotta di nuovo a 13°. Tornando a far salire la temperatura, alcuni individui ridivennero fermi per tigmotassi. Un ulteriore aumento della temperatura a 20° provocò la reazione negativa.

Un altro esperimento merita ancora essere ricordato (esp. X). La temperatura iniziale della reazione positiva era di 17°,5. A 14° avvenne reazione negativa, e a 13° alcuni individui ridivennero fermi per tigmotassi: individui che però presentarono reazione negativa abbassando la temperatura a 10°. I movimenti dei protozoi, a tale temperatura, erano però molto lenti.

[1] A. Pütter, *Studien über Thigmotaxis bei Protisten*, Arch. f. Physiol., 1900, Supplem.

L'annessa tabella riassume i risultati delle esperienze.

Esperimento	+ t	— T.	+ T.	— T.	+ T.	— T (1)
1	18°	22°	. .°	. .°	. .°	. .°
2	17,5	22	22	27	. .	. .
3	18	?	17	13	14,5	23
	. .	. .	. .	. .	16	24
4	16	15	14	13	14	20
	. .	13	. .	. .	15	. .
5	16,5	15	. .	. .	. .	. .
6	15	13	sino a 5°. tutti in movimento			
7	15,5	25	20	10	. .	. .
8	16	26	21	16,5	17	14
9	15	25	18	. .	. .	. .
10	17,5	14	13	10	. .	. .
11	16	13	. .	. .	. .	. .
12	16	13	14	13	. .	. .
	. .	. .	15	. .	. .	. .
13	18	15	. .	. .	. .	. .
14	20	18	17	13	15	13 ecc.
	. .	. .	. .	. .	. .	12
15	18	29	27	33	29	33
16	19	29	. .	. .	. .	. .
	. .	30	. .	. .	. .	. .
17	19	29	. .	. .	. .	. .
	. .	30	. .	. .	. .	. .

Concludendo, possiamo dire:

1) lievi variazioni termiche al di sopra o al disotto della temperatura, in cui i parameci mostravano tigmotassi positiva, bastano a interrompere la reazione, producendo tigmotassi negativa;

2) la reazione positiva sembrerebbe dipendere non solo dallo stimolo di contatto, ma anche da certe condizioni interne o stati fisiologici degli organismi reagenti, poichè in un dato preparato, in cui apparentemente le condizioni esterne sono identiche per tutti gli individui, soltanto un certo numero di essi reagisce positivamente allo stimolo di contatto.

(1) Le indicazioni + T e — T stanno a significare i gradi di temperatura, che provocavano la reazione di tigmotassi positiva o negativa.

Fisiologia. — *Su di alcuni mezzi chimici di difesa contro il freddo* (¹). Nota preventiva di A. MONTUORI e R. POLLITZER, presentata dal Socio L. LUCIANI.

Il meccanismo con cui gli animali omotermi riescono a conservare pressochè immutata la temperatura del loro corpo in ambienti freddi, già noto nelle sue linee generali, è stato meglio chiarito da una serie di nostre ricerche che ci hanno ora condotto ad escogitare dei mezzi farmacologici con cui si può riuscire a rendere più resistenti gli animali nella lotta contro le basse temperature. L'esposizione sommaria dei risultati ottenuti con questi mezzi forma l'oggetto della presente Nota preventiva.

Era noto, da parecchio tempo, che, quando gli omotermi si trovano esposti a temperature abbastanza più basse di quella del loro corpo, compensano in parte l'aumentata perdita di calore producendone una maggiore quantità: questa maggiore produzione è dovuta, per la massima parte, alla esagerazione del tono generale dei muscoli determinata da un riflesso termico.

Circa dieci anni fa Montuori (²) precisò il meccanismo di questa termogenesi compensativa, dimostrando che nel sangue di un animale raffreddato artificialmente si trovano sostanze che, iniettate in un altro normale, esagerano in quest'ultimo la produzione di calore. Tali sostanze si formano nei muscoli in contrazione: sicchè l'aumento della termogenesi, determinato dal freddo, dipende non tanto dalle più energiche contrazioni muscolari che questo direttamente provoca, quanto soprattutto da sostanze ipertermizzanti che produce il muscolo contratto e che eccitano la termogenesi in tutto l'organismo.

La integrità dei rapporti tra muscoli e sistema nervoso rappresenta una condizione essenziale per la produzione di questi corpi ipertermizzanti, poichè gli animali in cui viene distrutto o cocainizzato il midollo spinale, oppure vengono paralizzate col curaro le giunture neuro-muscolari, anche quando vengono raffreddati forniscono un sangue che, iniettato in altri animali, abbassa la termogenesi anzichè esagerarla.

Anche i così detti centri termici, scoperti da Aronshor e Sachs, agiscono con un meccanismo analogo, poichè il sangue di conigli, resi ipertermici con

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto fisiologico della R. Università di Roma, diretto dal prof. L. Luciani.

(²) A. Montuori, *Ricerche biotermiche*, pag. 30 (1904).

la puntura del corpo striato, esagera la termogenesi come dimostrò Montuori ([1]) e come confermarono poi le osservazioni di Mansfeld ([2]).

Da queste ricerche potè dunque concludersi che *uno dei più potenti mezzi di regolazione termica in ambiente freddo è la formazione di corpi esageranti la produzione di calore e che si formano nei muscoli per l'intermezzo del sistema nervoso.*

Recentissime ricerche eseguite da noi due, ora in corso di pubblicazione ([3]), hanno confermato la esattezza di questo concetto e ci hanno di più rivelata un'azione negativa che il sistema nervoso può alle volte spiegare nelle forme esagerate di raffreddamento.

In perfetto accordo colle precedenti vedute, noi constatammo che la iniezione venosa o peritoneale di sangue di cavie, modicamente e lentamente raffreddate, è capace di preservare dalla ipotermia altre cavie tenute egualmente in un ambiente freddo. Se però le cavie che fornirono il sangue erano sottoposte ad un raffreddamento eccessivo (per es., fino alla scomparsa del riflesso oculo-palpebrale), si aveva un effetto opposto; la iniezione cioè del loro sangue in altre cavie rendeva queste meno resistenti al raffreddamento. Quest'ultimo fatto, debitamente vagliato, è di una importanza considerevole inquantochè ci presenta da un nuovo punto di vista la influenza del sistema nervoso nella lotta degli omotermi contro le basse temperature.

Fino a che il raffreddamento non raggiunge il punto di deprimere o sospendere la funzione del sistema nervoso centrale, questo interviene attivamente ed eccita i muscoli alla produzione di sostanze ipertermizzanti, mantenendo alla sua norma il livello termico. Ma quando la sottrazione di calore operata dall'ambiente è tale da rendere insufficiente la iperproduzione, allora il sistema nervoso, primo a risentirsi della ipotermia, più non è capace di intervenire, e l'animale si trova nelle stesse condizioni di quelli che siano privi dei normali rapporti tra muscoli e sistema nervoso; si formano cioè sostanze che deprimono i processi di termogenesi ed aggravano il raffreddamento.

Da quanto si è esposto si deduce adunque che il raffreddamento degli omotermi e la morte per freddo non dipendono solo dalla insufficienza della termogenesi compensativa e dei meccanismi protettori contro la dispersione di calore. Vi è un altro fattore, molto importante, che le citate nostre ricerche hanno messo in evidenza: ed è la insufficienza funzionale del sistema nervoso, per cui si formano nell'organismo sostanze che, invece di esagerare la termogenesi, la riducono considerevolmente.

([1]) A. Montuori, *Il sistema nervoso e la termogenesi.* Gazz. internaz. di medicina (1905).

([2]) Zentralbl. f. Phys., Bd. XXVII (1913).

([3]) A. Montuori e R. Pollitzer, *Sull'adattamento alle basse temperature e sulla morte per raffreddamento.* Archivio di farmacologia e scienze affini, anno XX (1915).

Data questa nuova condizione del modo con cui si determina la incapacità dell'organismo a lottare contro le basse temperature, ne viene di conseguenza che, oltre i movimenti volontarî che direttamente o indirettamente esagerano la produzione di calore, noi possiamo provvedere ad una difesa immediata dal freddo esagerando con opportuni mezzi farmacologici la funzionalità del sistema nervoso, in modo da impedirne l'esaurimento. Potrà essere questo un espediente che, accompagnato ad una dieta opportuna, diventa un mezzo complementare di protezione per l'uomo costretto a vivere nei climi freddi.

I risultati delle nostre ricerche — che esponiamo qui in modo sommario, rimettendoci, per i dettagli, alla pubblicazione definitiva — ci hanno dimostrato la possibilità di applicare alla pratica i criterî provenienti dalle ricerche teoriche. Scopo principale delle nostre indagini sperimentali è stato quello di trovare delle sostanze atte ad eccitare il sistema nervoso centrale, in modo da esagerare la formazione dei corpi ipertermizzanti ed impedire secondariamente la produzione di quelli ipotermizzanti che determinano, come si è detto, lo squilibrio termico e l'abbassamento della temperatura.

Con questo modo di procedere noi non abbiamo indagato (come si è fatto già da molti) la influenza di determinate sostanze sulla termogenesi normale; ma, in base alle nostre precedenti ricerche, abbiamo cercato di vedere se esistano degli eccitanti del sistema nervoso i quali in dosi moderate sieno capaci di esagerarne la funzione termo-regolatrice contro il freddo, e soprattutto di impedirne quella depressione che come, abbiamo esposto, è la più grave causa della ipotermia premortale. Possono infatti trovarsi degli eccitanti che, mentre non sono capaci di elevare la temperatura del corpo in ambienti temperati, riescono invece ad impedire l'ipotermia negli ambienti freddi In modo analogo, benchè diametralmente opposto, gli antipiretici, mentre non sono in grado di agire sulla normale temperatura, esercitano un effetto ipotermizzante quando questa è abnormemente elevata.

La semplicissima tecnica veniva indicata dallo scopo stesso delle nostre indagini. Si trattava di collocare in un ambiente freddo (ghiacciaia) alcuni animali, somministrare loro determinate sostanze ed osservare il decorso delle variazioni della loro temperatura in confronto di altri animali testimoni, tenuti nello stesso ambiente, della stessa specie e grandezza ed egualmente alimentati. Come animali di esperimento scegliemmo le cavie ed i cani. Le cavie, perchè, essendo esse, come è noto, provviste di mezzi regolatori contro il freddo alquanto limitati, si prestavano meglio ad esagerare le condizioni sperimentali del raffreddamento; i cani, perchè, regolando essi, all'opposto, abbastanza bene la loro temperatura, potevano dimostrare con maggiore evidenza la eventuale azione protettiva delle sostanze che si sperimentavano.

Il numero di tali sostanze sarà certamente esteso da ulteriori ricerche; ci siamo per ora limitati allo studio degli eccitanti generali di uso più

comune (come l'alcool, il caffè, il the), e ciò principalmente per non uscire dal campo delle possibili applicazioni all'uomo.

Tralasciando di riferire sui tentativi diretti a determinare le dosi minime efficaci e quelle massime dannose, nonchè altri dettagli di tecnica, esporremo in modo riassuntivo i più importanti risultati delle nostre osservazioni. Tali osservazioni, per le cavie, furono eseguite mettendole in una ghiacciaia a temperatura oscillante fra 5° e 8° C. Per i cani si ricorse invece alla immersione totale in un bagno di acqua corrente a 5°-10° C.

1. *Alcool.* — Nelle cavie le iniezioni sottocutanee di piccole dosi (1 cc. di alcool anidro per kgr., debitamente diluito) impediscono momentaneamente l'abbassamento della temperatura che si verifica nelle altre testimoni. In secondo tempo però la ipotermia diventa più accentuata in confronto delle cavie normali.

Dosi più forti (5-10 ccm. per kgr.) determinano sin dall'inizio una accentuata ipotermia. Nei cani non siamo riusciti a trovare una dose minima che preservi anche temporaneamente dalla ipotermia.

2. *Caffeina e caffè.* — Nelle cavie e nei cani la iniezione di piccole dosi di caffeina (mmgr. 5 a 10 per kgr.) rende gli animali abbastanza più resistenti al raffreddamento. A differenza dell'alcool, la cui azione transitoriamente favorevole si determina subito dopo l'iniezione, la caffeina comincia ad esplicare gli effetti circa 20 minuti dopo; ma questi sono duraturi e non vengono seguìti da una fase negativa.

L'azione del caffè, dato per bocca o ipodermicamente, è risultata sostanzialmente identica. Non è stato possibile di precisarne la posologia; solo diremo che abbiamo adoperato degli infusi a caldo di buon caffè torrefatto, e ne abbiamo somministrato tanto quanto approssimativamente poteva corrispondere alla quantità di caffeina verificata attiva. Una osservazione interessantissima per la pratica è stata quella che nei casi in cui, invece dell'infuso a caldo, abbiamo adoperato una decozione di caffè, facendola bollire per un certo tempo, e specialmente quando aggiungevamo per una seconda decozione nuovo caffè a quello già bollito, abbiamo avuto sempre effetti del tutto opposti; gli animali si raffreddavano più intensamente di quelli testimoni. Questa osservazione può spiegarsi con la ipotesi che molti corpi ad azione ipotermizzante (piridina, idrochinone etc.) che si producono nella torrefazione, passino a preferenza nel decotto, anzi che nella infusa di caffè.

3. *Caffeina (o caffè) ed alcool.* — L'idea di somministrare simultaneamente queste due sostanze, per studiarne l'azione sui poteri termo-regolatori, ci venne suggerita da alcune antiche ricerche di Lewis [1] il quale notò che, mentre la caffeina o l'alcool separatamente non producono notevole esagera-

[1] Lewis, *Caffeine in its relashionship to animal heat and as contrasted with alcohol.* Journ. of mental science, 1882, pag. 167.

zione della termogenesi, prese insieme nelle stesse dosi provocano un aumento della produzione di calore. Noi pensammo che se questo miscuglio era capace di agire sulla termogenesi normale, durante cioè la fase di perfetto equilibrio con l'ambiente, avrebbe potuto con maggiore efficacia, somministrata in dosi anche minori, sostenere le funzioni del sistema nervoso durante il raffreddamento e mantenerne il potere termoregolatore.

I risultati furono dei più incoraggianti, sia con l'alcool e caffeina, sia con l'alcool e caffè, ed egualmente spiccati nelle cavie e nei cani. Tra le constatazioni fatte in proposito, crediamo più importante di riferire che:

a) L'alcool a piccole dosi, addizionato a caffè o a corrispondente quantità di caffeina, lungi dall'esercitare un'azione deprimente sulla temperatura degli animali in ambiente freddo, la esalta sempre: e non solo immediatamente dopo la somministrazione, per poi abbassarla, come avviene quando lo si propina da solo.

b) A preservare dal raffreddamento si richiedono dosi di caffè e di caffeina molto minori, quando sono associate a piccole dosi di alcool, rispetto a quelle che avrebbero un'azione molto debole quando fossero date senza aggiunta di alcool. Nelle cavie, per es., con una dose di mmgr. 4 di caffeina + $^1/_2$ cc. di alcool per kgr., si ottengono effetti molto più notevoli che non con 15 mmgr. di sola caffeina. Nei cani producono gli stessi effetti dosi eguali di caffeina associate appena ad un quarto della quantità di alcool richiesta per le cavie.

c) L'azione protettiva del miscuglio alcool-caffeina perdura per parecchie ore; molto più efficace e duratura diventa quando il miscuglio si propina lentamente, o per iniezioni ipodermiche ripetute, o per ingestione orale, in modo che l'assorbimento diventi lento e continuo.

d) La quantità dell'alcool da associarsi alla caffeina deve essere molto limitata, e, in ogni modo, non deve sorpassare quella che da sola sarebbe capace di preservare l'animale, benchè temporaneamente, dall'ipotermia.

e) Nei limiti ristretti dei nostri esperimenti non abbiamo riscontrato assuefazione a questo trattamento misto di alcool-caffeina. Le cavie ed i cani cui abbiamo somministrato per parecchî giorni di seguito questo miscuglio, raffreddati sistematicamente, hanno sempre dimostrato una molto più energica resistenza al freddo rispetto agli animali testimonî.

f) La resistenza al freddo degli animali trattati con alcool e caffeina può essere misurata dal fatto che essi presentano una temperatura che può superare di circa 7° quella degli animali testimonî tenuti nello stesso ambiente freddo. Alle volte il raffreddamento uccide i testimonî, mentre quelli trattati con caffeina e alcool sopravvivono.

4. *The.* — Il grande uso di the tra gli abitanti dei climi freddi, ed il contenuto in caffeina di questa droga, avrebbero potuto far credere *a priori* ad una azione del the analoga a quella del caffè e della caffeina. I risultati

però dei nostri moltissimi esperimenti furono sempre opposti; la somministrazione di the abbassa la resistenza al raffreddamento anche quando al the si unisca l'alcool. Alle volte gli animali morivano per raffreddamento, mentre i testimonî restavano in vita. È difficile dare per ora una spiegazione di questo fatto che forse dipenderà dalla qualità e dal modo di preparazione delle foglie da noi adoperate.

Esperimenti analoghi sono in corso circa l'influenza di altre sostanze sulla regolazione contro il freddo e circa il loro meccanismo di azione. Nella speranza di poter presto procedere ad applicazioni dirette sull'uomo, abbiamo creduto opportuno, per ora, di render noti questi primi risultati, che

I) ci additano nel caffè (preparato per infuso a caldo, e non per decotto), addizionato a piccole dosi di alcool, un mezzo comodo e piacevole, capace di combattere con efficacia gli effetti perniciosi delle basse temperature;

II) dimostrano inutile, se non dannoso, l'uso del the;

III) confermano ancora una volta l'azione deleteria del solo alcool sui poteri regolatori della temperatura del corpo in ambienti freddi.

Chimica fisiologica. — *Ricerche sull'Arginasi.* IV. *Sulla presenza dell'Arginasi nel fegato dell'embrione umano.* Nota del dott. Antonino Clementi, presentata dal Socio L. Luciani.

Chimica fisiologica. — *Ricerche sulla scissione enzimatica dei Polipeptidi per azione di estratti di tessuti e di organi animali.* I. *Azione del fegato di uccelli, di anfibî, di rettili, di pesci e di invertebrati sulla d-l-leucilglicina.* Nota del dott. Antonino Clementi, presentata dal Socio L. Luciani.

Queste Note saranno pubblicate in uno dei prossimi fascicoli.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Millosevich presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Soci stranieri Darboux, Greenhill e Pickering. Fa inoltre particolare menzione del vol. XII, ser. 2ª, degli *Atti dell'Istituto Botanico dell'Università di Pavia*, offerto in dono dal Socio Briosi; di una *Commemorazione* del Socio Lorenzoni, detta dal profes-

sore ANTONIAZZI a Padova; nonchè del volume pubblicato in occasione del compiutosi Centenario della Società Elvetica delle scienze naturali, e di alcune Note a stampa dell'astronomo SEE.

Il Presidente BLASERNA offre, a nome del Socio CELORIA, la pubblicazione intitolata: *Anno bisestile 1916 — Articoli generali del calendario ed effemeridi del sole e della luna per l'orizzonte di Milano*; e poi, a nome dell'Università di San Domingo, il: *Codigo organico y reglamentario de Educacion comun.*

CONCORSI A PREMI

Lo stesso PRESIDENTE ricorda che col 31 dicembre dell'anno che sta per terminare, scadono i concorsi: ai consueti due premî Reali, di cui uno riguarda le *Scienze biologiche* e l'altro l'*Archeologia*; ai premî del Ministero della Pubblica Istruzione per la *Matematica*, per la *Storia civile e discipline ausiliarie*, e per la *Pedagogia*; al premio di Fondazione *Santoro* e al premio *Sella.*

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 5 dicembre 1915.

Antoniazzi A. M. — Commemorazione di Gius. Lorenzoni. Padova, 1915. 8°.

Articoli generali del calendario ed effemeridi del sole e della luna per l'orizzonte di Milano (con appendice). Milano, 1915. 8°.

Briosi G. — Atti dell'Istituto botanico dell'Università di Pavia. Ser. 2ª, vol. 12°. Milano, 1915. 8°.

Centenaire de la Société helvétique des sciences naturelles, 1815-1915. Genève, 1915. 8°.

Colomba L. — Ricerche sui giacimenti di Brosso e di Traversella. Parte 2ª. I fenomeni di metamorfismo e di deposito nei giacimenti inferiori di Traversella (Estr. dalle « Memorie della R. Accad. delle scienze di Torino », ser. II, vol. LXVI). Torino, 1915. 8°.

Colomba L. — Sopra alcune relazioni esistenti fra i caratteri strutturali della leucite e le sue giaciture (Estr. dal « Boll. della Soc. geol. ital. », vol. 34°). Roma, 1915. 8°.

Darboux G. — Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géometriques du calcul infinitesimal. 2ᵉ partie. Paris, 1915. 8°.

Delgrosso M. — Note mineralogiche sulla valle di Cogne. (Estr. dal « Boll. della Soc. geol. ital. », vol. XXXIV). Roma, 1915. 8°.

D'Erasmo G. — La fauna e l'età dei calcari e attioliti di Pietraroja (prov. di Benevento). (Estr. dalla « Palaeontographia italica », vol. XXI). Pisa, 1915. 8°.

Fiallo Cabral A. — Codigo organico y reglamentario de educacion comun. Edicion oficial. Santo Domingo, 1915. 8°.

Fiallo Cabral A. — Cuadro sinoptico de la doctrina biocosmica de la gravitacion universal y de la jeneracion de los mundos. Santo Domingo, 1915. 8°.

Greenhill G. — Note on d.r Searle's experiment on the harmonic motion of a rigid body. (Extr. from the « Proceedings of the Cambridge philosophical Society », vol. XVIII, Part. III). Cambridge, 1913. fol.

Longo B. — Delectus sporarum-seminum-fructuum, anno MCMXV collectorum, quae hortus botanicus Senensis pro mutua commutatione offert. Senis, 1915. 8°.

Meli R. — Escursioni tecnico-geologiche eseguite con gli allievi ingegneri della R. Scuola di applicazioue di Roma, 1912-13. Roma, 1913. 8°.

Meli R. — Sopra un lembo di argille plioceniche affioranti presso la salina di Corneto-Tarquinia in provincia di Roma. (Estr. dal « Boll. della Società geol. ital. », vol. 34°). Roma, 1915. 8°.

Muskens L. J. J. — Anatomical research about cerebellar connections. (Repr. from « Proceedings of the Meeting of Friday », 1907). s. l. 1907. fol.

Muskens L. J. J. — Die Projektion der radialen und ulnaren Gefühlsfelder auf die postzentralen und parietalen Grosshirnwindungen. (Separat-Abdruck aus « Neurologisches Centralblatt », 1912). Leipzig, 1912. 8°.

Muskens L. J. J. — An anatomico-physiological study of the posterior longitudinal bundle in its relation to forced movements. (Repr. from « Brain », vol. XXXVI). London, 1914. 8°.

Muskens L. J. J. — Genesis of the alternating pulse. (Repr. from the « Jour-

nal of physiology », vol XXXVI). s. l. nec d. 8°.

MUSKENS L. J. J. — Rolling movements and the ascending vestibulary connections. (Fasciculus Deiters ascendens). (Repr. from. « Proceedings of the Meeting of saturday », vol XVI). s. l. nec d. 8°.

MUSKENS L. J. J. — Studies on the maintenance of the equilibrium of motion and ist disturbances, so-called « forced movements ». (Repr. from the « Journal of physiology », vol. XXXI). s. l. nec d. 8°.

PASSERINI N. — I semi di frumento germogliati a raccolta, e loro influenza sulla futura campagna granicola. (Estr. dalla « Agricoltura toscana », an. VI). Firenze, 1915. fogl.

PAULOV A. — Fisiko matematiceskie edikt. Tiflis, 1915. 8°.

PICKERING E. C. — The study of the stars. (Repr. from « Science », vol. XXXIX). s. l. nec d. 8°.

SEE T. J. J. — The Euler-Laplace theorem on the decrease of the eccentricity of the orbits of the heavenly bodies under the secular action of a resisting medium. Mare Island, California, 1915. 8°.

SEE T. J. J. — The faint equatorial belts on the planet Neptune. (Abdr. aus den « Astr. Nachr. », Bd. 194). Kiel, 1913. 8°.

SEE T. J. J. — Some remarkable views of Plato and Newton on the origin of the planets. (Abdr. aus den « Astr. Nachr. », Bd. 201). Kiel, 1915. 8°.

STENHOUSE R. W. — Bovine tubercolosis in man. (Repr. From. « Reading University College Review », vol. V). Cambridge, 1915. 8°.

TEODORO G. — Osservazioni sulla ecologia delle cocciniglie, con speciale riguardo alla morfologia e alla fisiologia di questi insetti. (Estr. dal « Redia », vol. XI). Firenze, 1915. 8°.

CONCORSI A PREMI

ERRATA-CORRIGE

Le figure 4^bis^ e 6 delle pag. 457 e 459 devono essere scambiate fra loro di posto.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 dicembre 1915.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Segue in terza pagina.

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 25 gennaio 1916.* **N. 12.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 *dicembre* 1915.

Volume XXIV°. — Fascicolo 12°

e Indice del volume.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 dicembre 1915.

F. D'Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica celeste. — *Sul problema piano dei tre corpi. Caso limite in cui una delle masse è infinitesima.* Nota III [1] del Socio T. Levi-Civita [2].

16. — Richiami concernenti il problema ristretto e le sue trasformazioni in coordinate isoterme.

Facciamo una breve digressione sul problema ristretto nella sua impostazione abituale, al fine di agevolare il confronto colle formule, che dedurremo poi per il problema regolarizzato, nel caso limite di m_0 infinitesimo.

Rammentiamo in conformità che, quando la massa di P_0 è trascurabile, P_1 e P_2 possono ruotare uniformemente attorno al loro comune centro di gravità O con velocità angolare n, legata alle masse e alla distanza $\overline{P_1 P_2} = \rho^2$ dalla nota relazione

$$n^2 = \frac{f(m_1 + m_2)}{\rho^6} \qquad (f \text{ costante d'attrazione}).$$

In questa ipotesi, si tratta di determinare il moto della massa infinitesima P_0, attratta dai due centri mobili P_1, P_2 secondo la legge di Newton. La corrispondente funzione delle forze $U^{(1)}$, riferita all'unità di massa (essendo, colle nostre notazioni, $\overline{P_0 P_1} = \rho_2^2$, $\overline{P_0 P_2} = \rho_1^2$), vale

$$U^{(1)} = f\left(\frac{m_1}{\rho_2^2} + \frac{m_2}{\rho_1^2}\right). \tag{58}$$

[1] Cfr. Nota I, pp. 421-433; Nota II, pp. 485-501.

[2] Pervenuta all'Accademia il 30 settembre 1915.

Detta **a** l'accelerazione assoluta di P_0, si ha, dalla legge fondamentale della meccanica,

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} U^{(1)} .$$

Riferiamo il moto ad un sistema di assi Oxy uniformemente ruotanti assieme coi corpi P_1, P_2, coll'origine nel baricentro O (punto fisso), e orientati in guisa che il verso di rotazione $x \rightarrow y$ coincida con quello dei due corpi.

Per il teorema di Coriolis, le componenti dell'accelerazione **a** rispetto a questi assi hanno le espressioni

$$a_x = \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x ,$$

$$a_y = \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y ,$$

designando evidentemente x, y le coordinate del corpo P_0, e il punto sovrapposto derivazione rispetto al tempo t.

Le equazioni cartesiane del moto di P_0 sono pertanto

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x = \dfrac{\partial U^{(1)}}{\partial x} , \\[2ex] \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y = \dfrac{\partial U^{(1)}}{\partial y} , \end{cases}$$

cui si attribuisce notoriamente forma canonica, introducendo le ausiliarie (componenti della velocità assoluta di P_0)

$$p_x = \dot{x} - ny \quad , \quad p_y = \dot{y} + nx .$$

Si ha infatti, da queste stesse posizioni,

$$\dot{x} = p_x + ny \quad , \quad \dot{y} = p_y - nx ,$$

mentre, col tenerne conto, le precedenti equazioni del moto si possono scrivere

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{\partial U^{(1)}}{\partial x} + np_y \quad , \quad \frac{dp_y}{dt} = \frac{\partial U^{(1)}}{\partial y} - np_x .$$

I secondi membri sono ordinatamente le derivate rapporto a p_x, p_y, e le derivate rapporto ad x, y cambiate di segno della funzione

$$F = \tfrac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - n(xp_y - yp_x) - U^{(1)} .$$

Perciò le quattro equazioni costituiscono complessivamente un sistema canonico di funzione caratteristica F, essendo coniugate $x, p_x ; y, p_y$.

Supposto, per fissar le idee, che l'asse Ox sia diretto verso P_1, le ascisse di P_1, P_2 sono rispettivamente

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2} \rho^2 \quad , \quad - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \rho^2 ;$$

l'ascissa del loro punto medio M è quindi espressa da

$$l = \frac{1}{2} \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \rho^2 . \tag{59}$$

Trasportando l'origine da O in M (sempre coll'asse delle x diretto verso P_1), l'ordinata y e le componenti p_x, p_y della velocità assoluta rimangono inalterate, mentre l'ascissa x va posta eguale a $x + l$. Con questa sostituzione, la precedente espressione di F diviene

$$F = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - n(xp_y - yp_x) - nlp_y - U^{(1)} . \tag{60}$$

Ecco la funzione caratteristica del problema ristretto, riferito ad assi mobili *coll'origine nel punto medio delle masse finite.*

Si può assegnare in modo semplice una trasformazione *canonica*, mediante cui si sostituiscono alle coordinate cartesiane x, y (e loro coniugate p_x, p_y) coordinate isoterme qualisivogliano u, v (con convenienti p_u, p_v).

Sia infatti

$$x + iy = f(u + iv) , \tag{61}$$

con f funzione regolare arbitraria dell'argomento $u + iv$, il legame complesso che compendia le formule di trasformazione fra le coordinate cartesiane x, y e le coordinate curvilinee u, v: si intende che, per la biunivocità della trasformazione, va ritenuta diversa da zero (nel campo di valori che si considerano) la derivata $f'(u + iv)$, con che si può invertire la (61), ricavandone $u + iv$ quale funzione di $x + iy$.

Fra i differenziali delle due coppie di variabili sussiste la relazione

$$dx + i\,dy = f'(u + iv)\ (du + i\,dv) , \tag{62}$$

e quindi anche, cambiando i in $-i$,

$$dx - i\,dy = f'(u - iv)\ (du - i\,dv) . \tag{62'}$$

Se ora si pone

$$p_x + ip_y = \frac{1}{f'(u - iv)} (p_u + ip_v) , \tag{63}$$

con che rimangono manifestamente definite le due quantità reali p_u, p_v in funzione lineare di p_x, p_y, si ha complessivamente nelle (61) e (63) una trasformazione fra le due quaderne (x, y, p_x, p_y), (u, v, p_u, p_v), la quale risulta canonica perchè dà luogo all'identità

$$p_x dx + p_y dy = p_u du + p_v dv .$$

La verificazione è immediata, bastando moltiplicare membro a membro la (63) e la (62'), il che dà

$$(p_x + ip_y)(dx - i\,dy) = (p_u + ip_v)(du - i\,dv) .$$

L'equaglianza delle parti reali si traduce appunto nella relazione caratteristica della canonicità.

Rileviamo ancora una conseguenza delle (61), (63), che si ottiene moltiplicandole membro a membro, ed è

$$(64)\qquad (p_x + i p_y)(x - iy) = \frac{f(u - iv)}{f'(u - iv)}(p_u + i p_v) =$$
$$= \frac{f(u - iv) f'(u + iv)}{|f'|^2}(p_u + i p_v).$$

17. — Applicazione alle coordinate ellittiche.

Assumiamo in particolare

$$(65)\qquad x + iy = \tfrac{1}{2}\rho^2 \cosh(u + iv),$$

le x, y essendo le coordinate cartesiane coll'origine in M, di cui al § precedente. Con ciò le u, v rappresentano notoriamente coordinate ellittiche, le linee $u = \text{cost}$ essendo ellissi e le $v = \text{cost}$ iperboli omofocali: i fuochi comuni cadono nei due punti $\pm \frac{1}{2}\rho^2$ dell'asse delle ascisse, cioè, nel caso nostro, in P_1, P_2.

Le espressioni delle distanze focali $\overline{P_0P_2}, \overline{P_0P_1}$, che, secondo le notazioni dei §§ precedenti, vanno ordinatamente designate con ρ_1^2, ρ_2^2, si ottengono tosto dalla (65), aggiungendo ad entrambi i membri $\pm \frac{1}{2}\rho^2$, e prendendo i moduli. Si trova così

$$(66)\qquad \rho_1^2 = \rho^2 \left|\cosh \frac{1}{2}(u + iv)\right|^2, \quad \rho_2^2 = \rho^2 \left|\sinh \frac{1}{2}(u + iv)\right|^2.$$

Si ha poi, considerando la (65), e scrivendo brevemente f, f' per $f(u + iv), f'(u + iv)$:

$$f = \frac{1}{2}\rho^2 \cosh(u + iv),$$

$$f' = \frac{1}{2}\rho^2 \sinh(u + iv),$$

$$|f'|^2 = \frac{1}{4}\rho^4 |\sinh(u + iv|^2 = \rho^4 |\sinh \tfrac{1}{2}(u + iv)|^2 |\cosh \tfrac{1}{2}(u + iv)|^2,$$

e quindi, badando alle (66),

$$(67)\qquad |f'|^2 = \rho_1^2 \rho_2^2.$$

Con questa determinazione di $|f'|^2$, la (63), eguagliando il quadrato dei moduli dei due membri, porge

$$(68)\qquad p_x^2 + p_y^2 = \frac{1}{\rho_1^2 \rho_2^2}(p_u^2 + p_v^2).$$

Ove si noti che, per $f = \frac{1}{2}\rho^2 \cosh(u+iv)$, si ha ulteriormente

$$f(u-iv)\,f'(u+iv) = \frac{1}{4}\rho^4 \cosh(u-iv)\sinh(u+iv)$$

$$= \frac{1}{8}\rho^4 (\sinh 2u + i \sin 2v)\,,$$

dalla (64), eguagliando i coefficienti di i, ricaviamo

$$xp_y - yp_x = \frac{1}{8}\frac{\rho^4}{\rho_1^2\rho_2^2}(\sin 2v \,.\, p_u + \sinh 2u \,.\, p_v)\,.$$

Infine dalla (63), scritta

$$p_x + i p_y = \frac{f'(u+iv)}{|f'|^2}(p_u + i p_v)\,,$$

segue

$$p_y = \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{\rho_1^2\rho_2^2}(\cosh u \sin v \,.\, p_u + \sinh u \cos v \,.\, p_v)\,.$$

Ne deduciamo, badando alla (59),

$$n(xp_y - yp_x) + nlp_y =$$

$$= \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} n \left\{ \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(xp_y - yp_x) + \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right)\frac{1}{2}\rho^2 p_y \right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} n \frac{\rho^4}{\rho_1^2\rho_2^2}\left[\sin v \left\{ \frac{1}{m_1}(\cosh u + \cos v) - \frac{1}{m_2}(\cosh u - \cos v) \right\} p_u + \right.$$

$$\left. + \sinh u \left\{ \frac{1}{m_1}(\cosh u + \cos v) + \frac{1}{m_2}(\cosh u - \cos v) \right\} p_v \right]\,.$$

Quest'ultima relazione, ove si noti che, per le (66), è

$$(66')\quad \left\{ \begin{aligned} \rho_1^2 &= \rho^2 \left| \cosh\frac{u}{2}\cos\frac{v}{2} - i \sinh\frac{u}{2}\sin\frac{v}{2} \right|^2 = \\ &\rho^2 \left(\cosh^2\frac{u}{2}\cos^2\frac{v}{2} + \sinh^2\frac{u}{2}\sin^2\frac{v}{2} \right) = \\ &\rho^2 \left(\cosh^2\frac{u}{2} - \sin^2\frac{v}{2} \right) = \frac{1}{2}\rho^2(\cosh u + \cos v)\,, \\ \rho_2^2 &= \rho^2 \left| \sinh\frac{u}{2}\cos\frac{v}{2} + i \cosh\frac{u}{2}\sin\frac{v}{2} \right|^2 = \\ &\rho^2 \left(\sinh^2\frac{u}{2}\cos^2\frac{v}{2} + \cosh^2\frac{u}{2}\sin^2\frac{v}{2} \right) = \\ &\rho^2 \left(\cosh^2\frac{u}{2} - \cos^2\frac{v}{2} \right) = \frac{1}{2}\rho^2(\cosh u - \cos v)\,, \end{aligned} \right.$$

si scrive più semplicemente

$$(69)\quad n(xp_y - yp_x) + nlp_y =$$
$$= \frac{1}{2} n \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{\rho^2}{\rho_1^2 \rho_2^2} \left\{ \sin v \left(\frac{\rho_1^2}{m_1} - \frac{\rho_2^2}{m_2} \right) p_u + \sinh u \left(\frac{\rho_1^2}{m_1} + \frac{\rho_2^2}{m_2} \right) p_v \right\}.$$

Le formole (68) e (69) conducono immediatamente all'espressione trasformata della funzione caratteristica:

$$(70)\quad F = \frac{1}{2\rho_1^2\rho_2^2} \left[p_u^2 + p_v^2 - n \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \rho^2 \left\{ \sin v \left(\frac{\rho_1^2}{m_1} - \frac{\rho_2^2}{m_2} \right) p_u + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sinh u \left(\frac{\rho_1^2}{m_1} + \frac{\rho_2^2}{m_2} \right) p_v \right\} \right] - U^{(1)},$$

in cui $U^{(1)}$ è sempre definita dalla (58), coll'intesa evidente che ρ_1^2, ρ_2^2 si devono risguardare ovunque sostituiti coi loro valori (66') in funzione di u, v.

Il sistema canonico corrispondente,

$$(71)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial p_u}, & \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial p_v}; \\ \dfrac{dp_u}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial u}, & \dfrac{dp_v}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial v}, \end{cases}$$

ammette l'integrale

$$(72)\quad F = C,$$

C essendo la così detta costante di Jacobi.

18. — La regolarizzazione di N. Thiele.

Immaginiamo attribuito a C un valore ben determinato, e poniamo

$$(73)\quad F^* = \rho_1^2 \rho_2^2 (F - C).$$

Si ha identicamente

$$\frac{\partial F^*}{\partial u} = \rho_1^2 \rho_2^2 \frac{\partial F}{\partial u} + (F - C) \frac{\partial(\rho_1^2 \rho_2^2)}{\partial u}.$$

In quanto si tratti di soluzioni del sistema (71), che si riferiscono all'assunto valore di C, il secondo termine del secondo membro si annulla, e rimane

$$\frac{\partial F^*}{\partial u} = \rho_1^2 \rho_2^2 \frac{\partial F}{\partial u};$$

analogamente per le altre derivate parziali rapporto a v, p_u, p_v.

Da questo risulta subito che, ove nelle (71) si sostituisca al tempo t una variabile indipendente ausiliaria $t^\star$, definita mediante la posizione

$$dt = \rho_1^2 \rho_2^2 \, dt^\star , \tag{74}$$

si è condotti ad un nuovo sistema canonico di funzione caratteristica $F^\star$:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dt^\star} &= \frac{\partial F^\star}{\partial p_u} , & \frac{dv}{dt^\star} &= \frac{\partial F^\star}{\partial p_v} ; \\ \frac{dp_u}{dt^\star} &= -\frac{\partial F^\star}{\partial u} , & \frac{dp_v}{dt^\star} &= -\frac{\partial F^\star}{\partial v} , \end{aligned} \right. \tag{71'}$$

equivalente a (71), *nell'àmbito delle* ∞^3 *soluzioni che corrispondono ad uno stesso valore*: C *di* F, *e zero di* $F^\star$. *Quest'ultimo sistema presenta sul primo il vantaggio di essere completamente regolarizzato.* Infatti, attesa l'espressione (70) di F, e l'espressione (58) di $U^{(1)}$, nella nuova funzione caratteristica $F^\star$, viene a scomparire il denominatore $\rho_1^2 \rho_2^2$, talchè la $F^\star$ stessa si presenta come polinomio di secondo grado in p_u, p_v, i cui coefficienti, esplicitati a norma delle (66'), sono tutti trascendenti intere in u, v.

La regolarizzazione del problema ristretto, così conseguita, non differisce sostanzialmente da quella, già effettuata da N. Thiele [1], delle equazioni di secondo ordine in u, v. Si ritrovano infatti immediatamente le equazioni del Thiele, eliminando p_u, p_v dalle (71'): d'altra parte era pur stato notato che le equazioni regolarizzate di Thiele sono suscettibili di forma canonica, coll'introduzione di opportune ausiliarie p_u, p_v [2]. Nulla dunque di nuovo in questi nostri sviluppi concernenti il problema ristretto: essi hanno soltanto lo scopo di facilitare il confronto con le formule che ora ci accingiamo a dedurre come caso limite della nostra trattazione generale concernente il problema piano.

19. — Ritorno al problema regolarizzato per m_0 infinitesima — Ordine di grandezza di varii elementi — Approssimazione dei primi due ordini.

Supponiamo m_0 trascurabile di fronte ad m_1, m_2, tutto rimanendo del resto finito: intendiamo con ciò che, assieme con m_1, m_2, anche le coordinate del sistema regolarizzato e loro derivate vanno trattate come quantità finite.

(1) *Recherches numériques concernant des solutions périodiques d'un cas spécial du problème des trois corps* (troisième Mémoire), Astronomische Nachrich., B. CXXXVIII, 1895, pp. 1-10.

(2) Cfr. la prefazione della bella Memoria del sig. Birkhoff, *The restricted problem of the three bodies*, testè apparsa nei Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XXXIX, pp. 265-334. In questa Memoria è anche assegnata (§ 5) una nuova trasformazione regolarizzante, puramente algebrica.

In tale ipotesi, ove si riprenda per un momento l'espressione (2) di T, e si noti che, in base alla (4), $m_1^\star$, $m_2^\star$ contengono m_0 a fattore, appare ovviamente, dalle (18), che lo stesso accade per le componenti dei due vettori $\boldsymbol{\Xi}$, $\mathbf{H}$ secondo gli assi Ox_1, Ox_2.

Ne viene, badando alle (23), (29), che, dei vettori $\boldsymbol{\Omega}$ e $\boldsymbol{X}$, sono invece le componenti Ω_0, X_0 affètte dal fattore m_0.

Ciò posto, si noti che dalla definizione (5) di U, scrivendo, come a § 15 (e seguenti), ρ per ρ_0, e ponendo per brevità

$$U^{(0)} = f\frac{m_1 m_2}{\rho^2}, \tag{75}$$

si ha

$$U = U^{(0)} + m_0 U^{(1)},$$

coll'espressione di $U^{(1)}$, già introdotta a § 16,

$$U^{(1)} = f\left(\frac{m_1}{\rho_2^2} + \frac{m_2}{\rho_1^2}\right). \tag{58}$$

Ne viene, a meno di termini di secondo ordine in m_0,

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{U^{(0)}}\left(1 - m_0\frac{U^{(1)}}{U^{(0)}}\right). \tag{76}$$

Esaminiamo ora l'ordine di grandezza dei varî termini costituenti Θ, raggruppandoli nel modo seguente:

$$\frac{1}{8Um_0\rho_1^2\rho_2^2}(\Omega_0^2 + X_0^2) = m_0 A, \tag{77}$$

$$\frac{1}{8U\rho^2}\left\{\frac{1}{m_1\rho_2^2}(\Omega_1^2 + X_1^2) + \frac{1}{m_2\rho_1^2}(\Omega_2^2 + X_2^2)\right\} = B \tag{78}$$

(si intende che scriviamo dappertutto ρ al posto di ρ_0).

A suo tempo terremo conto che

$$\Theta = m_0 A + B; \tag{79}$$

occupiamoci intanto separatamente di A e di B.

Dacchè Ω_0 e X_0 sono, come s'è detto, di prim'ordine in m_0, lo è del pari $\frac{1}{8Um_0\rho_1^2\rho_2^2}(\Omega_0^2 + X_0^2)$, ed è quindi giustificato di assumerlo sotto la forma $m_0 A$. A meno di termini di secondo ordine in m_0, si può naturalmente, nel denominatore dello stesso $m_0 A$, sostituire $U^{(0)}$ ad U.

Riferiamoci ormai a coordinate asteroidiche, badando alle prime delle (56), (57):

$$X_0 = qZ_0 \quad , \quad \Omega_0 = p_\varphi .$$

Si metta in evidenza il fattore m_0, ponendo

$$Z_0 = m_0 Z_0^\star \quad , \quad p_\varphi = m_0 p_\varphi^\star . \tag{80}$$

Si ha

$$A = \frac{1}{8U\rho_1^2\rho_2^2}(q^2 Z_0^{\star 2} + p_\varphi^{\star 2}) . \tag{77'}$$

Ponendo ancora

$$\left\{\begin{aligned}
\Omega_1^{(0)} &= \zeta_0 \cos\varphi\, p_\rho + \frac{q}{\rho}\sin\varphi\, p_\psi \;, & \Omega_1^{(1)} &= -\left(\rho\cos\varphi\, Z_0^\star + \frac{\zeta_0}{\rho}\sin\varphi\, p_\varphi^\star\right) ,\\
X_1^{(0)} &= q\sin\varphi\, p_\rho - \frac{\zeta_0}{\rho}\cos\varphi\, p_\psi \;, & X_1^{(1)} &= \frac{q}{\rho}\cos\varphi\, p_\varphi^\star \;,\\
\Omega_2^{(0)} &= -\zeta_0\sin\varphi\, p_\rho + \frac{q}{\rho}\cos\varphi\, p_\psi \;, & \Omega_2^{(1)} &= \rho\sin\varphi\, Z_0^\star - \frac{\zeta_0}{\rho}\cos\varphi\, p_\varphi^\star \;,\\
X_2^{(0)} &= q\cos\varphi\, p_\rho + \frac{\zeta_0}{\rho}\sin\varphi\, p_\psi \;, & X_2^{(1)} &= -\frac{q}{\rho}\sin\varphi\, p_\varphi^\star \;,
\end{aligned}\right. \tag{81}$$

si compendiano i varî termini delle rimanenti (56), (57), secondochè contengono o no m_0 a fattore, sotto la forma

$$\left\{\begin{aligned}
\Omega_1 &= \Omega_1^{(0)} + m_0 \Omega_1^{(1)} \;, & X_1 &= X_1^{(0)} + m_0 X_1^{(1)} ,\\
\Omega_2 &= \Omega_2^{(0)} + m_0 \Omega_2^{(1)} \;, & X_2 &= X_2^{(0)} + m_0 X_2^{(1)} .
\end{aligned}\right.$$

Ove si introducano, per brevità di scrittura, le ulteriori combinazioni

$$\left\{\begin{aligned}
\lambda_1 &= \Omega_1^{(0)}\Omega_1^{(1)} + X_1^{(0)} X_1^{(1)} ,\\
\lambda_2 &= \Omega_2^{(0)}\Omega_2^{(1)} + X_2^{(0)} X_2^{(1)} ,
\end{aligned}\right. \tag{82}$$

e si abbia riguardo alle (81), risulta subito, a meno di termini di secondo ordine in m_0,

$$\Omega_1^2 + X_1^2 = (\zeta_0^2\cos^2\varphi + q^2\sin^2\varphi)\left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}p_\psi^2\right) + 2m_0\lambda_1 ,$$

$$\Omega_2^2 + X_2^2 = (\zeta_0^2\sin^2\varphi + q^2\cos^2\varphi)\left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}p_\psi^2\right) + 2m_0\lambda_2 .$$

Mediante le (55) i due binomii $\zeta_0^2\cos^2\varphi + q^2\sin^2\varphi$, $\zeta_0^2\sin^2\varphi + q^2\cos^2\varphi$ divengono $\zeta_0^2 + q^2\gamma_1^2$, $\zeta_0^2 + q^2\gamma_2^2$, i quali, in virtù delle (48) e (48′), si identificano colle due distanze ρ_2^2, ρ_1^2. Possiamo quindi scrivere semplicemente

$$\left\{\begin{aligned}
\Omega_1^2 + X_1^2 &= \rho_2^2\left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}p_\psi^2\right) + 2m_0\lambda_1 ,\\
\Omega_2^2 + X_2^2 &= \rho_1^2\left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}p_\psi^2\right) + 2m_0\lambda_2 .
\end{aligned}\right. \tag{83}$$

È facile adesso far apparire anche in B i termini affètti dal fattore m_0.

Basta combinare la definizione (78) di B colle (76) e (83), e porre

$$(84)\quad \begin{cases} \Theta^{(0)} = \dfrac{1}{8U^{(0)}\rho^2}\left(\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}\right)\left(p_\rho^2+\dfrac{1}{\rho^2}p_\psi^2\right), \\ \Theta^{(1)} = A + \dfrac{1}{4U^{(0)}\rho^2}\left(\dfrac{\lambda_1}{m_1\rho_2^2}+\dfrac{\lambda_2}{m_2\rho_1^2}\right), \end{cases}$$

per desumerne

$$(78')\qquad B = \Theta^{(0)} + m_0(\Theta^{(1)} - A) - m_0\Theta^{(0)}\frac{U^{(1)}}{U^{(0)}}.$$

La (79) porge in conformità

$$(79')\qquad \Theta = \Theta^{(0)} + m_0\left(\Theta^{(1)} - \Theta^{(0)}\frac{U^{(1)}}{U^{(0)}}\right),$$

e la funzione caratteristica H del problema regolarizzato

$$H = \Theta - \frac{E}{U}$$

diviene

$$(85)\qquad H = H^{(0)} + m_0 H^{(1)},$$

con

$$(86)\quad H^{(0)} = \Theta^{(0)} - \frac{E}{U^{(0)}} = \frac{1}{8U^{(0)}\rho^2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\left(p_\rho^2+\frac{1}{\rho^2}p_\psi^2\right) - \frac{E}{U^{(0)}},$$

$$(87)\qquad H^{(1)} = \Theta^{(1)} - \left(\Theta^{(0)} - \frac{E}{U^{(0)}}\right)\frac{U^{(1)}}{U^{(0)}}.$$

20. — Conseguente riduzione del sistema canonico che definisce il movimento.

La (86), tenuta presente la (74), mostra che $H^{(0)}$ *non* dipende da alcuno dei quattro argomenti

$$\zeta_0\ ,\ \varphi\ ,\ Z_0^\star\ ,\ p_\varphi^\star$$

(e nemmeno da ψ). Ciò premesso, si formi il sistema canonico di funzione caratteristica $H = H^{(0)} + m_0 H^{(1)}$ nelle due quaderne coniugate

$$\begin{matrix} \rho & , & \psi & , & \zeta_0 & , & \varphi & , \\ p_\rho & , & p_\psi & , & Z_0 = m_0 Z_0^\star & , & p_\varphi = m_0 p_\varphi^\star . \end{matrix}$$

In primo luogo, a meno di termini affètti dal fattore m_0, si ha

$$(88)\quad \begin{cases} \dfrac{d\rho}{d\tau} = \dfrac{\partial H^{(0)}}{\partial p_\rho}\ , & \dfrac{d\psi}{d\tau} = \dfrac{\partial H^{(0)}}{\partial p_\psi}, \\ \dfrac{dp_\rho}{d\tau} = -\dfrac{\partial H^{(0)}}{\partial \rho}\ , & \dfrac{dp_\psi}{d\tau} = -\dfrac{\partial H^{(0)}}{\partial \psi} = 0, \end{cases}$$

le quali valgono da sole ad individuare le prime quattro incognite

$$\begin{matrix} \rho & , & \psi , \\ p_\rho & , & p_\psi , \end{matrix}$$

si intende, a meno di termini che si annullano con m_0. In questo stesso ordine di approssimazione va ritenuto (§ 1)

$$H^{(0)} = 1 ,$$

per tutte le soluzioni del sistema (88) che convengono al problema dei tre corpi, nel caso limite, di cui ora si tratta.

Le rimanenti equazioni, relative alla quaderna

$$\begin{matrix} \zeta_0 & , & \varphi & , \\ Z_0 = m_0 Z_0^\star & , & p_\varphi = m_0 p_\varphi^\star & , \end{matrix}$$

per l'indipendenza di $H^{(0)}$ da questi argomenti, si riducono a

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{d\zeta_0}{d\tau} = m_0 \dfrac{\partial H^{(1)}}{\partial (m_0 Z_0^\star)} , & \dfrac{d\varphi}{d\tau} = m_0 \dfrac{\partial H^{(1)}}{\partial (m_0 p_\varphi^\star)} , \\ m_0 \dfrac{dZ_0^\star}{d\tau} = - m_0 \dfrac{\partial H^{(1)}}{\partial \zeta_0} , & m_0 \dfrac{dp_\varphi^\star}{d\tau} = - m_0 \dfrac{\partial H^{(1)}}{\partial \varphi} , \end{array} \right.$$

ossia, più semplicemente, a

$$(89) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{d\zeta_0}{d\tau} = \dfrac{\partial H^{(1)}}{\partial Z_0^\star} , & \dfrac{d\varphi}{d\tau} = \dfrac{\partial H^{(1)}}{\partial p_\varphi^\star} , \\ \dfrac{dZ_0^\star}{d\tau} = - \dfrac{\partial H^{(1)}}{\partial \zeta_0} , & \dfrac{\partial p_\varphi^\star}{\partial \tau} = - \dfrac{\partial H^{(1)}}{\partial \varphi} , \end{array} \right.$$

costituendo evidentemente un secondo sistema canonico nelle due coppie di coniugate

$$\begin{matrix} \zeta_0 & , & \varphi , \\ Z_0^\star & , & p_\varphi^\star . \end{matrix}$$

Le variabili della prima quaderna $\rho, \psi, p_\rho, p_\psi$, che (ad eccezione di ψ) ancora figurano in $H^{(1)}$, vanno ormai risguardate come funzioni di τ, corrispondenti ad una ben determinata soluzione del sistema (88): questa può essere, *a priori*, qualunque, coll'unica restrizione che i valori iniziali rendano $H^{(0)} = 1$.

Concludendo, in questo caso limite, il sistema differenziale, da cui dipende la determinazione delle otto incognite, si scinde in due sistemi distinti. È chiaro senz'altro (in quanto si pensi all'originario problema dei tre corpi, per m_0 trascurabile di fronte alle altre due masse) che, dei due sistemi (88), (89), il primo deve corrispondere al problema dei due corpi, indivi-

duando per mezzo di ρ e di ψ (lunghezza e orientazione del segmento P_2P_1) il moto delle due masse finite m_1, m_2; mentre il secondo definisce successivamente il moto della massa infinitesima nel piano e sotto l'attrazione delle altre due.

Aggiungeremo qui appresso qualche sviluppo di controllo; in particolare ritroveremo le formole del § 17, nell'ipotesi caratteristica del problema ristretto che il moto di m_1, m_2 si riduca ad una rotazione uniforme [cioè che si tratti di una soluzione del sistema (88) nella quale ρ si mantiene costante].

21. — Verificazioni e raffronti.

a) Masse finite. — Constatiamo materialmente che il moto non perturbato dei due corpi P_1, P_2 di masse finite (m_1, m_2) dà luogo alle equazioni (88).

Immaginiamo assunte come coordinate lagrangiane del sistema costituito dai due corpi la loro distanza ρ^2 e l'inclinazione del vettore $P_1 - P_2$ sopra una retta fissa (del piano del moto): sappiamo (§ 11) che tale anomalia non è altro che 2ψ. Dacchè le distanze di P_1, P_2 dal loro baricentro O valgono rispettivamente

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2}\rho^2 \quad , \quad \frac{m_1}{m_1 + m_2}\rho^2$$

possiamo risguardare

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2}\rho^2 \quad , \quad 2\psi$$

come coordinate polari di P_1, e

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2}\rho^2 \quad , \quad 2\psi + \pi$$

come coordinate polari di P_2.

La loro forza viva complessiva è data, in conformità, da

$$T = \tfrac{1}{2} m_1 \left\{ \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 (4\rho^2\dot{\rho}^2 + 4\rho^4\dot{\psi}^2) \right\} +$$
$$+ \tfrac{1}{2} m_2 \left\{ \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 (4\rho^2\dot{\rho}^2 + 4\rho^4\dot{\psi}^2) \right\} = 2\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\rho^2(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\psi}^2),$$

il punto sovrapposto designando derivazione rispetto a t.

La funzione delle forze

$$f\frac{m_1 m_2}{\rho^2}$$

si identifica manifestamente coll' $U^{(0)}$ del § 19.

Ove si fissi il valore dell'energia totale E, e si sostituisca al tempo t una variabile ausiliaria τ definita dalla relazione differenziale

$$d\tau = U^{(0)} dt ,$$

il problema in questione equivale (trasformazione di Darboux) [1] ad altro problema dinamico, avente per forza viva

$$T = \frac{1}{U^{(0)}} \mathrm{T} = 2U^{(0)} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \rho^2(\rho'^2 + \rho^2 \psi'^2)$$

$$\left(\rho' = \frac{d\rho}{d\tau} = \frac{1}{U^{(0)}} \dot{\rho} \ , \ \psi' = \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{1}{U^{(0)}} \dot{\psi}\right) ;$$

per funzione delle forze,

$$\frac{E}{U^{(0)}} ;$$

e per costante delle forze vive l'unità.

Introducendo le coniugate

$$p_\rho = \frac{\partial T}{\partial \rho'} \quad , \quad p_\psi = \frac{\partial T}{\partial \psi'} ,$$

ed esprimendo T a loro mezzo, si ha

$$\frac{1}{8U^{(0)}\rho^2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} p_\psi^2\right) ,$$

che coincide con $\Theta^{(0)}$ per la prima delle (84).

La funzione caratteristica del sistema canonico (in ρ, ψ e loro coniugate), corrispondente al problema regolarizzato dei due corpi, è così

$$H^{(0)} = \Theta^{(0)} - \frac{E}{U^{(0)}} = \frac{1}{8U^{(0)}\rho^2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} p_\psi^2\right) - \frac{E}{U^{(0)}} ,$$

ossia proprio la $H^{(0)}$ del sistema (88), c. d. d.

Una soluzione particolare del sistema (88) si ha ovviamente, supponendo ρ costante (scelta ad arbitrio), $p_\rho = 0$. In tal caso, il valore, pure costante, di p_ψ, dovrà ritenersi legato a ρ dalla condizione che risulti $H^{(0)} = 1$. Indipendentemente da questa sua determinazione, p_ψ è legato alla velocità angolare n del moto delle due masse, in base alla definizione di n e alla seconda delle (88). Si ha infatti

$$n = 2 \frac{d\psi}{dt} = 2U^{(0)} \frac{d\psi}{d\tau} :$$

[1] R), pag. 66.

ossia, sostituendo a $\frac{d\psi}{d\tau}$ il suo valore $\frac{\partial H^{(0)}}{\partial p_\psi} = \frac{1}{4U^{(0)}\rho^4}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)p_\psi$,

$$n = \frac{1}{2\rho^4}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)p_\psi . \tag{90}$$

A questa si poteva anche pervenire, ricordando (§ 12) che p_ψ rappresenta in ogni caso il doppio del momento delle quantità di moto dei tre corpi (rispetto ad Oz).

Per $m_0 = 0$, e P_1, P_2 animati da moto circolare con velocità angolare n (attorno ad Oz), si hanno le velocità

$$\frac{m_2}{m_1+m_2}\rho^2 n \quad , \quad \frac{m_1}{m_1+m_2}\rho^2 n ,$$

e quindi i momenti di quantità di moto

$$m_1\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 \rho^4 n \quad , \quad m_2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 \rho^4 n .$$

Sommando ed eguagliando a $\frac{1}{2}p_\psi$, si è appunto ricondotti alla (90).

Ricordiamo ancora che, nel moto circolare uniforme compatibile colla legge di Newton, l'energia totale è metà dell'energia potenziale. Dobbiamo dunque avere

$$E = -\frac{1}{2}U^{(0)} . \tag{91}$$

Per ricavare questa formula in base al sistema (88), basta combinare le due condizioni

$$\frac{\partial H^{(0)}}{\partial \rho} = 0 \quad , \quad H^{(0)} = 1 .$$

La prima, tenendo conto che $p_\rho = 0$ e che $U^{(0)} = f\frac{m_1 m_2}{\rho^2}$, si scrive

$$-\frac{1}{4}\frac{1}{f\, m_1 m_2 \rho^3}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)p_\psi^2 - 2\frac{E}{f\, m_1 m_2}\rho = -\frac{2}{\rho}\left(H^{(0)}+\frac{2E}{U^{(0)}}\right) = 0,$$

e questa, per $H^{(0)} = 1$, dà appunto la (91).

Sempre per le soluzioni circolari che stiamo considerando, da

$$H^{(0)} = \Theta^{(0)} - \frac{E}{U^{(0)}} = 1,$$

come corollario della (91), si ha

$$\Theta^{(0)} = \frac{1}{2} . \tag{92}$$

b) Massa infinitesima. — Passiamo ormai al sistema (89), ritenendovi ρ e p_ψ costanti, e $p_\rho = 0$ (ψ non vi comparisce, e non c'è quindi da occuparsene).

Vogliamo constatare sulle formule l'equivalenza, concettualmente evidente, di tale sistema col sistema (71) del § 17.

All'uopo cominciamo col fissare le relazioni che intercedono fra le funzioni incognite dei due sistemi: ne trasformeremo poi uno, in modo che compariscano in entrambi le stesse incognite.

Nel sistema (71) figurano le coordinate ellittiche u, v; in (89) abbiamo invece ζ_0, φ. Il legame fra queste due coppie si assegna agevolmente, eguagliando le espressioni (in u e v da un lato, ζ_0 e φ dall'altro) delle due distanze ρ_1^2, ρ_2^2 (di P_0 da P_2 e da P_1 rispettivamente).

Dalle (66′) si ha

$$\begin{cases} \rho_1^2 = \rho^2 \left(\cosh^2 \frac{u}{2} - \sin^2 \frac{v}{2}\right), \\ \rho_2^2 = \rho^2 \left(\cosh^2 \frac{u}{2} - \cos^2 \frac{v}{2}\right), \end{cases}$$

mentre le (11) e (55) porgono

$$\begin{cases} \rho_1^2 = q^2(1 - \gamma_1^2) = \zeta_0^2 + \rho^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi, \\ \rho_2^2 = q^2(1 - \gamma_2^2) = \zeta_0^2 + \rho^2 - \rho^2 \cos^2 \varphi. \end{cases}$$

Dal loro confronto si trae

$$\zeta_0^2 + \rho^2 = \rho^2 \cosh^2 \frac{u}{2} \quad , \quad \sin^2 \varphi = \sin^2 \frac{v}{2} \quad , \quad \cos^2 \varphi = \cos^2 \frac{v}{2},$$

le quali equivalgono a

$$\zeta_0 = \pm \rho \sinh \frac{u}{2} \quad , \quad v = \pm 2\varphi + \text{multiplo arbitrario di } 2\pi .$$

Assumeremo

$$\zeta_0 = \rho \sinh \frac{u}{2} \quad , \quad \varphi = \frac{1}{2} v, \tag{93}$$

risguardando queste formule come parte di una trasformazione *canonica* fra le due quaderne $\begin{pmatrix} \zeta_0 , \varphi \\ Z_0^* , p_\varphi^* \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} u , v \\ p_u , p_v \end{pmatrix}$.

La condizione di canonicità

$$Z_0^* \, d\zeta_0 + p_\varphi^* \, d\varphi = p_u \, du + p_v \, dv$$

porge immediatamente, in base alle (93), le altre due relazioni che com-

pletano la trasformazione, e sono (eguagliando i coefficienti di du, dv nei due membri)

$$\frac{1}{2}\rho\cosh\frac{u}{2}Z_0^\star = p_u \quad , \quad \frac{1}{2}p_\varphi^\star = p_v .$$

Dacchè, per la prima delle (93), $\rho\cosh\frac{u}{2}$ vale $\left|\sqrt{\zeta_0^2+\rho^2}\right|$, che è poi q, a norma della prima delle (55) scriveremo più semplicemente

$$qZ_0^\star = 2p_u \quad , \quad p_\varphi^\star = 2p_v , \tag{94}$$

e trasformeremo il sistema (89) mercè le (93), (94).

Abbiamo anzitutto dalla (77′), in virtù delle (94),

$$A = \frac{1}{2U^{(0)}\rho_1^2\rho_2^2}(p_u^2+p_v^2) . \tag{95}$$

Le (81) poi, badando che vi si deve anche porre $p_\rho = 0$, divengono

$$\begin{cases} \Omega_1^{(0)} = \frac{q}{\rho}\sin\frac{v}{2}p_\psi & , \ \Omega_1^{(1)} = -2\left(\frac{\rho}{q}\cos\frac{v}{2}p_u + \sinh\frac{u}{2}\sin\frac{v}{2}p_v\right) , \\ X_1^{(0)} = -\sinh\frac{u}{2}\cos\frac{v}{2}p_\psi & , \ X_1^{(1)} = 2\frac{q}{\rho}\cos\frac{v}{2}p_v , \\ \Omega_2^{(0)} = \frac{q}{\rho}\cos\frac{v}{2}p_\psi & , \ \Omega_2^{(1)} = 2\left(\frac{\rho}{q}\sin\frac{v}{2}p_u - \sinh\frac{u}{2}\cos\frac{v}{2}p_v\right) , \\ X_2^{(0)} = \sinh\frac{u}{2}\sin\frac{v}{2}p_\psi & , \ X_2^{(1)} = -2\frac{q}{\rho}\sin\frac{v}{2}p_v , \end{cases}$$

e così le (82) dànno

$$\lambda_1 = -p_\psi\left(\sin v\, p_u + 2\frac{q}{\rho}\sinh\frac{u}{2}p_v\right) = -p_\psi(\sin v\, p_u + \sinh u\, p_v) ,$$

$$\lambda_2 = \quad p_\psi\left(\sin v\, p_u - 2\frac{q}{\rho}\sinh\frac{u}{2}p_v\right) = \quad p_\psi(\sin v\, p_u - \sinh u\, p_v) .$$

Si ha in conformità, dalla seconda delle (84),

$$\Theta^{(1)} = A - \frac{p_\psi}{4U^{(0)}\rho_1^2\rho_2^2\rho^2}\left\{\sin v\left(\frac{\rho_1^2}{m_1}-\frac{\rho_2^2}{m_2}\right)p_u + \sinh u\left(\frac{\rho_1^2}{m_1}+\frac{\rho_2^2}{m_2}\right)p_v\right\} ;$$

e questa, ponendovi per A l'espressione (95), e per p_ψ il suo valore

$$2n\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\rho^4$$

desunto dalla (90), diviene

$$(96)\quad \Theta^{(1)} = \frac{1}{U^{(0)}}\frac{1}{2\rho_1^2\rho_2^2}\left[p_u^2 + p_v^2 - n\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\rho^2\left\{\sin v\left(\frac{\rho_1^2}{m_1} - \frac{\rho_2^2}{m_2}\right)p_u + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sinh u\left(\frac{\rho_1^2}{m_1} + \frac{\rho_2^2}{m_2}\right)p_v\right\}\right].$$

D'altra parte, l'espressione (87) di $H^{(1)}$, ove si abbiano presenti le (91) e (92), si riduce immediatamente a

$$H^{(1)} = \Theta^{(1)} - \frac{U^{(1)}}{U^{(0)}}.$$

In virtù della (96), il confronto colla (70) porge

$$H^{(1)} = \frac{1}{U^{(0)}} F.$$

Dacchè, nelle equazioni (89), ρ e con essa $U^{(0)}$ va trattata come costante, è chiaro che basta, nelle (89) stesse, sostituire $U^{(0)} dt$ a $d\tau$ per ritrovare materialmente il sistema (71) di funzione caratteristica F.

Così è raggiunta anche la prova formale che le equazioni del problema regolarizzato in coordinate asteroidiche (nel caso limite $m_0 = 0$, e sotto l'ipotesi particolare che si mantenga costante la distanza ρ^2 delle altre due masse) dànno luogo alle consuete equazioni canoniche (71) del problema ristretto in coordinate ellittiche.

Osservazione. — Può a primo aspetto parere incongruente che dalle equazioni generali *regolarizzate* scendano per $m_0 = 0$ le (71) che *non* lo sono, ma richiedono all'uopo una trasformazione ulteriore (§ 18).

La spiegazione si ha tosto ricordando che l'algoritmo generale di regolarizzazione si appoggia essenzialmente sulla circostanza che le masse siano, tutte e tre, > 0 [1]. Nulla si può dunque pretendere *a priori* per il caso limite $m_0 = 0$. *A posteriori* risulta che, dei due sistemi parziali (88) e (89) definienti il moto in questo caso limite, il primo rimane regolarizzato (problema dei due corpi), ma non così il secondo (problema ristretto). Tanto più, perciò, appariscono interessanti le regolarizzazioni autonome di questo ultimo problema già segnalate da Thiele e da Birkhoff.

[1] Infatti, soltanto sotto tale ipotesi è legittima la conclusione [R), pag. 74; e § 7 del presente scritto] che $\frac{1}{U}$, $\frac{1}{\rho_\nu^2 U}$ $(\nu = 0, 1, 2)$, ecc. si comportano regolarmente anche in prossimità d'un eventuale urto binario.

Meccanica. — *Sullo schiacciamento polare di Nettuno.* Nota del Corrisp. E. Almansi.

1. Il movimento del satellite di Nettuno presenta delle perturbazioni che il Tisserand (*Mécanique céleste*, IV, pag. 141) attribuisce alla forma ellissoidica del pianeta ([1]).

Ammettendo che questa sia la *sola* causa delle perturbazioni del satellite, io tento qui una determinazione dello schiacciamento polare di Nettuno.

Siccome, a conseguire tale scopo, non è sufficiente la conoscenza delle perturbazioni del satellite, mi valgo ancora di una formula empirica, esprimente una relazione che sembra sussistere, per i pianeti, fra la densità media, lo schiacciamento, e la durata della rotazione.

Darò da prima questa formula, o piuttosto mostrerò per qual via si può esser condotti a stabilirla, riferendosi alla ipotesi della origine fluida dei pianeti.

2. Consideriamo una sfera fluida, le cui particelle si attraggano secondo la legge di Newton, in equilibrio. La densità sia funzione soltanto della distanza dal centro. Supponiamo di imprimere alla sfera un moto uniforme di rotazione, con velocità angolare ω, intorno ad un asse passante per il suo centro. Se il valore di ω è sufficientemente piccolo, la superficie della sfera assume una forma che differisce pochissimo da quella di un ellissoide di rivoluzione, il cui schiacciamento è piccolo dello stesso ordine di ω^2.

Indichiamo con μ la densità media della sfera, con A l'inversa dello schiacciamento, con T la durata di una rotazione, ossia $\frac{2\pi}{\omega}$; e poniamo:

$$A = c\mu T^2. \tag{1}$$

Abbiansi ora quante sfere si voglia, di raggi e masse arbitrarie, ma nelle quali le distribuzioni delle masse siano *simili*. Con questo intendiamo che, detto R il raggio di una delle sfere, di densità media μ, ϱ la densità nei punti che distano di r dal suo centro, e posto

$$\varrho = \mu \, F\left(\frac{r}{R}\right),$$

la funzione F sia la stessa per tutte. Supponiamo di imprimere alle sfere

([1]) La causa probabile delle perturbazioni del satellite di Nettuno forma oggetto di ricerche da parte del chmo prof. Armellini. Vedasi in questi Rendiconti (vol. XXIV, serie 5ª, 1° sem., fasc. 6°) una sua Nota preliminare, ove sono accuratamente raccolti i risultati delle più importanti osservazioni fino ad ora eseguite e discusse.

velocità di rotazione pure arbitrarie (ma piccolissime). Trascurando le potenze dello schiacciamento superiori alla prima, si dimostra che il coefficiente c ha lo stesso valore per tutte le sfere.

Nel caso dei pianeti il coefficiente c varia dall'uno all'altro, benchè il suo valore non subisca variazioni molto grandi. Dobbiamo pertanto ritenere che le masse dei pianeti non siano distribuite in modo simile. Esaminiamo i valori di c, mettendoli in relazione con quelli della densità media μ. *Vedremo allora che c è tanto più grande, quanto più piccola è la densità media.* Se infatti si pone

$$c = c_1 + \frac{c_2}{\mu}, \tag{2}$$

quindi

$$A = (c_1 \mu + c_2) T^2,$$

si possono attribuire a c_1 e c_2 valori positivi, uguali per tutti i pianeti, e tali che la formula precedente fornisca, per le inverse degli schiacciamenti, valori che non siano in disaccordo con quanto ci è noto dalle osservazioni.

Assumendo uguale ad 1 la densità media della Terra, e l'ora di tempo solare medio come unità di tempo, dobbiamo porre

$$c_1 = 0,49 \quad , \quad c_2 = 0,032 ,$$

onde avremo la formula

$$A = (0,49 \mu + 0,032) T^2 \tag{3}$$

che è appunto quella di cui farò uso.

Nella tabella seguente sono riportati, per la Terra, per Marte, per Giove e per Saturno, i valori di μ, di T, e della inversa dello schiacciamento quale risulta dalla formula (3) (A) e dalle osservazioni (A_0) [1].

	Terra	Marte	Giove	Saturno
μ	1	0,69	0,25	0,13
T	23,93	24,62	9,88	10,23
A	299	224	15,1	10
A_0	298	200?	15	10

Notiamo, quanto a Marte, che il valore 200, attribuito ad A_0, è molto incerto. Alcune osservazioni hanno dato, per l'inversa dello schiacciamento, un valore notevolmente maggiore.

[1] I valori di μ, T, A_0 sono ricavati dall'*Annuaire du bureau des longitudes*, a. 1915. Solo per la Terra al valore $A_0 = 293$ ho sostituito il valore $A_0 = 298$ che si accorda meglio colle più recenti osservazioni.

Per Urano ($\mu = 0{,}23$) dalle osservazioni dello Schiaparelli A risulterebbe compreso fra 11 e 13. Supponendo $A = 12$, la formula (3) darebbe circa 9 ore come durata della rotazione.

Rispetto a Mercurio e a Venere le opinioni degli astronomi, come è noto, non sono concordi. Mentre da alcuni si attribuisce a T un valore poco diverso da 24, altri ritengono che la durata della rotazione sia di gran lunga maggiore: precisamente uguale alla durata della rivoluzione siderale (Schiaparelli). Se fosse $T = 24$, essendo rispettivamente, per i due pianeti, $\mu = 1{,}1$ e $\mu = 0{,}91$, si avrebbe, dalla formula (3),

$$\text{per Mercurio:} \quad A = 330\,;$$
$$\text{per Venere:} \quad A = 275\,.$$

A valori di T maggiori di 24 corrisponderebbero valori maggiori per A, quindi valori *minori* per gli schiacciamenti.

Nessuno di questi risultati è, in sostanza, confermato o contradetto dalle osservazioni. All'osservazione Mercurio e Venere appariscono sferici: ma è da notare che in Mercurio nemmeno uno schiacciamento di $\frac{1}{330}$ sarebbe visibile; e del pari invisibile sarebbe probabilmente uno schiacciamento di Venere uguale ad $\frac{1}{275}$. Non volendo ammettere in Venere uno schiacciamento di questo ordine di grandezza, la formula (3) porterebbe ad escludere l'ipotesi della rotazione rapida.

Applicata al Sole, la formula (3) dà, in accordo colle osservazioni, uno schiacciamento inapprezzabile: circa $\frac{1}{60000}$.

Per Nettuno, ritenendo $\mu = 0{,}22$, si ha, dalla formula (2)

$$c = 0{,}635\,,$$

valore che adotterremo.

3. Siano f la costante dell'attrazione, M la massa del pianeta, a il suo raggio equatoriale, r la distanza di un punto qualunque P dal centro O del pianeta, φ l'angolo che OP forma col suo piano equatoriale.

Il potenziale del pianeta, arrestando al 2° termine il noto sviluppo in serie di funzioni sferiche, potremo rappresentarlo colla formula

$$V = fM\left\{\frac{1}{r} + \frac{ka^2}{r^3}\left(\frac{1}{3} - \operatorname{sen}^2\varphi\right)\right\}, \tag{4}$$

ove k è una costante.

Esiste una relazione che lega k, A e il rapporto

$$\lambda = \frac{a\omega^2}{g}$$

tra la forza centrifuga e la gravità sull'equatore del pianeta. Si ha precisamente

$$k = \frac{1}{A} - \frac{\lambda}{2} . \tag{5}$$

Trascurando una quantità piccola d'ordine superioro ad ω^2, nella espressione di λ potremo ritenere

$$g = \frac{fM}{a^2} \quad , \quad M = \frac{4}{3}\pi a^3 \mu ;$$

osservando, poi, che $\omega = \frac{2\pi}{T}$, e denotando con c_0 la costante $\frac{2f}{3\pi}$, avremo:

$$\lambda = \frac{2}{c_0 \mu T^2} . \tag{6}$$

Onde la formula (5) potrà scriversi:

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{c_0 \mu T^2} = k . \tag{7}$$

Se l'esame delle perturbazioni del satellite ci permetterà di determinare il valore di k, quest'ultima equazione, insieme con la

$$A = c \mu T^2 \qquad (c = 0{,}635) ,$$

ci darà dei valori *probabili* per le due incognite A e T.

Nella equazione (7), a μT^2 sostituiamo $\frac{A}{c}$. Avremo

$$\frac{1}{A}\left(1 - \frac{c}{c_0}\right) = k ,$$

quindi

$$A = \frac{h}{k} , \tag{8}$$

ove

$$h = 1 - \frac{c}{c_0} . \tag{9}$$

Il valore della costante c_0 possiamo ricavarlo dalla formula (6) applicata alla Terra ($\mu = 1$; $\lambda = 0{,}003468$). Troveremo $c_0 = 1{,}0067$. Avendo supposto, per Nettuno, $c = 0{,}635$, la formula (9) darà, per questo pianeta

$$h = 0{,}37.$$

Il Tisserand (*Méc. cél.*, IV, pag. 147), riferendosi ai valori di h per Giove e per Saturno, suppone che per Nettuno sia $h = 0,3$ [1]. Sembra più giustificato il valore che noi abbiamo attribuito ad h, deducendolo, mediante la (9), dalla formula (2), che riposa sopra osservazioni risguardanti un maggior numero di pianeti [2].

4. Vogliamo far vedere, prima di andar più oltre, come la formula (2), e conseguentemente la (3), corrisponda ad un'ipotesi, assai semplice, sulla distribuzione delle masse nei pianeti.

Riprendiamo l'espressione del potenziale V, che scriveremo

$$V = fM \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{3} ka^2 \chi \right\},$$

ponendo

$$\chi = \frac{1 - 3 \operatorname{sen}^2 \varphi}{r^3}.$$

Introduciamo la quantità m definita dalla formula

$$k = \frac{3}{5} \frac{M - m}{M} \frac{1}{A}. \tag{10}$$

Avremo allora

$$V = fM \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{5} \frac{M - m}{M} \frac{1}{A} a^2 \chi \right\},$$

ovvero

$$V = V_1 + V_2,$$

essendo

$$V_1 = \frac{fm}{r}, \quad V_2 = f(M - m) \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{5A} a^2 \chi \right\}.$$

Ora, V_1 è il potenziale di una massa m situata nel centro del pianeta; V_2 $\left(\text{a meno di termini contenenti le potenze superiori dello schiacciamento } \frac{1}{A}\right)$ è il potenziale di una massa $M - m$ distribuita uniformemente nello spazio occupato dal pianeta stesso. Possiamo dunque dire che, nel grado di appros-

[1] Come apparisce dalle formule (5) e (8), dalle quali, posto $\sigma = \frac{1}{A}$, si ha

$$h = \frac{\sigma - \frac{1}{2}\lambda}{\sigma},$$

il nostro h è il rapporto $\frac{k - \frac{1}{2}k_1}{k}$ del Tisserand.

[2] D'altronde, per Giove, i valori qui adottati per μ, T ed A portano ad attribuire ad h, non il valore 0,27 del Tisserand, ma il valore 0,38.

simazione a cui ci atteniamo, l'azione esercitata dal pianeta (nello spazio esterno) è quella stessa a cui darebbero luogo una massa m posta nel suo centro, ed una massa $M - m$ distribuita uniformemente nello spazio che esso occupa.

La massa m potremo chiamarla *nucleo* del pianeta. Si tratta evidentemente di un nucleo ideale: ma l'avere il rapporto $\frac{m}{M}$ un valore più o meno grande, ci fornisce tuttavia un'indicazione sull'essere più o meno condensata verso il centro la massa totale M.

Moltiplicando l'equazione (10) per A; osservando, poi, che il prodotto kA è uguale, per la formula (8), ad h, e, per la (9), ad $1 - \frac{c}{c_0}$, abbiamo:

$$\frac{3}{5}\frac{M - m}{M} = 1 - \frac{c}{c_0},$$

da cui

$$\frac{m}{M} = \frac{5}{3}\frac{c}{c_0} - \frac{2}{3}. \tag{11}$$

Questa relazione fra il rapporto $\frac{m}{M}$ e il coefficiente c — relazione ottenuta senza tener conto della nostra formula (2) — fa conoscere il valore del nucleo per quei pianeti per cui è noto c: ossia, in virtù della formula (1), per quei pianeti pei quali si conoscono lo schiacciamento e la durata della rotazione.

Ponendo la condizione che il nucleo sia positivo, e minore della massa totale M, essa relazione fornisce due limiti (già stabiliti per altra via dal Clairaut) fra i quali deve essere compreso il valore di c. Siccome c_0 differisce poco da 1, i due limiti saranno approssimativamente 0,4 ed 1.

Supponiamo, ora, che sussista la relazione (2) fra c e μ. E notiamo che c risulta compreso, per tutti i pianeti, fra i limiti assegnati: esso è minimo per Mercurio ($c = 0{,}52$), massimo per Saturno ($c = 0{,}74$). La formula (11), tenendo conto della (2), darà

$$\frac{m}{M} = \left(\frac{5}{3}\frac{c_1}{c_0} - \frac{2}{3}\right) + \frac{5}{3}\frac{c_2}{c_0}\cdot\frac{1}{\mu},$$

ossia

$$\frac{m}{M} = q_1 + \frac{q_2}{\mu}, \tag{12}$$

ove q_1 e q_2 denotano due costanti. Calcolando i loro valori numerici, troveremo

$$q_1 = 0{,}145 \quad , \quad q_2 = 0{,}053.$$

Ammettere la formula (2) equivale dunque ad ammettere la (12): ad ammettere, quindi, che, nei pianeti, *quanto minore è la densità media, tanto più la massa è condensata verso il centro*. L'avere un pianeta una piccola densità media, dipenderebbe dunque, in special modo, dall'essere poco densi gli strati più vicini alla superficie.

I valori estremi del rapporto $\frac{m}{M}$ fra il nucleo e la massa totale sarebbero 0,19 (Mercurio), e 0,55 (Saturno). Per la Terra si ha $\frac{m}{M}=0{,}2$; per Giove $\frac{m}{M}=0{,}36$ [1].

5. Abbiamo posto $A=\frac{h}{k}$, e supposto per Nettuno $h=0{,}37$. Un'espressione di k, in funzione di elementi che dovranno essere forniti dalle osservazioni, possiamo ottenerla nel modo seguente:

Poniamo nel centro O del pianeta l'origine di una terna di assi ortogonali $Oxyz$, assumendo l'equatore del pianeta come piano $z=0$. Nella formula (4) potremo porre sen $\varphi=\frac{z}{r}$. Supporremo poi uguale ad 1 il raggio equatoriale a. Onde avremo

$$V=fM\left\{\frac{1}{r}+k\left(\frac{1}{3r^3}-\frac{z^2}{r^5}\right)\right\}. \tag{13}$$

Dalle equazioni del movimento del satellite (ottenute considerando il pianeta come fisso), $x''=\frac{\partial V}{\partial x}$, ecc., si deduce:

$$yz''-zy''=y\frac{\partial V}{\partial z}-z\frac{\partial V}{\partial y},\ \text{ecc.}$$

Poniamo

$$G=yz'-zy' \quad , \quad H=zx'-xz' \quad , \quad K=xy'-yx'. \tag{14}$$

Sarà

$$\frac{dG}{dt}=y\frac{\partial V}{\partial z}-z\frac{\partial V}{\partial y},\ \text{ecc.} \tag{15}$$

Ora, dalla formula (13) si ha:

$$y\frac{\partial V}{\partial z}-z\frac{\partial V}{\partial y}=-2kfM\frac{yz}{r^5},$$

$$z\frac{\partial V}{\partial x}-x\frac{\partial V}{\partial z}=\quad 2kfM\frac{xz}{r^5},$$

$$x\frac{\partial V}{\partial y}-y\frac{\partial V}{\partial x}=0;$$

[1] Cfr. Tisserand, *Méc. cél*, II, pag. 205: « *pour la Terre..... la condensation vers le centre est moins prononcée que pour Jupiter et surtout pour Saturne* ».

quindi, sostituendo nelle (15), integrando fra 0 e t, e chiamando G_0, H_0, K_0 i valori iniziali di G, H, K, avremo:

$$G = G_0 - 2kfM \int_0^t \frac{yz}{r^5} dt,$$

$$H = H_0 + 2kfM \int_0^t \frac{xz}{r^5} dt.$$

$$K = K_0 .$$

A causa del fattore k (che è piccolo dello stesso ordine di ω^2), per un valore di t non troppo grande potremo calcolare gl'integrali del secondo membro come se il movimento del satellite non fosse perturbato, e la sua orbita (che ha d'altronde un'eccentricità piccolissima) fosse circolare: ossia come se la distanza r del satellite dal centro del pianeta fosse costante, e pure costante fosse la sua velocità v. Poniamo $ds = v\,dt$; t rappresenti la durata di una rivoluzione del satellite. Avremo:

$$G = G_0 - \frac{2kfM}{r^5 v} \int_0^{2\pi r} yz\,ds ,$$

$$H = H_0 + \frac{2kfM}{r^5 v} \int_0^{2\pi r} xz\,ds ,$$

$$K = K_0 ,$$

gli integrali essendo estesi ad un circolo che ha il centro nel centro del pianeta, e giace sul piano dell'orbita relativo all'istante iniziale.

Fissiamo ora l'asse delle x: sia esso l'intersezione del detto piano col piano equatoriale di Nettuno ($z = 0$). Il secondo integrale è allora nullo; mentre, detto i l'angolo acuto formato dai due piani, il primo è uguale, come si verifica facilmente, a $\pi r^3 \operatorname{sen} i \cos i$. Onde le formule precedenti diverranno:

$$(16) \qquad \begin{cases} G = G_0 - \dfrac{\pi kfM}{r^2 v} \operatorname{sen} 2i , \\ H = H_0 , \\ K = K_0 . \end{cases}$$

Osserviamo che G, H, K, per le formule (14), sono proporzionali ai coseni direttori della normale, che diremo $O\zeta$, al piano dell'orbita. Posto $Q^2 = G^2 + H^2 + K^2$, i coseni stessi, al tempo t, saranno:

$$\alpha = \frac{G}{Q} \quad , \quad \beta = \frac{H}{Q} \quad , \quad \gamma = \frac{K}{Q} .$$

Nell'istante iniziale il piano dell'orbita contiene l'asse delle x: quindi sarà $G_0 = 0$. Onde quadrando e sommando le equazioni (16), e trascurando

il termine che contiene il fattore k^2, avremo $Q^2 = H_0^2 + K_0^2$; dalla qual formula vediamo che Q, al tempo t, ha sensibilmente lo stesso valore che nell'istante iniziale. Perciò i valori iniziali di α, β, γ saranno:

$$\alpha_0 = \frac{G_0}{Q} = 0 \quad , \quad \beta_0 = \frac{H_0}{Q} \quad , \quad \gamma_0 = \frac{K_0}{Q} .$$

E dividendo per Q le formule (16), avremo (a meno di termini piccoli di ordine superiore a k)

$$\alpha = -\frac{\pi k f M}{r^2 v Q} \operatorname{sen} 2i ,$$
$$\beta = \beta_0 ,$$
$$\gamma = \gamma_0 .$$

A Q, che compare in un termine contenente il fattore k, possiamo sostituire il valore rv (costante delle aree) calcolato trascurando le perturbazioni del satellite e l'ellitticità dell'orbita. Notiamo poi che $\frac{fM}{r^2}$ è uguale a $\frac{v^2}{r}$ (accelerazione del satellite). Sarà, per conseguenza,

$$\alpha = -\frac{\pi k}{r^2} \operatorname{sen} 2i .$$

Diciamo ψ l'angolo compreso fra le due direzioni $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ ed (α, β, γ). Si ha:

$$2(1 - \cos \psi) = (\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 + (\gamma - \gamma_0)^2 .$$

Nel nostro caso, poichè l'angolo ψ è piccolissimo, potremo ritenere $2(1 - \cos \psi) = \psi^2$. Inoltre $\alpha_0 = \beta - \beta_0 = \gamma - \gamma_0 = 0$. Dunque ψ è uguale al valore assoluto di α, ossia — la costante k essendo positiva, come apparisce dalla formula (8) —

$$\psi = \frac{\pi k}{r^2} \operatorname{sen} 2i .$$

Questo è l'angolo descritto dalla normale al piano dell'orbita nel tempo t in cui il satellite compie una rivoluzione (circa 5g 21°). Chiamando ε lo stesso angolo espresso in gradi, avremo:

$$\varepsilon = \frac{180 k}{r^2} \operatorname{sen} 2i . \tag{17}$$

La formula $\gamma = \gamma_0$ ci dice poi che, durante una rivoluzione del satellite, l'angolo formato dall'asse dell'orbita coll'asse del pianeta non varia: ossia che l'inclinazione i è costante.

Conoscendo i valori di r, ε ed i, la formula (17) ci darà il valore di k (a meno che non sia $i = 0$, nel qual caso dovrà pure aversi $\varepsilon = 0$).

Se nella formula (8) sostituiamo a k il valore ricavato dalla (17), abbiamo:

$$A = \frac{180h}{r^2 \varepsilon} \operatorname{sen} 2i. \tag{18}$$

6. Le osservazioni relative alle variazioni che ha subìto il piano dell'orbita del satellite dal 1850, permettono di determinare l'angolo ε con sufficiente esattezza. Potremo ritenere

$$\varepsilon = 0°{,}0034\,.$$

Avendosi poi, come distanza del satellite dal pianeta,

$$r = 13{,}33\,,$$

ed essendosi supposto $h = 0{,}37$ (§ 3), la formula (18) darà

$$A = 110 \operatorname{sen} 2i\,; \tag{19}$$

dalla qual formula risulterebbe, intanto, che $A < 110$, ossia che lo schiacciamento di Nettuno è *maggiore* di $\frac{1}{110}$.

Una grande incertezza lasciano invece le osservazioni sul valore della inclinazione i.

Il Dyson, calcolando l'angolo i in due modi diversi, trova $i = 22°$ (*Monthly notices*, 1905, pag. 581: $\gamma = 22°$), e $i = 16°$ (ibid., pag. 583). Se adottiamo il valore medio $i = 19°$, avremo, dalla formula (19),

$$A = 68\,.$$

Lo schiacciamento di Nettuno sarebbe dunque approssimativamente di $\frac{1}{70}$.

Come durata della rotazione, la formula (3) darebbe circa 22 ore.

Fisica matematica. — *Campi elettromagnetici dipendenti da una sola coordinata.* Nota del Corrispondente O. TEDONE.

I.

1. La regione di spazio, in cui il campo si manifesta, possa essere occupata, in parte, da dielettrici e, nell'altra parte, da conduttori omogenei, isotropi. Indichiamo con E_x, E_y, E_z le componenti della forza elettrica; con M_x, M_y, M_z quelle della forza magnetica; con c la velocità di propagazione della luce nel vuoto; con ε e μ la costante dielettrica e la permeabilità magnetica; con λ la conducibilità elettrica, le ultime tre costanti avendo, in generale, valori diversi nei diversi dielettrici e conduttori che intervengono nella quistione, ed essendo, in particolare, $\lambda = 0$ nell'interno di ogni dielettrico. Ciò posto, nella ipotesi che nel campo elettromagnetico in discorso non ci sieno da considerare cariche elettriche, nè distribuzioni di masse magnetiche, e che il campo stesso varii soltanto col variare della coordinata x, le equazioni indefinite del campo stesso (equazioni di Maxwell) si riducono a:

$$(1)\qquad \begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial E_x}{\partial t} + 4\pi\lambda E_x = 0\,, & \dfrac{\partial M_x}{\partial t} = 0\,. \\ -c\dfrac{\partial M_z}{\partial x} = \varepsilon \dfrac{\partial E_y}{\partial t} + 4\pi\lambda E_y\,, & c\dfrac{\partial E_z}{\partial x} = \mu \dfrac{\partial M_y}{\partial t}\,. \\ c\dfrac{\partial M_y}{\partial x} = \varepsilon \dfrac{\partial E_z}{\partial t} + 4\pi\lambda E_z\,, & -c\dfrac{\partial E_y}{\partial x} = \mu \dfrac{\partial M_z}{\partial t}\,, \end{cases}$$

$$(1')\qquad \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} = 0\,.$$

Da teoremi noti discende che il sistema delle sei quantità $E_x, E_y, \ldots, M_z$ (e, quindi, il campo elettromagnetico stesso) è univocamente determinato ad ogni istante t successivo all'istante iniziale $t = 0$, se le dette sei quantità — oltre a soddisfare alle equazioni (1), (1') nell'interno di ognuno dei dielettrici e conduttori che fanno parte del campo, quando alle costanti che in esse compaiono si attribuiscono i corrispondenti valori — sono tali che le componenti tangenziali delle forze elettrica e magnetica sieno continue anche attraverso le superficie di separazione dei diversi dielettrici e conduttori adiacenti che, nelle ipotesi fatte, non possono essere che dei piani $x = \text{cost.}$; che, per $t = 0$, coincidano col sistema di valori ad esse assegnati nello stato iniziale del campo, e che, infine, soddisfino a certe condizioni ai limiti se il campo è limitato, naturalmente, da uno, o due, piani $x = \text{cost.}$

2. Il problema della determinazione effettiva delle sei quantità E_x, $E_y, \dots, M_z$ in funzione di x e di t, nelle ipotesi precedentemente fatte, si scinde in tre parti distinte e cioè: 1°) la determinazione di E_x, M_x; 2°) quella di E_y, M_z; 3°) quella di E_z, M_y. Il primo di questi problemi particolari non presenta difficoltà di sorta: mentre gli altri due costituiscono due problemi equivalenti, differendo uno dall'altro per il semplice scambio degli assi y e z. Basterà quindi occuparsi di uno solo di essi (p. es., della determinazione di E_y ed M_z); e, ponendo, per semplicità, $E_y = E$, $M_z = M$, al problema da risolvere può darsi l'enunciato seguente:

Supposto che x varii in un certo intervallo finito, od infinito, I *composto di un numero finito di intervalli parziali adiacenti* $I_1, I_2, \dots, I_n$, *ciascuno corrispondente a ciascuno dei dielettrici e conduttori omogenei che si suppongono nel campo elettromagnetico che consideriamo; supposto che t varii nell'intervallo da* 0 *a* $+\infty$; *dinotando con* $\varepsilon_i, \mu_i, \lambda_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ *n terne di costanti positive in modo che la terna* $\varepsilon_i, \mu_i, \lambda_i$ *corrisponda all'intervallo* I_i, *determinare le funzioni* E *ed* M *di x e t nel campo di variabilità precedente, in modo che:*

1°) *quando x varii in* I_i, *sieno soddisfatte le equazioni:*

$$\varepsilon_i \frac{\partial E}{\partial t} + c \frac{\partial M}{\partial x} + 4\pi\lambda_i E = 0,$$

$$c \frac{\partial E}{\partial x} + \mu_i \frac{\partial M}{\partial t} = 0,$$

essendo c un'altra costante positiva;

2°) *sieno continue rispetto a t e rispetto ad x anche per quei valori di x che corrispondono a punti di separazione di due intervalli* I_i *adiacenti;*

3°) *per* $t = 0$ *assumano dati valori;*

4°) *se l'intervallo* I *è finito, supporremo che per i valori di x, che corrispondono ad estremi di questo intervallo, una delle due quantità* E *ed* M *si riduca ad una funzione assegnata di t.*

E, dai noti teoremi accennati in principio, discende che il problema precedente è determinato ed ha una sola soluzione.

II.

Integrazione indefinita delle equazioni

$$(2) \qquad \begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial E}{\partial t} + c \dfrac{\partial M}{\partial x} + 4\pi\lambda E = 0, \\[2ex] c \dfrac{\partial E}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial M}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

3. Per raggiungere l'intento nel modo più semplice, conviene, anzitutto, trasformare le (2), ponendo:

$$E = U e^{-kt} \;,\; M = V e^{-kt} \quad \text{con} \quad k = \frac{2\pi\lambda}{\varepsilon} \,, \tag{3}$$

sicchè le equazioni trasformate in U e V diventano:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{c}{\varepsilon} \frac{\partial V}{\partial x} + kU = 0 \,, \\ &\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{c}{\mu} \frac{\partial U}{\partial x} - kV = 0 \end{aligned} \right. \tag{4}$$

e formano un sistema di equazioni aggiunto di se stesso. Notiamo, quindi, che, se U, V e φ, ψ sono due sistemi di integrali qualunque delle (4), l'espressione

$$(\psi U + \varphi V)\, dx - c \left(\frac{1}{\mu} \varphi U + \frac{1}{\varepsilon} \psi V \right) dt \tag{5}$$

è un differenziale esatto. Perciò, interpretando x e t come coordinate cartesiane ortogonali di un punto in un piano e supponendo che in una regione di questo piano, almeno, le quattro funzioni U, V, φ, ψ sieno regolari, l'integrale di (5), esteso ad un contorno s chiuso, qualunque, appartenente a questa regione, percorso in un senso arbitrario, è nullo, ossia

$$\int_s \left\{ (\psi U + \varphi V)\, dx - c \left(\frac{1}{\mu} \varphi U + \frac{1}{\varepsilon} \psi V \right) dt \right\} = 0 \,. \tag{6}$$

4. Nel seguito, con x e t indicheremo le coordinate di un punto fisso 0 del piano xt, mentre indicheremo con ξ e τ le coordinate di un punto variabile. Ciò posto, possiamo soddisfare alle (4) in due modi diversi, ponendo, per U e V:

$$\varphi = -\frac{c}{\varepsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \;,\; \psi = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + k\Phi \,, \tag{7}$$

ovvero:

$$\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} - k\Phi \;,\; \psi = -\frac{c}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \,, \tag{7'}$$

se, in entrambi i casi, supponiamo:

$$C^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + k^2 \Phi = 0 \quad , \quad C = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \,. \tag{8}$$

Noi ci serviremo, per Φ, come in seguito sarà indicato, di una o dell'altra delle seguenti espressioni:

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
\Phi = \Phi_1 &= \pm\,[C(\tau - t) - (\xi - x)]\, \frac{I_1\left[\frac{k}{C}\sqrt{C^2(\tau - t)^2 - (\xi - x)^2}\right]}{\frac{k}{C}\sqrt{C^2(\tau - t)^2 - (\xi - x)^2}}\,, \\
\Phi = \Phi_2 &= \quad [C(\tau - t) + (\xi - x)]\, \frac{I_1\left[\frac{k}{C}\sqrt{C^2(\tau - t)^2 - (\xi - x)^2}\right]}{\frac{k}{C}\sqrt{C^2(\tau - t)^2 - (\xi - x)^2}}\,,
\end{aligned}
\right.
$$

in cui, come al solito,

$$
I_1(z) = \sum_0^\infty {}_i \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2i+1}}{i!\,(i+1)!}\,.
$$

Possiamo così costruire i seguenti quattro sistemi di soluzioni particolari delle (4):

$$
\begin{aligned}
&1) \qquad \varphi_{11} = -\frac{c}{\varepsilon}\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi}\,, \qquad \psi_{11} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} + k\Phi_1\,; \\
&2) \qquad \varphi_{12} = -\frac{c}{\varepsilon}\frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi}\,, \qquad \psi_{12} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau} + k\Phi_2\,; \\
&3) \qquad \varphi_{21} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} - k\Phi_1\,, \qquad \psi_{21} = -\frac{c}{\mu}\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi}\,; \\
&4) \qquad \varphi_{22} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau} - k\Phi_2\,, \qquad \psi_{22} = -\frac{c}{\mu}\frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi}
\end{aligned}
$$

i quali son tali che, quando in Φ_1 si sceglie il segno $+$,

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\varphi_{11} - \varphi_{12} = 2\frac{c}{\varepsilon}\frac{I_1[k(\tau - t)]}{k(\tau - t)}\,, \qquad \psi_{11} - \psi_{12} = 0\,, \\
&\varphi_{21} - \varphi_{22} = 0\,, \qquad \psi_{21} - \psi_{22} = 2\frac{c}{\mu}\frac{I_1[k(\tau - t)]}{k(\tau - t)}
\end{aligned}
\right\} \quad \text{per } \xi = x\,;
$$

mentre, quando in Φ_1 si sceglie il segno $-$,

$$
(10')\quad \left\{
\begin{aligned}
&\varphi_{11} - \varphi_{12} = 0\,, \quad \psi_{11} - \psi_{12} = -2C\frac{J_1\left[\frac{k}{C}(\xi - x)\right]}{\frac{k}{C}(\xi - x)}\,, \\
&\varphi_{21} - \varphi_{22} = -2C\frac{J_1\left[\frac{k}{C}(\xi - x)\right]}{\frac{k}{C}(\xi - x)}\,, \quad \psi_{21} - \psi_{22} = 0
\end{aligned}
\right\} \quad \text{per } \tau = t\,,
$$

dove $\frac{J_1(z)}{z}$ indica la funzione che si ottiene da $\frac{I_1(z)}{z}$ mutando z in $z\sqrt{-1}$.

5. Consideriamo ora la regione σ del piano xt, limitata dalle due caratteristiche del sistema di equazioni (4),

$$C(\tau - t) - (\xi - x) = 0 \quad , \quad C(\tau - t) + (\xi - x) = 0 ,$$

uscenti dal punto $O \equiv (x, y)$ e da una linea s aperta e, ordinatamente, regolare.

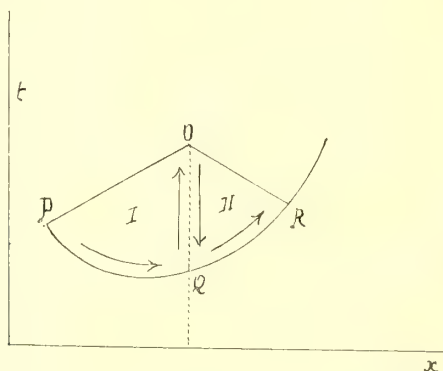



Fig. 1.

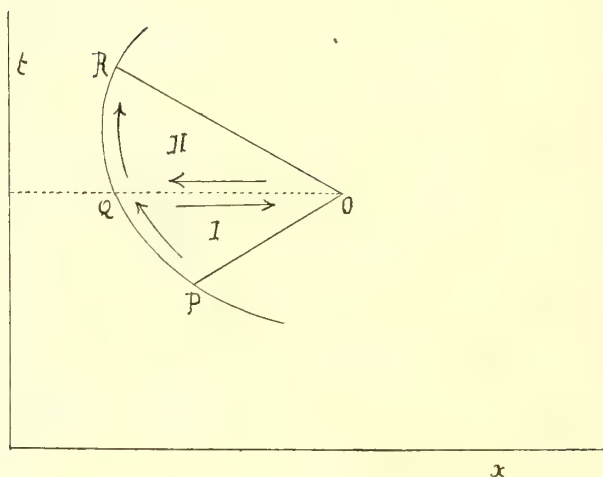



Fig. 1.bis

Rispetto alla regione σ, possono darsi due casi: che essa sia attraversata dalla retta $\xi = x$, ovvero che sia attraversata dalla retta $\tau = t$. Nel primo caso supporremo che la linea s sia incontrata in un punto solo da ogni retta $\xi =$ cost. che l'incontra, a meno che una parte di s stessa appartenga a questa retta; nel secondo caso supporremo che questo accada per ogni retta $\tau =$ cost. che l'incontra. Nel primo caso la retta $\xi = x$, nel secondo la retta $\tau = t$ divide σ in due parti: chiameremo I la regione parziale di σ adiacente alla caratteristica $C(\tau - t) - (\xi - x) = 0$; II l'altra (figg. 1 e 1bis).

Supponiamo dapprima, ora, che σ sia attraversata dalla retta $\xi = x$ (fig. 1), e chiamiamo P, Q, R i punti d'incontro di s con le tre rette $C(\tau - t) - (\xi - x) = 0$, $\xi = x$, e $C(\tau - t) + (\xi - x) = 0$, successivamente. Applichiamo, quindi, in questa ipotesi, la (6) al contorno della regione I e alle due soluzioni delle (4): (U, V) e $(\varphi_{11}, \psi_{11})$, la soluzione (U, V) essendo arbitraria ma regolare almeno in σ. Notando che sulla caratteristica OP, adiacente alla regione I, è $d\xi = C\,d\tau$ e che, perciò, su questa stessa caratteristica

$$(\psi_{11}U + \varphi_{11}V)\,d\xi - c\left(\frac{1}{\mu}\varphi_{11}U + \frac{1}{\varepsilon}\psi_{11}V\right)d\tau =$$

$$= k\Phi_1\left(U d\xi - \frac{c}{\varepsilon}V d\tau\right) + \left(CU - \frac{c}{\varepsilon}V\right)d\Phi_1 = 0\,,$$

si trova subito

$$(11)\quad \int_P^Q \left\{(\psi_{11}U + \varphi_{11}V)\,d\xi - c\left(\frac{1}{\mu}\varphi_{11}U + \frac{1}{\varepsilon}\psi_{11}V\right)d\tau\right\} - c\int_{t_0}^{t}\left(\frac{1}{\mu}\varphi_{11}U + \frac{1}{\varepsilon}\psi_{11}V\right)_{\xi=x} d\tau = 0\,,$$

il primo integrale essendo preso lungo la linea s, e t_0 essendo il valore di τ nel punto Q.

In modo analogo, applicando la (6) al contorno della regione II e alle due soluzioni (U, V), $(\varphi_{12}, \psi_{12})$ delle (4), si trova

$$(11')\quad \int_Q^R \left\{(\psi_{12}U + \varphi_{12}V)\,d\xi - c\left(\frac{1}{\mu}\varphi_{12}U + \frac{1}{\varepsilon}\psi_{12}V\right)d\tau\right\} + c\int_{t_0}^{t}\left(\frac{1}{\mu}\varphi_{12}U + \frac{1}{\varepsilon}\psi_{12}V\right)_{\xi=x} d\tau = 0\,.$$

Se ora, supponendo di aver scelto in Φ_1 il segno +, sommiamo le (11) e (11') e teniamo conto delle (10), si trova

$$(12)\quad 2C^2\int_{t_0}^{t} U(\tau, x)\,\frac{I_1[k(\tau - t)]}{k(\tau - t)}\,d\tau =$$

$$= \int_P^Q \left\{(\psi_{11}U + \varphi_{11}V)\,d\xi - c\left(\frac{1}{\mu}\varphi_{11}U + \frac{1}{\varepsilon}\psi_{11}V\right)d\tau\right\} +$$

$$+ \int_Q^R \left\{(\psi_{12}U + \varphi_{12}V)\,d\xi - c\left(\frac{1}{\mu}\varphi_{12}U + \frac{1}{\varepsilon}\psi_{12}V\right)d\tau\right\}.$$

Lasciando fisse le ipotesi fatte rispetto a σ, e procedendo in modo analogo al precedente, sostituendo soltanto alle due soluzioni $(\varphi_{11}, \psi_{11})$,

$(\varphi_{12}, \psi_{12})$ delle (4), le altre due $(\varphi_{21}, \psi_{21})$, $(\varphi_{22}, \psi_{22})$, rispettivamente, troviamo l'altra formola

$$(13) \qquad 2C^2 \int_{t_0}^{t} V(\tau, x) \frac{I_1[k(\tau - t)]}{k(\tau - t)} d\tau =$$

$$= \int_P^Q \left\{ (\psi_{21}U + \varphi_{21}V) d\xi - c\left(\frac{1}{\mu}\varphi_{21}U + \frac{1}{\varepsilon}\psi_{21}V\right) d\tau \right\} +$$

$$+ \int_Q^R \left\{ (\psi_{22}U + \varphi_{22}V) d\xi - c\left(\frac{1}{\mu}\varphi_{22}U + \frac{1}{\varepsilon}\psi_{22}V\right) d\tau \right\}.$$

Dalle formole (12) e (13) possiamo ricavare i valori di U e V nel punto $0 \equiv (x, t)$ espressi per mezzo dei valori che U e V acquistano sulla sulla linea s fra i punti P ed R, tenendo presente che la soluzione dell'equazione

$$(14) \qquad \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) \frac{I_1[k(\tau - t)]}{k(\tau - t)} d\tau = \Phi(t),$$

al quale tipo appartengono le (12) e (13), è data dalla formola

$$(14') \qquad \varphi(t) = 2\Phi'(t) - k^2 \int_{t_0}^{t} \Phi(\tau) \frac{I_1[k(\tau - t)]}{k(\tau - t)} d\tau .$$

6. Consideriamo ora il caso in cui σ è attraversata dalla retta $\tau = t$ (fig. 1bis). Indicando, in questo caso, con P, Q, R i punti d'incontro delle rette $C(\tau - t) - (\xi - x) = 0$, $\tau = t$, $C(\tau - t) + (\xi - x) = 0$ con la linea s, successivamente, procedendo in modo analogo a quello del num. precedente, con l'avvertenza, soltanto, di scegliere in Φ_1 il segno — e di tener conto delle (10'), invece che delle (10), si trova:

$$(15) \qquad 2C \int_{x_0}^{x} U(t, \xi) \frac{J_1\left[\frac{k}{C}(\xi - x)\right]}{\frac{k}{C}(\xi - x)} d\xi =$$

$$= \int_P^Q \left\{ (\psi_{11}U + \varphi_{11}V) d\xi - c\left(\frac{1}{\mu}\varphi_{11}U + \frac{1}{\varepsilon}\psi_{11}V\right) d\tau \right\} +$$

$$+ \int_Q^R \left\{ (\psi_{12}U + \varphi_{12}V) d\xi - c\left(\frac{1}{\mu}\varphi_{12}U + \frac{1}{\varepsilon}\psi_{12}V\right) d\tau \right\},$$

$$(16) \qquad 2C \int_{x_0}^{x} V(t, \xi) \frac{J_1\left[\frac{k}{C}(\xi - x)\right]}{\frac{k}{C}(\xi - x)} d\xi =$$

$$= \int_P^Q \left\{ (\psi_{21}U + \varphi_{21}V) d\xi - c\left(\frac{1}{\mu}\varphi_{21}U + \frac{1}{\varepsilon}\psi_{21}V\right) d\tau \right\} +$$

$$+ \int_Q^R \left\{ (\psi_{22}U + \varphi_{22}V) d\xi - c\left(\frac{1}{\mu}\varphi_{22}U + \frac{1}{\varepsilon}\psi_{22}V\right) d\tau \right\}$$

nelle quali x_0 è il valore di x corrispondente al punto Q. E da queste formole, alla stessa guisa che dalle (12) e (13), si possono ricavare i valori di U e V nel punto $O \equiv (x, t)$ per mezzo dei valori che U e V assumono su s fra i punti P e R.

7. Vogliamo ricercare, per finire, come si particolarizzano le nostre formole nell'ipotesi di $\lambda = k = 0$. In questa ipotesi è, intanto, $U = E$, $V = M$; e basta derivare, rapporto a t, le (12) e (13), dopo aver introdotto l'ipotesi $k = 0$, per trovare:

$$(12_1) \quad E(t, x) = \frac{1}{2C^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_P^Q \left(CE + \frac{c}{\varepsilon} M \right) (d\xi - C\,d\tau) + \right.$$
$$\left. + \int_Q^R \left(CE - \frac{c}{\varepsilon} M \right) (d\xi + C\,d\tau) \right\},$$

$$(13_1) \quad M(t, x) = \frac{1}{2C^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_P^Q \left(\frac{c}{\mu} E + CM \right) (d\xi - C\,d\tau) - \right.$$
$$\left. - \int_Q^R \left(\frac{c}{\mu} E - CM \right) (d\xi + C\,d\tau) \right\},$$

come basta derivare le (15), (16), nella stessa ipotesi di $k = 0$, rispetto ad x, per trovare:

$$(15_1) \quad E(t, x) = \frac{1}{2C} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_P^Q \left(CE + \frac{c}{\varepsilon} M \right) (d\xi - C\,d\tau) + \right.$$
$$\left. + \int_Q^R \left(CE - \frac{c}{\varepsilon} M \right) (d\xi + C\,d\tau) \right\},$$

$$(16_1) \quad M(t, x) = \frac{1}{2C} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_P^Q \left(\frac{c}{\mu} E + CM \right) (d\xi - C\,d\tau) - \right.$$
$$\left. - \int_Q^R \left(\frac{c}{\mu} E - CM \right) (d\xi + C\,d\tau) \right\}.$$

In modo analogo a quello che si verifica nel caso generale, le due coppie di formole (12_1), (13_1), e (15_1), (16_1) risolvono uno stesso problema: le prime due quando l'arco s, compreso fra i punti P ed R, è incontrato dalla retta $\xi = x$; le altre quando quest'arco è incontrato dalla retta $\tau = t$.

III.

Campo elettromagnetico all'interno di un solo dielettrico, o di due dielettrici adiacenti.

8. Si tratti dapprima del caso, molto semplice, in cui il campo elettromagnetico si manifesta all'interno di un solo dielettrico che si estenda indefinitamente, in tutti i sensi. Se, in questo caso, chiamiamc $f(x)$ ed $F(x)$

i valori che E ed M acquistano per $t=0$, e supponiamo che questi valori siano noti in tutto l'intervallo di x da $-\infty$ a $+\infty$, le formole (12_1) e (13_1) ci risolvono immediatamente il problema quando assumiamo l'asse x per linea s ed il semipiano $t \geqq 0$ per la regione σ in cui cade il punto $0 \equiv (x, t)$. Le (12_1), (13_1), in questo caso, diventano:

$$(17)\quad \begin{cases} E(x, t) = \dfrac{1}{2C}\Big\{ C[f(x-Ct)+f(x+Ct)] + \\ \qquad\qquad + \dfrac{c}{\varepsilon}[F(x-Ct)-F(x+Ct)]\Big\}, \\ M(x, t) = \dfrac{1}{2C}\Big\{ \dfrac{c}{\mu}[f(x-Ct)-f(x+Ct)] + \\ \qquad\qquad + C[F(x-Ct)+F(x+Ct)]\Big\}. \end{cases}$$

9. Un solo dielettrico occupi, in questo secondo caso, la regione $x \geqq 0$ e possa estendersi anche oltre; ma, per una qualunque ragione, dobbiamo limitarci a considerare, in esso, un campo elettromagnetico soltanto nella detta regione $x \geqq 0$. Il campo sarà, certamente, determinato ad ogni istante $t > 0$, se conosciamo i valori $f(x)$, $F(x)$ che E ed M assumono per $t=0$ e per x variabile fra 0 e $+\infty$, e, inoltre, i valori $\varphi(t)$, $\Phi(t)$ che le stesse quantità assumono per $x=0$ e per t variabile fra 0 e $+\infty$. Se, infatti, supponiamo che nelle (12_1), (13_1) la linea s sia la linea formata dall'insieme degli assi x e t positivi e che quindi la regione σ si riduca al quadrante positivo del piano xt, dalle dette formole, ricaviamo che, per i punti $O \equiv (x, t)$ per cui $Ct - x \leqq 0$, i valori di E ed M sono dati ancora dalle (17), mentre per i punti O, per cui $Ct - x \geqq 0$, ricaviamo:

$$(18)\quad \begin{cases} E(x, t) = \dfrac{1}{2C}\Big\{ C\Big[\varphi\Big(t-\dfrac{x}{C}\Big)+f(x+Ct)\Big] + \\ \qquad\qquad + \dfrac{c}{\varepsilon}\Big[\Phi\Big(t-\dfrac{x}{C}\Big)-F(x+Ct)\Big]\Big\}, \\ M(x, t) = \dfrac{1}{2C}\Big\{ \dfrac{c}{\mu}\Big[\varphi\Big(t-\dfrac{x}{C}\Big)-f(x+Ct)\Big] + \\ \qquad\qquad + C\Big[\Phi\Big(t-\dfrac{x}{C}\Big)+F(x+Ct)\Big]\Big\}. \end{cases}$$

I valori così ottenuti, per E ed M, tendono, per $t=0$, ai valori ad essi assegnati sul semiasse x positivo; ma affinchè tendano ai valori φ e Φ ad essi assegnati sul semiasse t positivo, quando x tende a zero, devono essere verificate le relazioni:

$$(19)\quad \begin{cases} C[\varphi(t)-f(Ct)] - \dfrac{c}{\varepsilon}[\Phi(t)-F(Ct)] = 0, \\ \dfrac{c}{\mu}[\varphi(t)-f(Ct)] - C[\Phi(t)-F(Ct)] = 0 \end{cases}$$

le quali si riducono ad una sola, potendosi ottenere la seconda dalla prima moltiplicando questa per la costante $\frac{c}{C\mu}$. Perchè il campo sia determinato, come era da attendersi, basta dare tre delle quattro funzioni f, F, φ, Φ, del resto, in modo arbitrario.

10. Il campo elettromagnetico sia ora da considerarsi in tutto lo spazio; e questo sia occupato da due soli dielettrici diversi, separati dal piano $x=0$. Distinguiamo con l'indice 1 le quantità che si riferiscono al dielettrico che occupa la regione $x \geq 0$, e con l'indice 2 le quantità analoghe che si riferiscono al dielettrico che occupa la regione $x \leq 0$.

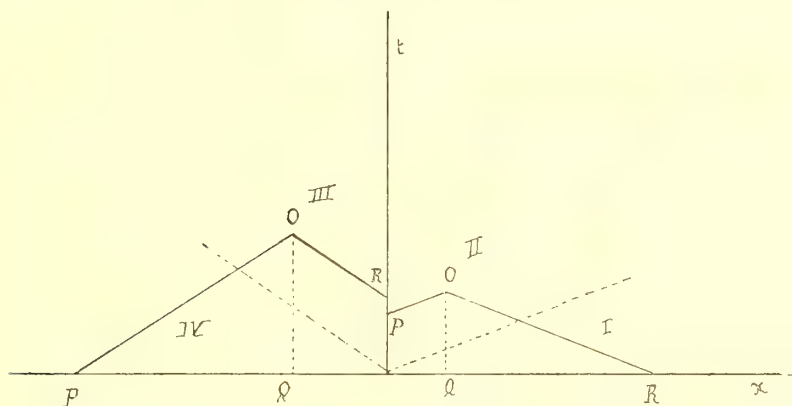



Fig. 2.

I dati del problema, in questo caso, sono i valori $f_1(x)$, $F_1(x)$ che E_1, M_1 assumono per $t=0$ ed x variabile fra 0 e $+\infty$ ed i valori $f_2(x)$, $F_2(x)$ che E_2, M_2 assumono per $t=0$ ed x variabile fra $-\infty$ e 0, queste quattro funzioni essendo legate dalle relazioni:

$$f_1(0)=f_2(0) \quad , \quad F_1(0)=F_2(0). \tag{20}$$

E, come risulta subito applicando a ciascuno dei due distinti dielettrici le considerazioni del num. precedente, il problema stesso si può ritenere risoluto se riusciamo a determinare, in funzione dei dati, i valori di

$$\varphi(t)=E_1(0,t)=E_2(0,t) \quad , \quad \Phi(t)=M_1(0,t)=M_2(0,t) \tag{21}$$

per ogni valore di $t>0$.

Per maggiore chiarezza, torniamo alla considerazione del piano xt e della regione σ che adesso è il semipiano $t>0$ (fig. 2). L'applicazione delle (12_1), (13_1), in ciascuna delle due parti di σ in cui è $x>0$, o $x<0$, ci porta subito a dividere σ in quattro regioni. Nella regione I, in cui $C_1t-x\leq 0$, $x>0$, E_1 ed M_1 sono date dalle (17) quando si mutino,

oltre ad E ed M in E_1 ed M_1, anche ε, μ, C, f, F in ε_1, μ_1, C_1, f_1, F_1. Similmente, le stesse formole (17), quando, in esse, si mutino E, M, ε, μ, C, f, F in E_2, M_2, ε_2, μ_2, C_2, f_2, F_2, ci daranno i valori di E_2, M_2 nella regione IV in cui $C_2 t + x \leq 0$, $x < 0$. Nella regione II, invece, in cui $C_1 t - x \geq 0$, $x > 0$, è:

$$
(22)\quad \begin{cases}
E_1 = \dfrac{1}{2C_1}\Big\{ C_1\Big[\varphi\Big(t - \dfrac{x}{C_1}\Big) + f_1(x + C_1 t)\Big] + \\
\qquad\qquad + \dfrac{c}{\varepsilon_1}\Big[\Phi\Big(t - \dfrac{x}{C_1}\Big) - F_1(x + C_1 t)\Big]\Big\}, \\
M_1 = \dfrac{1}{2C_1}\Big\{ \dfrac{c}{\mu_1}\Big[\varphi\Big(t - \dfrac{x}{C_1}\Big) - f_1(x + C_1 t)\Big] + \\
\qquad\qquad + C_1\Big[\Phi\Big(x - \dfrac{t}{C_1}\Big) + F_1(x + C_1 t)\Big]\Big\},
\end{cases}
$$

mentre nella regione III, in cui $C_1 t + x \geq 0$, $x < 0$, si ha:

$$
(23)\quad \begin{cases}
E_2 = \dfrac{1}{2C_2}\Big\{ C_2\Big[\varphi\Big(t + \dfrac{x}{C_2}\Big) + f_2(x - C_2 t)\Big] - \\
\qquad\qquad - \dfrac{c}{\varepsilon_2}\Big[\Phi\Big(t + \dfrac{x}{C_2}\Big) - F_2(x - C_2 t)\Big]\Big\}, \\
M_2 = \dfrac{1}{2C_2}\Big\{ - \dfrac{c}{\mu_2}\Big[\varphi\Big(t + \dfrac{x}{C_2}\Big) - f_2(x - C_2 t)\Big] + \\
\qquad\qquad + C_2\Big[\Phi\Big(t + \dfrac{x}{C_2}\Big) + F_2(x - C_2 t)\Big]\Big\}.
\end{cases}
$$

Devono essere, inoltre, soddisfatte le condizioni:

$$
(24)\quad \begin{cases}
C_1 \varphi(t) - \dfrac{c}{\varepsilon_1}\Phi(t) = C_1 f_1(C_1 t) - \dfrac{c}{\varepsilon_1} F_1(C_1 t), \\
C_2 \varphi(t) + \dfrac{c}{\varepsilon_2}\Phi(t) = C_2 f_2(-C_2 t) + \dfrac{c}{\varepsilon_2} F_2(-C_2 t),
\end{cases}
$$

la prima delle quali ci assicura che, per $x = 0$, E_1 ed M_1 tendono a $\varphi(t)$ e $\Phi(t)$, mentre la seconda ci assicura che agli stessi valori $\varphi(t)$, $\Phi(t)$ tendono anche, per $x = 0$, rispettivamente, E_2 ed M_2. Dalle equazioni (24) potremo, in ogni caso, ottenere le funzioni incognite $\varphi(t)$ e $\Phi(t)$ e completare così la soluzione del problema.

Lasceremo da parte lo sviluppo ulteriore della soluzione ottenuta, come pure l'applicazione di essa all'importante problema dell'incidenza normale di onde elettromagnetiche piane.

IV.

Campo elettromagnetico all'interno di un dielettrico e di un conduttore adiacenti.

11. Dei molti problemi della natura dei precedenti, che si possono immaginare, tratteremo ancora soltanto di quello in cui il campo elettromagnetico debba sempre considerarsi in tutto lo spazio, ma questo sia occupato, nella regione $x > 0$, dallo stesso dielettrico del num. precedente e, nella regione $x < 0$, da un conduttore di cui indicheremo con $\varepsilon_2, \mu_2, C_2, k_2$ le costanti analoghe ad ε, μ, C, k; con E_2, M_2 indicheremo ancora i valori di E, M, all'interno del conduttore; e con $f_2(x)$, $F_2(x)$ quelli a cui tendono E_2 ed M_2 sull'asse x negativo.

Il problema s'imposta nello stesso modo che nel num. precedente. Tenendo presente ancora la figura 2, noteremo, intanto, che E_1, M_1 sono dati anche adesso, nelle regioni I e II, dalle stesse formole che nel problema del numero precedente. In particolare, nella regione II, varranno ancora le (22) se continuiamo ad indicare con $\varphi(t)$, $\Phi(t)$ i valori a cui tendono E_1 ed M_1, per $x = 0$. Per calcolare E_2 ed M_2, nelle due altre regioni III e IV, applicheremo le formole (12) e (13) alla regione $t \geq 0$, $x \leq 0$, il cui contorno è formato dall'asse x negativo e dall'asse t positivo. Troviamo così, per i punti (x, t) della regione IV:

$$(25)\quad \begin{cases} 2C_2^2 \displaystyle\int_0^t E_2(\tau, x)\, e^{k_2\tau} \frac{I_1[k_2(\tau - t)]}{k_2(\tau - t)}\, d\tau = \\ \qquad = \displaystyle\int_{x-C_2t}^{x} [\psi_{11} f_2(\xi) + \varphi_{11} F_2(\xi)]_{\tau=0}\, d\xi + \\ \qquad + \displaystyle\int_{x}^{x+C_2t} [\psi_{12} f_2(\xi) + \varphi_{12} F_2(\xi)]_{\tau=0}\, d\xi, \\ 2C_2^2 \displaystyle\int_0^t M_2(\tau, x)\, e^{k_2\tau} \frac{I_1[k_2(\tau - t)]}{k_2(\tau - t)}\, d\tau = \\ \qquad = \displaystyle\int_{x-C_2t}^{x} [\psi_{21} f_2(\xi) + \varphi_{21} F_2(\xi)]_{\tau=0}\, d\xi + \\ \qquad + \displaystyle\int_{x}^{x+C_2t} [\psi_{22} f_2(\xi) + \varphi_{22} F_2(\xi)]_{\tau=0}\, d\xi, \end{cases}$$

le funzioni $\varphi_{11}, \psi_{11}, \ldots, \psi_{22}$, in queste formole, essendo costruite con le costanti $\varepsilon_2, \mu_2, C_2, k_2$.

Le (25) sono sempre equazioni integrali in E_2 ed M_2 del tipo della (14), e come questa si potranno risolvere. Le formole di risoluzione mostrano,

senza difficoltà, che, per $t=0$, E_2 ed M_2 tendono ai valori ad essi assegnati: $f_2(x)$ ed $F_2(x)$.

Per i punti (x, t) della regione III abbiamo, invece:

$$(26)\quad \begin{cases} 2C_2^2 \displaystyle\int_0^t E_2(\tau, x)\, e^{k_2\tau} \frac{I_1[k_2(\tau - t)]}{k_2(\tau - t)}\, d\tau = \\ \qquad = \displaystyle\int_{x-C_2 t}^{x} [\psi_{11} f_2(\xi) + \varphi_{11} F_2(\xi)]_{\tau=0}\, d\xi + \\ \qquad + \displaystyle\int_x^0 [\psi_{12} f_2(\xi) + \varphi_{12} F_2(\xi)]_{\tau=0}\, d\xi - \\ \qquad - c \displaystyle\int_0^{t+\frac{x}{C_2}} \left[\frac{1}{\mu_2} \varphi_{12}\, \varphi(\tau) + \frac{1}{\varepsilon_2} \psi_{12}\, \Phi(\tau)\right]_{\xi=0} e^{k_2\tau}\, d\tau , \\ 2C_2^2 \displaystyle\int_0^t M_2(\tau, x)\, e^{k_2\tau} \frac{I_1[k_2(\tau - t)]}{k_2(\tau - t)}\, d\tau = \\ \qquad = \displaystyle\int_{x-C_2 t}^{x} [\psi_{21} f_2(\xi) + \varphi_{21} F_2(\xi)]_{\tau=0}\, d\xi + \\ \qquad + \displaystyle\int_x^0 [\psi_{22} f_2(\xi) + \varphi_{22} F_2(\xi)]_{\tau=0}\, d\xi - \\ \qquad - c \displaystyle\int_0^{t+\frac{x}{C_2}} \left[\frac{1}{\mu_2} \varphi_{22}\, \varphi(\tau) + \frac{1}{\varepsilon_2} \psi_{22}\, \Phi(\tau)\right]_{\xi=0} e^{k_2\tau}\, d\tau , \end{cases}$$

ricordando che φ e Φ devono rappresentare anche i limiti di E_2 ed M_2, per $x=0$.

Affinchè, ora, quest'ultimo fatto accada, devono essere verificate le due condizioni seguenti:

$$(27)\quad \begin{cases} - c \displaystyle\int_0^t \left[\frac{1}{\mu_2} \varphi_{11}\, \varphi(\tau) + \frac{1}{\varepsilon_2} \psi_{11}\, \Phi(\tau)\right]_{\xi=x=0} e^{k_2\tau}\, d\tau + \\ \qquad + \displaystyle\int_{-C_2 t}^0 [\psi_{11} f_2(\xi) + \varphi_{11} F_2(\xi)]_{\tau=x=0}\, d\xi = 0 , \\ - c \displaystyle\int_0^t \left[\frac{1}{\mu_2} \varphi_{21}\, \varphi(\tau) + \frac{1}{\varepsilon_2} \psi_{21}\, \Phi(\tau)\right]_{\xi=x=0} e^{k_2\tau}\, d\tau + \\ \qquad + \displaystyle\int_{-C_2 t}^0 [\psi_{21} f_2(\xi) + \varphi_{21} F_2(\xi)]_{\tau=x=0}\, d\xi = 0 , \end{cases}$$

le quali formole non sono altro che il risultato dell'applicazione della (6) al triangolo un cui vertice è l'origine, e i due lati adiacenti, disposti sugli assi x negativo e t positivo, sono lunghi, rispettivamente, $C_2 t$ e t; e a ciascuna delle due coppie di soluzioni (U, V), $(\varphi_{11}, \psi_{11})$, e (U, V), $(\varphi_{21}, \psi_{21})$.

Naturalmente, queste due equazioni non sono fra loro indipendenti. Se si risolve la prima rispetto a φ, il che può ottenersi agevolmente notando che

$$\varphi_{11} = \frac{c}{\varepsilon_2} \frac{I_1[k_2(\tau - t)]}{k_2(\tau - t)},$$

e si sostituisce il risultato nella seconda, si verifica facilmente che questa si riduce allora ad una identità. Basta dunque che sia soddisfatta una di esse perchè sia soddisfatta, in conseguenza, anche l'altra.

Per determinare, allora, $\varphi(\tau)$, $\Phi(\tau)$, e completare così la soluzione del nostro problema, si osservi che queste due funzioni incognite devono soddisfare alla prima delle (24), da cui si ha

$$\Phi(t) = \frac{\varepsilon_1 C_1}{c} \varphi(t) - \frac{\varepsilon_1 C_1}{c} f_1(C_1 t) + F_1(C_1 t), \tag{28}$$

ed alla prima delle (27). Sostituendo in quest'ultima equazione il valore precedente di $\Phi(t)$, si trova, per determinare $\varphi(t)\, e^{k_1 t}$, un'equazione integrale di Volterra di prima specie col nucleo dato da

$$\left(\frac{c}{\mu_2} \varphi_{1,1} + C_1 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \psi_{1,1}\right)_{\xi=x=0} =$$
$$= C_2^2 \frac{I_1[k_2(t-\tau)]}{k_2(t-\tau)} + C_1 C_2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \{ I_1'[k_2(t-\tau) + I_1[k_2(t-\tau)\} =$$
$$= \frac{1}{2} \frac{C_2}{\varepsilon_2} \{(C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2) I_0 + 2 C_1 \varepsilon_1 I_1 + (C_1\varepsilon_1 - C_2\varepsilon_2) I_2\},$$

l'argomento di I_0, I_1, I_2 essendo sempre $k_2(t-\tau)$. I principii da noi stabiliti su quest'argomento ci permettono di risolvere l'equazione agevolmente.

12. L equazione da risolvere è, infatti, del tipo

$$\int_0^t \{ a I_0[k(t-\tau)] + b I_1[k(t-\tau)] + c I_2[k(t-\tau)] \} \varphi(\tau)\, d\tau = \Phi(t), \tag{29}$$

a, b, c, k essendo 4 costanti e $\Phi(t)$ una funzione nota. Se ora moltiplichiamo ambo i membri della (29) per $\dfrac{I_1[k(t_1 - t)]}{t_1 - t}$ ed integriamo, rispetto a t, fra 0 e t_1, tenendo conto di altri nostri risultati [1], e cambiando il nome alle variabili, si trova

$$2a\varphi(t) + k \int_0^t \varphi(\tau) \{ b I_0[k(t-\tau)] + (a+c) I_1[k(t-\tau)] \} d\tau =$$
$$= -k \int_0^t \Phi(\tau) \frac{I_1[k(\tau - t)]}{\tau - t} d\tau + 2 \frac{d\Phi(t)}{dt} = \Phi_1(t). \tag{30}$$

[1] Vedi: *Su l'inversione di alcuni integrali* ecc. Questi Rendiconti, vol. XXIII, ser. 5ª, 1° sem., fasc. 7°, pag. 474, formole (3) e (6'').

Derivando questa equazione rapporto a t, sostituendo quindi, al posto di I_1' l'espressione equivalente $\frac{1}{2}(I_0 + I_2)$ ed eliminando, infine, il termine contenente I_2 fra l'equazione che così si otterrebbe e la (29), si trova la nuova equazione

$$(31)\quad 2a\varphi'(t) + bk\varphi(t) + \frac{k^2}{2c}(c-a)\int_0^t \{(c+a)\, I_0[\cdots] + b\, I_1[\cdots]\}\varphi(\tau)\, d\tau = \\ = \Phi_1'(t) - \frac{k^2}{2c}(c+a)\,\Phi(t)\,.$$

Le equazioni (30) e (31) possono essere risolute rispetto a

$$\int_0^t \varphi(\tau)\, I_0[\cdots]\, d\tau \quad \text{e} \quad \int_0^t \varphi(l)\, I_1[\cdots]\, d\tau$$

e, sostituendo i loro valori nella identità

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \varphi(\tau)\, I_0[\cdots]\, d\tau = \varphi(t) + k\int_0^t \varphi(\tau)\, I_1[\cdots]\, d\tau\,,$$

si trova subito, per determinare $\varphi(\tau)$, un'equazione differenziale ordinaria lineare e a coefficienti costanti del secondo ordine.

Matematica. — *Sul concetto di gruppo di monodromia per una funzione ad infiniti valori.* Nota di G. Andreoli, presentata dal Socio Volterra.

1. In questa Nota mi permetto mostrare in che modo si applichi la teoria, da noi accennata nella Nota precedente [1], al concetto di gruppo di monodromia di una funzione analitica ad infiniti valori: funzioni che chiameremo *polimorfe*.

Per un teorema di Volterra-Poincaré, è noto che una funzione analitica, nell'interno del suo campo di esistenza, può avere, al più, un'infinità numerabile di valori. Supporremo, per ora, che esista un punto, necessariamente interno al campo, tale che, formando gli sviluppi di Taylor per i diversi valori della funzione in tal punto, questi sviluppi convergano tutti in cerchi il cui minimo raggio sia $\varrho > 0$. Supporremo inoltre che, partendo con questi valori e seguendo cammini aperti privi di cappii, sia possibile di avere, in ogni punto d'esistenza della funzione stessa, tutti i valori di essa funzione. Naturalmente, tale punto potrebbe non esistere: mostreremo in fine come i ragionamenti fatti permangano.

[1] G. Andreoli, *Sui gruppi di sostituzioni che operano su infiniti elementi* (questi Rendiconti, anno corrente).

Dato un punto x_0 generico (che non sia di singolarità per nessuno dei rami della funzione), consideriamo tutti gli elementi analitici corrispondenti ai diversi valori della funzione in quel punto.

Diremo che:

I) Il punto x_0 è un punto regolare d'indice ϱ, qualora il limite inferiore dei raggi di convergenza degli sviluppi sia $\varrho \neq 0$;

II) è un punto regolare d'indice zero, o quasi singolare, se zero è limite inferiore dei raggi, senza essere il minimo;

III) è punto singolare se zero è il minimo: e, precisamente, di singolarità parziale se il limite superiore dei raggi è diverso da zero; di singolarità quasi totale se esso è zero, ma se vi sono dei ϱ (necessariamente in numero finito) diversi da zero; di singolarità totale se tutti i ϱ sono zero.

Le stesse definizioni si adottano per linee e per le aree: notiamo, poi, che le definizioni ora date equivalgono a dire che:

I) in un cerchietto di raggio ϱ, attorno ad x_0, non v'ha alcun punto di singolarità di nessun elemento analitico;

II) il punto x_0 è punto limite di singolarità dei differenti elementi;

III) esso è punto di singolarità per qualche elemento, o non lo è per qualche elemento, o lo è per tutti.

2. Con tali definizione, valgono i teoremi : *Per una funzione polimorfa*:

a) *L'insieme dei punti d' indice maggiore o eguale a* ϱ, *è un insieme chiuso*: E_ϱ.

Infatti, se $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ è una successione di punti tendenti ad x, nel cerchietto di raggio ε, piccolo a piacere, descritto intorno ad x, vi saranno dei punti x_n. Descrivendo attorno ad uno di questi un cerchietto di raggio ϱ, in esso valgono tutti gli sviluppi dei singoli elementi analitici: e quindi, per noti teoremi della teoria delle funzioni analitiche (osservando che un cerchietto di raggio $\varrho - \varepsilon$ attorno ad x è compreso in quello di raggio ϱ), potremo dire che in un cerchietto di raggio $\varrho - \varepsilon$ valgono tutti gli sviluppi riferiti al punto x.

Ma ε è piccolo a piacere: quindi tutti gli elementi riferiti ad x avranno, come campo di convergenza, almeno un cerchio di raggio ϱ, e quindi x è d'indice eguale o maggiore di ϱ.

b) *L'insieme* E_0 *dei punti singolari e quasi-singolare è chiuso*: cioè il punto limite d'una successione di punti singolari, o quasi, è un punto singolare o quasi.

c) *L'insieme dei punti quasi singolari è concentrato.*

d) *L'insieme dei punti singolari è concentrato.*

e) *L'insieme* E *dei punti di singolarità totale è chiuso.*

Questi cinque teoremi — evidenti, del resto — estendono il teorema: L'insieme dei punti singolari d'una funzione monodroma è chiuso.

Inoltre, si può fare una classificazione delle funzioni polimorfe in base al modo con cui sono formati gli insiemi E_ρ, E_0, E: si può chiamare così una funzione *polimorfa regolare* se l'insieme E_0 è costituito da punti che ammettono un solo punto limite (si può sempre supporre che esso sia l'∞); e *funzione polimorfa singolare* se E_0 occupa tutto il piano.

In tal caso il punto x_0, da cui abbiamo preso le mosse al n. 1, non esisterebbe; ma è facile il vedere che ciò che diremo muterebbe di pochissimo come enunciato, nel caso che vi fosse almeno un punto quasi-singolare.

Se invece non vi fossero che punti totalmente o parzialmente singolari, diremmo che la funzione è *polimorfa irregolare*: per ora escluderemo queste.

3. Passiamo ora al concetto di *prolungamento analitico complessivo.* Dati nel piano due punti A, B, non singolari nè quasi singolari: congiunti A e B con un qualsiasi arco di curva semplice (privo di cappi), invece di prolungare da A a B i singoli elementi analitici, prolunghiamoli tutti in blocco.

Con semplici ragionamenti, si vede che, se sull'arco AB non cadono punti singolari o quasi, si andrà da A in B con un numero finito di operazioni di prolungamento complessivo di raggio ϱ.

Se invece su AB (estremi inclusi) vi sono dei punti quasi singolari, ciò non è più possibile; ma dato r grande ad arbitrio, si potranno determinare in corrispondenza un intero n_r ed un raggio ϱ_r, in modo che i primi r elementi si prolunghino complessivamente da A a B mediante n_r operazioni di raggio ϱ_r: per r tendente all'infinito, n_r vi tende anche, e ϱ_r tenderà a zero.

Infine, se su AB vi è un punto di singolarità, il prolungamento complessivo diventa impossibile: e lo sarà anche l'ordinario, se la singolarità è totale.

Diremo che l'arco AB è regolare, nel primo caso; quasi singolare nel secondo; singolare nel terzo. Se AB è regolare, e ϱ è il minimo indice dei suoi punti, diremo che AB è d'indice ϱ.

4. Per la trattazione del gruppo di monodromia d'una funzione polimorfa, bisogna considerare gli insiemi E_ρ: i cammini in E_ρ definiranno un sottogruppo G_ρ del gruppo di monodromia.

Per le funzioni polimorfe regolari (ammettendo come punto-limite della successione E_0 l'∞), l'insieme E_ρ si ottiene descrivendo dei cerchi di raggio ϱ attorno ai punti di E_0 e considerando la parte esterna a tutti questi cerchi.

Può darsi che sia possibile di trovare un numero ϱ sufficientemente piccolo in modo che tutti i cerchietti di raggio ϱ, descritti attorno ai punti ξ di E_0, risultino staccati; o che ciò non sia possibile. Naturalmente, ciò proviene dal fatto che l'insieme $|\xi_r - \xi_s|$ ammette limite inferiore diverso da zero, oppur no.

Nel primo caso, il gruppo di monodromia si ottiene considerando quello relativo all'insieme E_ρ: le sue sostituzioni generatrici si ottengono girando in E_ρ con cammini di indice ϱ attorno ai punti ξ di E_0.

Nel secondo caso invece, il gruppo di monodromia, si ottiene dai sottogruppi $G_{\rho_1}, G_{\rho_2}, G_{\rho_3} \ldots$ ove ϱ_n tende a zero: come si vede, qui entrano le questioni di convergenza astratta.

Infatti, supponiamo d'avere due funzioni polimorfe: una per cui esistano due sol punti singolari (l'origine e l'infinito); l'altra, una qualunque funzione polimorfa regolare. La somma di esse sarà ancora una funzione polimorfa regolare. Però noi vedremo che la singolarità della prima funzione sparisce nella somma, più non essendo resa visibile dal fatto che l'∞ è per la seconda un punto di quasi singolarità (anche senza essere di diramazione).

Si può presentare quindi il seguente caso: data una successione di punti singolari e di diramazione $\xi_0, \xi_1 \ldots$ tendenti ad un punto limite ξ, riconoscere se ξ sia semplicemente un punto singolare, oppure ad esso sia sovrapposto un punto di diramazione. È ovvio allora costruire dei cammini chiusi (supporremo d'avere funzioni regolari) che circondano $\xi_0, \xi_1 \ldots \xi$; $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi$; $\xi_2, \xi_3, \ldots \xi, \ldots$: se $S_1, S_2, S_3, \ldots$ sono le sostituzioni ad essi dovute e se questa successione di sostituzioni converge astrattamente ad S, S sarà la sostituzione relativa al punto ξ.

5. Per le funzioni polimorfe può accadere che i campi E_ρ non sieno connessi, ma constino di pezzi staccati: ciò è dovuto esclusivamente o a linee chiuse di quasi-singolarità oppure a parti staccate di lacune, che si riferiscono a diversi rami, ma che, riuniti assieme, non permettono il prolungamento complessivo.

Come abbiamo già detto, il primo caso non presenterebbe alcuna difficoltà, nè alcuna alterazione negli enunciati. Nel secondo caso invece entrano in considerazione le catene.

Si consideri infatti una funzione polimorfa assegnata coi suoi elementi in un punto x_0 d'indice ϱ; essa abbia l'origine e l'∞ come punti di diramazione, ed una semiretta r non passante per x_0, dall'origine, come sezione per il solo elemento p_1 (1).

Ora, un qualunque cammino chiuso passante per x_0, attorno all'origine, non può essere considerato come cammino di prolungamento complessivo, se lungo esso si vuol prolungare p_1. D'altra parte, essendo l'origine e l'∞ soli punti di diramazione, girando attorno ad essi, i rami si devono permutare.

Quindi, un cammino chiuso, percorso in un senso, dovrà portare p_1 ad arrestarsi alla semiretta r, e rendere impossibile il prolungamento com-

(1) Possono effettivamente esistere tali funzioni?

plessivo. Percorso in un altro, dovrà mutare (per semplicità) p_1 in p_2, p_2 in p_3... Perciò esso darà luogo ad una catena, ed il gruppo di monodromia si riduce alle potenze di questa.

Se si avessero tre funzioni φ_1, φ_2, φ_3 del tipo ora detto, e le tre semirette fossero disposte in modo che l'origine di r_1 si trovi su r_2, quella di r_2 su r_3, quella di r_3 su r_1, allora la funzione $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$ si troverebbe nelle condizioni dette dianzi: il piano verrebbe diviso in quattro regioni, e il prolungamento analitico complessivo sarebbe impossibile da una regione all'altra. Bisognerà allora studiare a parte il modo di connettersi dei diversi sottogruppi di monodromia, allorchè da una porzione di piano si passa all'altra.

6. Notiamo che, per la loro stessa definizione, tutti i punti singolari, o quasi, sono tali che i punti interni ad un cerchietto di raggio ϱ, descritto intorno ad essi, non appartengono ad E_ρ.

Quindi, l'insieme complementare di E_ρ si ottiene formando l'insieme comune a tutti questi cerchietti: ed è facile il vedere che esso dovrà necessariamente essere composto da un numero finito o da un infinità numerabile di pezzi staccati (aventi area maggiore o eguale a $\pi\varrho^2$).

Le generatrici del sottogruppo G_ρ, relativo all'insieme E_ρ, si trovano girando attorno a quei pezzi; le sue sostituzioni girando attorno ad essi un numero finito di volte.

Quindi

il sottogruppo G_ρ *di monodromia* (relativo all'insieme E_ρ) *è formato, al più, da un infinità numerabile di generatrici: le sue sostituzioni sono il prodotto d'un numero finito di generatrici, e quindi formano anche esse un insieme numerabile.*

Resta infine da studiare il sottogruppo G_0: esso comprende, come suo sottogruppo, quello cui converge astrattamente qualsiasi successione G_{ρ_1}, G_{ρ_2}, ... G_{ρ_n}..., ove $\lim \varrho_n = 0$.

Meccanica. — *Profili del pelo libero in canali di profondità finita.* Nota II di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Nella Nota precedente [1] ho assegnato una equazione generale, che definisce, con approssimazione, il profilo del pelo libero in un canale di profondità finita.

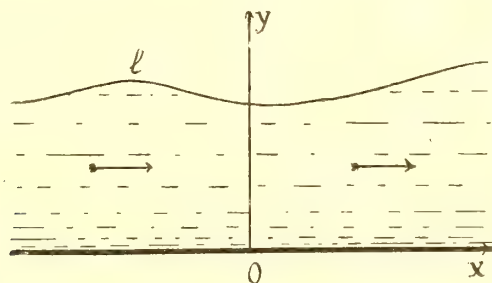



Fig. 1.

Assunto l'asse x coincidente col fondo e l'asse y verticale ascendente, e posto

$$\eta = x + \left(\frac{gy^2}{q} - \frac{q}{y}\right) t \,, \tag{I}$$

l'equazione è la seguente:

$$F(y\,,\eta) = 0\,, \tag{II}$$

dove: F è simbolo di funzione arbitraria di y e di η; q rappresenta la portata della corrente nel canale, g l'accelerazione di gravità e t il tempo.

Mi propongo ora di discutere la validità di questo risultato e dedurre alcune notevoli conseguenze da esso.

Conviene intanto notare, fin da ora, che, per $t = 0$, la (II) definisce la configurazione iniziale del pelo libero; una volta che questa sia assegnata, la (II) stessa definisce, per t qualunque, la forma del medesimo negli istanti successivi.

1. Dalla (II) si ha, derivando rispetto ad x,

$$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0\,;$$

[1] Questi Rendiconti, vol. XXIV, 2° sem., fasc. 11, pag. 503.

ed essendo, per la (1),

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = 1 + \left(\frac{2gy}{q} + \frac{q}{y^2}\right) t \cdot \frac{\partial y}{\partial x},$$

si ha

$$(1) \qquad \frac{\partial y}{\partial x} \left\{ \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial \eta}} + \left(\frac{2gy}{q} + \frac{q}{y^2}\right) t \right\} + 1 = 0 .$$

Escludiamo che la tangente al pelo libero possa divenire verticale. Ciò analiticamente corrisponde ad ammettere che la $\frac{\partial y}{\partial x}$ non diventi mai infinita, cioè che non possa mai annullarsi l'espressione entro le $\{\ \}$ nella (1). Essendo $y > 0$, il termine

$$\left(\frac{2gy}{q} + \frac{q}{y^2}\right) t$$

può assumere tutti i valori da 0 fino a $+\infty$ quando t varia da 0 a $+\infty$; ne segue che, affinchè l'accennata espressione entro le $\{\ \}$ non si annulli mai, è necessario e basta che sia

$$(2) \qquad \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \eta}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} \geq 0 ,$$

ammesso che tutto varii con continuità.

Verificata questa circostanza, dalla (1) scende

$$\lim_{t=\infty} \frac{\partial y}{\partial x} = 0 ;$$

cioè: *la conformazione assintotica* (rispetto al tempo, cioè per $t = \infty$) *del pelo libero è una retta orizzontale.*

Dalla (1) scende ancora la seguente disuguaglianza, quando si tenga conto della (2):

$$(3) \qquad \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| \leq \left| \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \eta}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} \right| .$$

2. Richiamo dalla Nota precedente la circostanza che l'equazione (II) è stata dedotta supponendo gli sviluppi (4) arrestati ai primi termini. Ciò,

in sostanza, equivale ad applicare alla $f(x+iy\,,t)$ — ivi introdotta — lo sviluppo di Taylor arrestato al terzo termine, trascurando quest'ultimo; posto, cioè,

$$f(x+iy\,,t)=f(x\,,t)+iy\,f'_x(x\,,t)-\tfrac{1}{2}\,y^2 f''_x(x+i\theta y\,,t)\,,$$

con $0<\theta<1$ la quantità che si trascura è, in valore assoluto, data dalla seguente espressione:

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\,y^2\,|\,f''_x(x+i\theta y\,,t)\,|\,.$$

Dalla prima delle (6) della Nota I si ha

$$f'_x=\frac{q}{y}\,,$$

da cui, derivando ulteriormente rispetto ad x,

$$f''_x=-\frac{q}{y^2}\frac{\partial y}{\partial x}\,;$$

per cui, sostituendo, la precedente espressione di E diviene

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\,q\,|\,y'_x(x+i\theta y\,,t)\,|\,,$$

e, per la (3),

$$\mathrm{E}\leq\frac{1}{2}\,q\left|\frac{\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \eta}}{\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}}\right|\,, \tag{4}$$

dove nel secondo membro si deve intendere sostituito x con $x+i\theta y$.

3. Applichiamo le precedenti considerazioni ad un caso semplice e notevole. Sia ε una costante da trattarsi come quantità di primo ordine — naturalmente quando ha per coefficiente una quantità che si mantiene finita — e poniamo

$$\mathrm{F}(y\,,\eta)=y-1-\varepsilon\,\mathrm{G}(\varepsilon\eta)=0\,, \tag{5}$$

dove G è una funzione dell'argomento indicato e tale che essa e la sua prima derivata rispetto all'argomento stesso non superino, in valore assoluto, l'unità [1]:

$$|\,\mathrm{G}\,|\leq 1 \qquad |\,\mathrm{G}'\,|\leq 1\,. \tag{6}$$

[1] Evidentemente ci si può sempre esprimere in tal modo, quando si parla di funzioni che non debbono superare, in valore assoluto, numeri finiti prefissati.

Scende, dalla (5), che εG può interpretarsi come rapporto tra lo spostamento verticale dalla retta $y = 1$ e l'unità; l'ipotesi che esso va riguardato come quantità di primo ordine, rispecchia la circostanza che la curva (5) poco differisce dalla retta $y = 1$.

D'altra parte, la retta $y = 1$ rappresenta il profilo del pelo libero in un canale tranquillo, di profondità 1. La (5) rappresenta pertanto piccoli increspamenti alla superficie di un canale, di profondità unitaria, lievemente perturbato.

Dalla (5) si ha ancora, derivando, e tenendo presenti le (6),

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial \eta} = - \varepsilon^2 G' = 0 \, ;$$

e, per queste, la (4) diviene

$$E = 0 \, ,$$

e, di più, rimane verificata la (2).

4. Per maggior chiarezza reputo non oziosa una avvertenza. A prima vista dal fatto che, con l'accennata approssimazione, è sensibilmente $\frac{\partial F}{\partial \eta} = 0$, si sarebbe tratti senz'altro a dire che, dipendendo allora la F dalla sola y, è $y =$ costante l'equazione del pelo libero. Ciò non è vero, inquantochè — come risulta dalla (5) — la y è variabile con η, il che è quanto dire con x e con t.

Immaginiamo infatti, nella (5), la funzione G sviluppata colla formola di Mac-Laurin:

$$G(\varepsilon \eta) = G(0) + \varepsilon \eta \, G_1'(\theta \varepsilon \eta) \qquad (0 < \theta < 1) \, ;$$

con che la (5) stessa diviene

$$y = 1 + \varepsilon G(0) + \varepsilon^2 \eta \, G_1'(\theta \varepsilon \eta) \, .$$

Non si può ritenere trascurabile l'ultimo termine, non ostante la presenza del fattore di secondo ordine ε^2, poichè l'altro fattore η cresce indefinitamente, sia con x, sia con t; e non è da dirsi che, per valori di η abbastanza grandi, in valore assoluto, la quantità $\varepsilon^2 \eta$ si mantenga di ordine superiore al primo e sia quindi trascurabile [cfr. n. 3].

Dunque y è da ritenersi effettivamente variabile con η.

Si tratta, insomma, di piccolissimi increspamenti, non permanenti, in cui la variazione di direzione del pelo libero è così insensibile da ritenersi trascurabile; mentre non è trascurabile, nello stesso ordine di approssimazione, lo scostamento del pelo libero dalla retta $y = 1$.

5. Per quanto si è visto precedentemente, qualunque funzione G, soddisfacente alle sole condizioni (6), è atta a rappresentare un possibile anda-

mento del profilo del pelo libero, nelle circostanze supposte. Così, in particolare, prendendo per G successivamente le funzioni

$$\text{sen} \quad , \quad \text{Sech} \quad , \quad \text{Tangh}$$

soddisfacenti ognuna alle condizioni (6), si hanno altrettanti profili che, allo stato iniziale $(t = 0)$, hanno gli andamenti rappresentati rispettivamente dalle figure 2, 3, 4 e che assintoticamente (per $t = \infty$) tendono a divenire rette orizzontali.

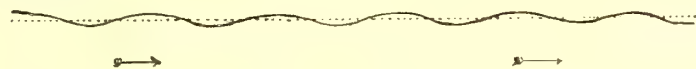



Fig. 2.

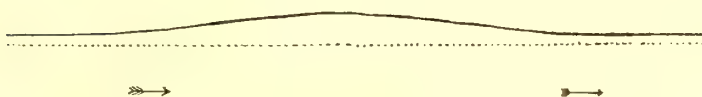



Fig. 3.

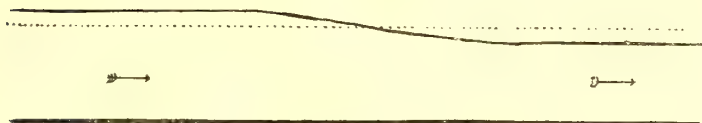



Fig. 4

Matematica. — *Sulle varietà algebriche con infiniti sistemi regolari di integrali riducibili.* Nota di Gaetano Scorza, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

In una Nota precedente [1] abbiamo dedotto per via quasi incidentale, una proposizione relativa alle varietà algebriche con un numero finito di sistemi regolari di integrali riducibili, che caratterizza nettamente il numero di codesti sistemi e la loro configurazione.

Questo nuovo lavoro è dedicato allo studio della configurazione dei sistemi regolari di una varietà algebrica nell'ipotesi che essi siano infiniti, e si dà, a proposito di essa, una prima catena di teoremi generali.

[1] Scorza, *Sulle varietà algebriche con sistemi regolari isolati di integrali riducibili* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XXIV (2° sem. 1915), pp. 445-453].

Grazie al teorema di Severi sul sistema congiungente due sistemi regolari di integrali riducibili, è chiaro che, nell'esame di una varietà algebrica contenente infiniti sistemi regolari di integrali riducibili, giova fissar l'attenzione su quelli, fra di essi, che non contengano sistemi regolari di dimensione inferiore alla propria, o, come diciamo, che siano *puri*: essi appariscono, infatti, come gli elementi primi con cui possono comporsi tutti gli altri.

L'osservazione, come si vede, è molto semplice; ma sembra, anche, assai feconda, poichè conduce a introdurre, per lo studio della configurazione dei sistemi regolari di una varietà algebrica che ne contenga infiniti, una serie di *caratteri* che sono altrettanti numeri interi.

Noi dimostriamo, infatti, che il sistema degli integrali di una tale varietà algebrica può considerarsi, in infiniti modi diversi, come il sistema congiungente di un conveniente numero di sistemi regolari puri indipendenti; *ma, comunque si proceda, restan sempre gli stessi, il numero di codesti sistemi puri, le loro dimensioni e i loro indici di singolarità.*

1. Un sistema lineare ∞^{q-1} di integrali (semplici, di 1ª specie) con $2q$ periodi di una varietà algebrica di irregolarità superficiale $\geq q$, si dirà *puro* o *impuro*, secondo che non contiene o contiene sistemi lineari ∞^{r-1} di integrali con $2r$ periodi, essendo $r < q$.

Da questa definizione segue subito che:

Un sistema lineare impuro di integrali contiene sempre qualche sistema puro; ed è poi chiaro che:

Se di due sistemi regolari di integrali riducibili, appartenenti a una stessa varietà algebrica, uno è puro e l'altro è impuro, essi o sono indipendenti o si appartengono; se invece sono entrambi puri, essi o sono indipendenti o coincidono (1).

2. Due sistemi lineari ∞^{q-1} di integrali con $2q$ periodi, aventi lo stesso indice di singolarità, si diranno *isomorfi*, se sono entrambi puri; oppure se sono entrambi impuri e può stabilirsi una tale trasformazione omografica del primo nel secondo, che l'insieme dei sistemi regolari di integrali riducibili appartenenti al primo si rifletta nell'insieme analogo del secondo, due sistemi regolari omologhi riuscendo sempre (di egual dimensione e) di eguale indice di singolarità.

Evidentemente, *sistemi di integrali isomorfi ad uno stesso sono isomorfi tra di loro; ed allorchè due sistemi impuri sono isomorfi, in ogni omografia, che ne metta in luce l'isomorfismo, risultano isomorfi i sistemi regolari omologhi di integrali riducibili.*

3. La prima osservazione del n. 1 può essere precisata. Si ha, cioè, che:

(1) Cfr. Scorza, *Sugli integrali abeliani riducibili* [Rendiconti della R Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XXIV (1° sem. 1915), pp. 412-418 e pp. 645-654], pag. 418.

Un sistema lineare impuro di integrali può sempre considerarsi come il sistema congiungente un certo numero di sistemi regolari puri indipendenti di integrali riducibili.

Per fissar le idee, possiamo supporre, com'è lecito, che il sistema lineare impuro considerato sia quello, H, di tutti gli integrali di una varietà algebrica V; cosicchè V conterrà, per ipotesi, qualche sistema regolare puro di integrali riducibili. Sia, uno di questi, il sistema A, e sia A′ un complementare di A su V.

Siccome H è il sistema congiungente A con A′, se A′ è puro il teorema è dimostrato; se no, sia B un sistema puro contenuto in A′, e B′ un complementare di B in A′.

Siccome A′ è il sistema congiungente B con B′, H risulta il sistema congiungente dei sistemi indipendenti A, B e B′, ove A e B sono già dei sistemi puri.

Ora, se B′ è puro, il teorema è dimostrato; se no, si applicherà a B′ il discorso fatto già per H e per A′. Siccome il procedimento non può essere illimitatamente proseguito, si finirà per trovare che H è il sistema congiungente di un certo numero di sistemi regolari puri indipendenti A, B, C, ..., L, e allora il teorema sarà dimostrato

4. Un gruppo di sistemi puri di un sistema impuro H, che siano indipendenti e che abbiano H quale sistema congiungente — tale è ad es., per il sistema H del n. 3, il gruppo A, B, C, ..., L ivi trovato —, si dirà un *gruppo fondamentale* (di sistemi puri) di H.

Per estensione si dirà poi *gruppo fondamentale di un sistema puro* il sistema medesimo.

In ciascun gruppo fondamentale di un sistema impuro H, un sistema qualunque del gruppo e il sistema congiungente tutti gli altri sono fra loro complementari; quindi *ogni gruppo fondamentale di* H *può essere ottenuto col procedimento adoperato più sopra, e ogni sistema puro di* H *fa parte di qualche suo gruppo fondamentale.*

Gruppo fondamentale di una varietà algebrica è poi un gruppo fondamentale del sistema totale dei suoi integrali.

5. Un sistema lineare di integrali, o, ciò che in sostanza è lo stesso, una varietà algebrica, può avere più gruppi fondamentali; e, anzi, se ne ha più di uno, ne ha infiniti (n. 6).

Ora il risultato finale a cui miriamo consiste nel dimostrare che in questa seconda alternativa *i varî gruppi fondamentali della varietà risultano tutti costituiti di uno stesso numero di sistemi puri, quelli di un gruppo essendo inoltre isomorfi rispettivamente a quelli di ogni altro.*

6. Sia V_p una varietà algebrica, di irregolarità superficiale p e indice di singolarità k, dotata di sistemi regolari di integrali riducibili, e siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) i sistemi puri di un suo gruppo fondamentale; siano

poi $q_j - 1$ e k_j la dimensione e l'indice di singolarità del sistema A_j. *Allora si ha, in primo luogo,*

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_n = p\,, \tag{1}$$

e, in secondo luogo,

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_n + n - 1 \leq k\,, \tag{2}$$

dove vale il segno superiore o l'inferiore, secondo che è infinito o finito l'insieme dei sistemi regolari di integrali riducibili di V_p.

Siccome la (1) è conseguenza immediata della definizione di gruppo fondamentale, occupiamoci soltanto della (2), e diciamo $A^{(j)}$ il sistema congiungente i sistemi puri $A_1, A_2, \ldots, A_j$, e $k^{(j)}$ il suo indice di singolarità. Naturalmente, $A^{(n)}$ sarà il sistema totale degli integrali di V_p; e $A^{(1)}$, $k^{(1)}$ e $k^{(n)}$ saranno, rispettivamente, la stessa cosa che A_1, k_1 e k.

Nel sistema $A^{(j)}$, per $j \geq 2$, A_j e $A^{(j-1)}$ sono fra loro complementari; quindi essi hanno in $A^{(j)}$ uno stesso coefficiente di immersione. Diciamolo $\lambda^{(j)}$.

Per quanto abbiamo stabilito altrove, sarà, successivamente [1],

$$k_1 + k_2 + 1 = k^{(2)} - \lambda^{(2)}\ ;\ k^{(2)} + k_3 + 1 = k^{(3)} - \lambda^{(3)}\ ;\ \ldots;$$
$$k^{(n-1)} + k_n + 1 = k - \lambda^{(n)}\ ;$$

e quindi:

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_n + n - 1 = k - \sum_{j=2}^{j=n} \lambda^{(j)}\,.$$

Siccome ciascuna $\lambda^{(j)}$ è positiva o nulla, segue che nella (2) vale il segno superiore o l'inferiore, secondo che una almeno o nessuna delle $\lambda^{(j)}$ è diversa da zero.

Nel primo caso, uno almeno dei sistemi $A^{(j)}$ (e precisamente quello per cui è diversa da zero la $\lambda^{(j)}$ corrispondente) contiene infiniti sistemi regolari di integrali riducibili, e quindi la stessa cosa può dirsi per la varietà V_p.

Nel secondo caso, A_n e $A^{(n-1)}$ risultano isolati su V_p; poi A_{n-1} e $A^{(n-2)}$ risultano isolati entro $A^{(n-1)}$, e quindi anche su V_p; e via dicendo [2]. Ma allora $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono tutti isolati su V_p, e V_p contiene soltanto un numero finito di sistemi regolari di integrali riducibili; i quali, come sappiamo, sono dati tutti dai sistemi A_j e da quelli (impuri) che li congiungono a due a due, a tre a tre, ..., a $n - 1$ a $n - 1$.

Con ciò è stabilito il teorema enunciato; e si vede, anzi, che *la nostra* V_p *contiene uno, ed un solo, gruppo fondamentale di sistemi puri, quando,*

[1] Scorza, *Sugli integrali abeliani riducibili* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XXIV (2° sem. 1915), pp. 393-400], n. 5.

[2] Loc. cit. [1].

e solo quando, non contiene che un numero finito di sistemi regolari di integrali riducibili.

7. *Se* A *è un sistema regolare di integrali riducibili appartenente a una varietà algebrica* V, *ed* A' *e* A'' *sono due suoi diversi complementari su* V, A' *e* A'' *sono isomorfi.*

Supponiamo introdotta la solita rappresentazione geometrica del sistema degli integrali di V, per modo da poter parlare di sistemi nulli di V, di assi di A, A', A'', ecc. (1). Siccome A' e A'' sono complementari ad A, è possibile in infiniti modi scegliere due sistemi nulli (non singolari) φ' e φ'' di V, dei quali l'uno, φ', porti l'asse A_1', di A', in quello di A, e l'altro, φ'', l'asse di A in quello, A_1'', di A''. Ma allora il prodotto $\varphi'\varphi''$ è una omografia *razionale*, che muta in sè tanto l'imagine quanto l'imagine coniugata del sistema totale degli integrali di V, e che trasforma l'asse A_1' nell'asse A_1'', ogni spazio razionale contenuto in A_1' in uno spazio razionale contenuto in A_1'', e ogni sistema nullo razionale di A_1' (o di uno spazio razionale subordinato ad A_1') in un sì fatto sistema nullo di A_1'' (o di uno spazio razionale subordinato ad A_1''). Tanto basta, evidentemente, per concludere che A' e A'' sono isomorfi (2).

8. Ciò posto dimostriamo che:

Se una varietà algebrica contiene sistemi regolari di integrali riducibili, ma è priva di sistemi regolari isolati, i suoi sistemi regolari puri sono tutti isomorfi tra di loro: cioè, hanno tutti la stessa dimensione e lo stesso coefficiente di singolarità.

Sia V la varietà algebrica considerata, la quale, come è chiaro, contiene certo infiniti sistemi regolari puri; e supponiamo, se è possibile, che questi sistemi puri non siano tutti isomorfi tra di loro, o perchè non hanno tutti la stessa dimensione, o perchè, pur avendo una stessa dimensione, non hanno tutti lo stesso indice di singolarità

In ogni caso sia A un sistema puro di V, tale che non esistano su V sistemi puri di dimensione inferiore a quella di A.

Ciascun sistema puro A_1 di V, non isomorfo ad A, non potrà essere indipendente da un qualsiasi complementare di A: poichè o A_1 ha dimensione superiore a quella di A e allora l'affermazione fatta è senz'altro evidente; o A_1 ha la stessa dimensione di A, ma non lo stesso indice di singolarità, e allora (n. 7) non può avere con A uno stesso complementare. Segue (n. 1) che ciascun complementare di A contiene tutti i sistemi puri di V non isomorfi ad A.

Chiamiamo B il sistema regolare di integrali riducibili, di dimensione minima, che, in base a quanto è stato detto, contiene tutti i sistemi puri

(1) Si tengano presenti le Note citate in [2]) e [3]).

(2) Se i sistemi A' e A'' sono puri, il teorema del testo si riduce al teorema IV della Nota citata in [3]) e ivi dimostrato per via diversa da quella attuale.

di V non isomorfi ad A; per la definizione stessa di B sarà impossibile che V contenga altri sistemi isomorfi a B. Ma ciò è assurdo, perchè, in virtù dell'ipotesi, B non è isolato su V, e quindi esistono su V infiniti sistemi aventi con B uno stesso complementare, cioè infiniti sistemi regolari isomorfi a B; dunque, come volevasi, è assurdo supporre che V contenga sistemi puri non isomorfi ad A.

Possiamo pertanto asserire che:

Se una varietà algebrica contiene sistemi regolari di integrali riducibili, ma nessuno di questi è isolato, i suoi gruppi fondamentali di sistemi puri sono infiniti, ma contengono tutti lo stesso numero di sistemi, e questi sono tutti isomorfi tra di loro. La dimensione di ognuno di questi sistemi puri, aumentata di 1, è, poi, un divisore dell'irregolarità superficiale della varietà; per modo che, se quest'ultima è un numero primo, i sistemi puri in discorso si riducono a integrali ellittici.

Con questo il teorema preannunciato nel n. 5 resta stabilito per le varietà contenenti sistemi regolari di integrali riducibili, ma prive di sistemi regolari isolati.

9. Adesso supponiamo che V sia una varietà algebrica dotata di sistemi regolari di integrali riducibili, tra i quali ve ne siano di quelli isolati, e indichiamo con

$$A_1, A_2, \dots, A_n \qquad (n \geq 2) \tag{3}$$

un gruppo fondamentale di sistemi puri di V.

I sistemi regolari isolati di V sono, per quanto sappiamo, in numero finito e, detti, fra di essi, $B_1, B_2, \dots, B_m$ quelli che non contengono sistemi regolari isolati di dimensione inferiore alla propria, i sistemi regolari isolati di V sono forniti tutti da $B_1, B_2, \dots, B_m$ e dai sistemi regolari che li congiungono a due a due, a tre a tre, ..., a $m-1$ a $m-1$. Si ricordi, poi, che il sistema congiungente $B_1, B_2, \dots, B_m$ è il sistema di tutti gli integrali di V: e quindi *il* complementare, ad es., di B_1 su V, è il sistema B_1' congiungente $B_2, B_3, \dots, B_m$ [1].

Siccome B_1 e B_1' sono isolati su V, ognuno dei sistemi A_j, essendo puro, dovrà o appartenere a B_1 o appartenere a B_1' [2]; quindi il gruppo fondamentale (3) si spezzerà in due gruppi parziali, poniamo

$$A_1, A_2, \dots, A_{n_1} \quad \text{e} \quad A_{n_1+1}, \dots, A_n \qquad (n_1 \geq 1),$$

dei quali l'uno sarà formato dai sistemi A_j situati in B_1, e l'altro dai sistemi A_j situati in B_1'. Di più, il primo sarà un gruppo fondamentale di sistemi puri di B_1, e l'altro sarà un gruppo fondamentale di sistemi puri di B_1'.

[1] Vedi la Nota citata in [1].
[2] Loc. cit. [1].

Ora si consideri in B'_1 *il* complementare di B_2 che è il sistema B'_2 congiungente $B_3, B_4, \dots, B_m$; in B'_2 *il* complementare di B_3, e così via; e si ripeta a volta a volta il ragionamento fatto. Si troverà, alla fine, che il gruppo fondamentale (3) si spezza in m gruppi parziali, diciamo

$$(4) \qquad A_1, A_2, \dots, A_{n_1}\ ;\ A_{n_1+1}, \dots, A_{n_1+n_2}\ ;\ \dots\ ;\ A_{n_{m-1}+1}, \dots, A_n$$

che costituiscono, ordinatamente, altrettanti gruppi fondamentali di sistemi puri di $B_1, B_2, \dots, B_m$.

Ma ciascun sistema B_j non contiene sistemi regolari isolati di V di dimensione inferiore alla propria, cioè non contiene sistemi regolari che siano isolati in esso, dunque un gruppo parziale (4) o contiene un solo sistema puro, e allora coincide col corrispondente sistema B_j; o è formato di sistemi puri, tutti isomorfi tra di loro, e in tal caso il numero dei suoi sistemi, la loro dimensione comune e il loro comune indice di singolarità dipendono soltanto dal corrispondente sistema B_j.

Segue che o i sistemi B_j sono tutti puri, e allora $m = n$, i sistemi B_j coincidono coi sistemi A_j, e V ammette un solo gruppo fondamentale; o fra i sistemi B_j ve n'è almeno uno impuro, e allora V ammette infiniti gruppi fondamentali distinti, ma questi contengono tutti lo stesso numero di sistemi puri, i sistemi di uno risultando rispettivamente isomorfi a quelli di qualsiasi altro.

Dalle cose dette qui e nel num. precedente ricaviamo il seguente teorema generale:

Una varietà algebrica dotata di infiniti sistemi regolari di integrali riducibili ammette infiniti gruppi fondamentali distinti di sistemi puri. Due qualunque di questi gruppi contengono però lo stesso numero di sistemi puri, e i sistemi dell'uno sono ordinatamente isomorfi a quelli dell'altro.

Inoltre è chiaro che:

Se una varietà algebrica ammette infiniti sistemi regolari di integrali riducibili, in ogni suo gruppo fondamentale appariscono almeno due sistemi puri isomorfi;

e quindi:

Se in un gruppo fondamentale di una varietà algebrica non compaiono sistemi puri isomorfi, il gruppo è unico e la varietà contiene soltanto un numero finito di sistemi regolari di integrali riducibili.

10. Precise norme accademiche ci hanno costretti a rimandare a un lavoro, che sarà pubblicato altrove, alcune semplici considerazioni, le quali fanno riconoscere che nel teorema del n. 6 è implicitamente contenuta la generalizzazione completa di un notevole teorema del sig. De Franchis [1];

[1] De Franchis, *Le varietà algebriche con infiniti integrali ellittici* [Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XXXVIII (2° sem. 1914), pag. 192].

in esso saranno pure ulteriormente studiate le varietà algebriche con infiniti sistemi regolari di integrali riducibili, ma prive di sistemi regolari isolati, su cui ormai si concentra tutto l'interesse delle nostre ricerche.

In particolare vi si troverà dimostrato che:

Una varietà algebrica di irregolarità superficiale $p\ (>1)$, *priva di sistemi regolari isolati, ma dotata di (infiniti) integrali ellittici, non può presentare che due aspetti differenti; e cioè:*

a) o ha l'indice di singolarità $\frac{(p-1)(p+2)}{2}$, *e allora i suoi integrali ellittici, nessuno dei quali è a moltiplicazione complessa, costituiscono, secondo la nomenclatura del sig. Severi, una configurazione normale;*

b) o ha l'indice di singolarità p^2-1, *e allora ogni suo integrale (semplice di 1ª specie) è approssimabile mediante i suoi integrali ellittici; questi ultimi risultando tutti a moltiplicazione complessa.*

Matematica. — *Sull'equazione funzionale* $\int_a^b \mathrm{K}(st)\,\theta(t)\,dt = 0$. Nota di ATTILIO VERGERIO, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

Diremo che una funzione appartiene alla classe Φ se appartiene ad uno dei seguenti gruppi di funzioni ortogonali:

1°) funzioni trigonometriche, considerate nell'intervallo $a=0$, $b=2\pi$,

$$\operatorname{sen} kx \quad ; \quad \cos kx \qquad (k=0,1,2,\ldots);$$

2°) funzioni di Bessel, cioè le funzioni $(a=0\ ,\ b=1)$,

$$\mathrm{P}_{\mu,k}=\mathrm{P}_\mu(\lambda_k x)\,,$$

dove P_μ è una funzione che soddisfa all'equazione

$$x\mathrm{P}''_\mu+(2\mu+1)\,\mathrm{P}'_\mu+x\mathrm{P}_\mu=0 \text{ (1)},$$

μ essendo una costante reale qualunque, e λ_k $(k=1,2,3,\ldots)$ rappresentano le radici positive d'una delle seguenti equazioni:

$$\mathrm{P}_\mu(z)=0 \quad , \quad \mathrm{P}'_\mu(z)=0 \quad , \quad z\mathrm{P}'_\mu(z)-h\mathrm{P}_\mu(z)=0\,,$$

h essendo una costante qualunque, diversa da zero;

3°) funzioni di Lamé;

4°) polinomi di Tchébicheff e, in particolare, polinomi di Jacobi e funzioni di Legendre;

(1) Gli accenti indicano l'ordine di derivazione.

5°) funzioni V_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ soddisfacenti alle seguenti condizioni:

$$\left.\begin{array}{lll} V''_k + (\lambda_k p - q) V_k = 0 & \text{per} & a < x < b \\ V'_k - h V_k = 0 & \text{"} & x = a \\ V'_k + \varrho V_k = 0 & \text{"} & x = b \end{array}\right\} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

dove p e q sono funzioni continue e positive della x, la prima delle quali non s'annulla nell'intervallo (a, b); h e ϱ sono delle costanti positive date, e λ_k una costante positiva ben determinata per ogni soluzione V_k.

Se $\varphi_\nu(s)$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ rappresenta una successione qualunque di funzioni della classe suddetta Φ, sussistono i seguenti teoremi [1]:

α) *Se la serie*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(s)\, d_\nu \quad , \quad d_\nu = \int_a^b \varphi_\nu(s)\, g(s)\, ds$$

è uniformemente convergente, sarà

$$g(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(s)\, d_\nu \,,$$

in tutti i punti di (a, b) *in cui la funzione* $g(s)$ *è continua.*

Da questo teorema discende, come corollario, l'altro, di cui faremo uso:

Se la funzione data $g(s)$ *è tale che le costanti* d_ν, *da un indice* n *in poi, siano tutte nulle, sarà*

$$g(s) = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(s)\, d_\nu \,,$$

in tutti i punti di (a, b) *in cui la* $g(s)$ *è continua.*

β) *Qualunque sia la* $g(s)$, *purchè limitata ed integrabile, sarà sempre valido lo sviluppo*

$$\int_a^b \{g(s)\}^2\, ds = \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu^2 \quad ; \quad d_\nu = \int_a^b \varphi_\nu(s)\, g(s)\, ds \,.$$

2. Ciò premesso, consideriamo l'equazione, a nucleo *simmetrico*,

$$\int_a^b K(st)\, \theta(t)\, dt = 0, \tag{1}$$

e proponiamoci di studiare la natura delle sue soluzioni.

Nella (1), dopo aver mutato s in r, se ne moltiplichino ambo i membri per $K(sr)\, dr$ e si integri; avremo così la successione

$$\int_a^b K_n(st)\, \theta(t)\, dt = 0 \,. \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

[1] Stekloff, *Sur certaines égalités générales* ecc. Mem. de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg, VIII série, tomo XV, n. 7.

Si dividano ambo i membri della $2n^{esima}$ uguaglianza, così ottenuta, per γ^n [1], e si passi al limite per $n=\infty$. Ricordando [2] che la funzione $\frac{K_{2n}(st)}{\gamma^n}$ tende, al crescere di n, uniformemente ad una funzione $H(st)$ continua, positiva e non identicamente nulla, avremo al limite l'equazione

$$\int_a^b H(st)\,\theta(t)\,dt=0, \tag{2}$$

le cui soluzioni sono *tutte* rappresentate da

$$\theta(s)=\chi(s)-\int_a^b H(st)\,\chi(t)\,dt\,, \tag{3}$$

dove $\chi(s)$ è una funzione qualunque, purchè integrabile e finita.

Infatti, che ogni $\theta(s)$ definita dalla (3) sia soluzione della (2), lo si vede subito, sostituendo in questa, a $\theta(t)$, l'espressione (3) ed osservando che

$$\int_a^b H(sr)\,H(rt)\,dr=\lim_{n=\infty}\int_a^b \frac{K_{2n}(sr)}{\gamma^n}\,\frac{K_{2n}(rt)}{\gamma^n}\,dr=\lim_{n=\infty}\frac{K_{4n}(st)}{\gamma^{2n}}=H(st)\,;$$

d'altra parte, è poi evidente che, se $\psi(s)$ è una soluzione della (2), si potrà sempre scrivere

$$\psi(s)=\psi(s)-\int_a^b H(st)\,\psi(t)\,dt\,,$$

e che quindi la $\psi(s)$ si potrà mettere sotto la forma (3)

La (3) rappresenterà perciò tutte le soluzioni della (2); e, poichè tra le soluzioni di questa vi sono evidentemente anche quelle della (1), potremo affermare che la (3) rappresenterà anche *tutte* le soluzioni della (1).

Sostituiamo nella (1), a $\theta(t)$, il valore dato dalla (3). Essendo

$$\int_a^b K(st)\,dt\int_a^b H(tr)\,\chi(r)\,dr=\lim_{n=\infty}\int_a^b \frac{K_{2n+1}(sr)}{\gamma^n}\,\chi(r)\,dr=\lim_{n=\infty}\frac{\chi_{2n+1}(s)}{\gamma^n}\,,$$

avremo

$$\chi_1(s)=\lim_{n=\infty}\frac{\chi_{2n+1}(s)}{\gamma^n}\,.$$

E poichè

$$\lim_{n=\infty}\frac{\chi_{2n+1}(s)}{\gamma^n}=\lim_{n=\infty}\frac{1}{\gamma}\int_a^b K_2(sr)\,dr\int_a^b\frac{K_{2n-1}(rt)}{\gamma^{n-1}}\,\chi(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\gamma}\int_a^b K_2(sr)\lim_{n=\infty}\frac{\chi_{2n-1}(r)}{\gamma^{n-1}}\,dr=\int_a^b K_2(sr)\,\frac{\chi_1(r)}{\gamma}\,dr=\frac{\chi_3(s)}{\gamma}\,,$$

[1] Si ricordi che $\gamma=\lim\gamma_n$ e che $\gamma_n=\frac{U_{2n+2}}{U_{2n}}$.

[2] Schmidt, *Entwicklung willkürlicher Functionen nach Systemen vorgeschriebener*. Inaugural-Dissertation, Göttingen 1905, § 11.

sarà anche

$$\chi_1(s) = \frac{\chi_3(s)}{\gamma} .$$

Ne segue che le funzioni $\chi(s)$, tali che, per esse, la (3) rappresenti le soluzioni della (1), dovendo tutte soddisfare quest'ultima eguaglianza, avranno necessariamente tutte le costanti C_n eguali tra loro per $n \geq 1$ [1]. Indicando con $g(s)$ una qualunque di tali funzioni, alle soluzioni della (1) potrà allora darsi la seguente forma:

$$\theta(s) = g(s) - \frac{g_2(s)}{\gamma} . \tag{4}$$

3. Alla (4) si può dare anche un'altra forma, che ci tornerà utile.

Siccome l'equazione

$$g_1(s) = \int_a^b K(st) \, g(t) \, dt$$

ammette soluzione, dovrà aversi, per la condizione Picard-Lauricella [2],

$$g_1(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s) \int_a^b \varphi_\nu(s) \, g_1(s) \, ds = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s) \, d_\nu}{\lambda_\nu} ,$$

dove

$$d_\nu = \int_a^b \varphi_\nu(s) \, g(s) \, ds ;$$

e quindi anche

$$g_3(s) = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s) \, d_\nu}{\lambda_\nu^3} .$$

Ed avendosi, per tutte le funzioni $g(s)$ considerate,

$$g_1(s) - \frac{g_3(s)}{\gamma} = 0 , \tag{5}$$

sarà

$$\sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s) \, d_\nu}{\lambda_\nu} \left(1 - \frac{1}{\lambda_\nu^2 \gamma}\right) = 0 ;$$

da cui si deduce che, per tutti i valori di ν, dovrà aversi

$$\frac{d_\nu}{\lambda_\nu} \left(1 - \frac{1}{\lambda_\nu^2 \gamma}\right) = 0 .$$

[1] Vergerio, *Sull'equazione integrale di 1ª specie*. Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, seduta dell'8 nov. 1914.

[2] *Sull'equazione integrale di 1ª specie*. Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, vol. XVIII, serie 5ª, 2° sem., fasc. 3°.

Il secondo fattore di questo prodotto è nullo solo pei valori $\lambda_1 = + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, $\lambda_2 = - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$; dovrà quindi essere necessariamente

$$d_\nu = 0 \qquad (\nu = 3, 4, 5, \dots).$$

Con ciò avremo

$$g_1(s) = \sum_{\nu=1}^{p_1} \frac{\varphi_\nu(s)\, d_\nu}{\lambda_1} + \sum_{\nu=1}^{p_2} \frac{\varphi_\nu(s)\, d_\nu}{\lambda_2}, \tag{6}$$

dove p_1 e p_2 rappresentano il numero delle autofunzioni linearmente indipendenti, relative a λ_1 e λ_2 rispettivamente.

Dall'ultima eguaglianza si deduce, notando che $\lambda_1^2 \gamma = \lambda_2^2 \gamma = 1$,

$$\frac{g_2(s)}{\gamma} = \sum_{\nu=1}^{p_1} \varphi_\nu(s)\, d_\nu + \sum_{\nu=1}^{p_2} \varphi_\nu(s)\, d_\nu = \sum_{\nu=1}^{p} \varphi_\nu(s)\, d_\nu,$$

avendo posto $p_1 + p_2 = p$.

La (4) può quindi scriversi

$$\theta(s) = g(s) - \sum_{\nu=1}^{p} \varphi_\nu(s)\, d_\nu \ \text{[1]}. \tag{4'}$$

4. Facciamo l'ipotesi che le costanti γ_n, relative a $K(st)$, siano tutte eguali tra loro. Sappiamo [2] che allora la (5) è sempre soddisfatta, qualunque sia la $g(s)$, purchè finita ed integrabile in (a, b). Le soluzioni $\theta(s)$ non potranno, in questo caso, essere *tutte* identicamente nulle; perchè, se ciò fosse, si dovrebbe avere, per ogni funzione finita ed integrabile $g(s)$,

$$g(s) = \frac{g_2(s)}{\gamma};$$

e si dovrebbe conchiudere [3] che l'equazione

$$g(s) = \int_a^b K(st)\, h(t)\, dt$$

[1] Il Lauricella aveva già incidentalmente osservato (*Sopra alcune equazioni integrali*. Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, seduta 21 giugno 1908) che le soluzioni della (1) si possono mettere sotto la forma

$$\chi(s) - \sum_\nu \varphi_\nu(s) \int_a^b \varphi_\nu(s)\, \chi(s)\, ds,$$

dove $\chi(s)$ è una funzione integrabile qualunque. Non avendo però approfondito la questione, non aveva notato che le $\chi(s)$ non possono essere qualunque, e che la serie si riduce alla somma d'un numero finito di termini.

[2] Vergerio, *Una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di soluzioni nell'equazione integrale di 1ª specie*. Questi Rendiconti, seduta 6 giugno 1915.

[3] Cfr. la prima delle mie Note citate.

ammette soluzione, qualunque sia la $g(s)$, purchè integrabile e finita; il che evidentemente non può essere. Possiamo pertanto affermare che

se le costanti γ_n *di* $K(st)$ *sono tutte eguali tra loro, le soluzioni* $\theta(s)$ *della* (1) *non possono essere tutte identicamente nulle;* ed anche (ciò che è poi lo stesso) che *condizione necessaria affinchè la* (1) *sia a funzione caratteristica* [1] *chiusa è che le costanti* γ_n *non siano tutte eguali tra loro.*

5. Osserviamo che dalla (4) si deduce immediatamente che se $K(st)$ è una funzione limitata entro il suo campo di variabilità $\left(\text{tale essendo allora anche la } \frac{g_2(s)}{\gamma}\right)$, la $g(s)$ sarà anch'essa limitata o no, a seconda che lo sarà o no la $\theta(s)$.

Analogamente, essendo $g_2(s)$ continua [2], la continuità di $g(s)$ dipenderà da quella di $\theta(s)$; e le eventuali discontinuità di una di esse saranno della stessa natura di quelle dell'altra.

Ciò premesso, facciamo l'ipotesi che le p autofunzioni linearmente indipendenti di $K(st)$, relative agli autovalori $\pm\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, appartengano alla classe Φ; e tra le soluzioni $\theta(s)$ della (1) consideriamo quelle che sono continue in (a, b), e quelle che sono puntualmente discontinue.

Per quanto osservammo più sopra, le $g(s)$ corrispondenti saranno funzioni della stessa natura; quindi per il corollario del teorema α) (ved. n. 1), il secondo membro della (4′) sarà nullo in ogni punto di (a, b), se la $g(s)$ ivi è continua; sarà da eccettuarsi un numero finito di punti, se è puntualmente discontinua.

6. Aggiungasi ora la condizione che la $K(st)$ sia una funzione limitata; e tra le $\theta(s)$ si considerino quelle che sono limitate. Tali dovendo allora essere anche le corrispondenti $g(s)$, avremo, pel teorema β) del n. 1,

$$V_0 = \sum_{\nu=1}^{p} d_\nu^2 \quad ; \quad V_0 = \int_a^b [g(s)]^2 \, ds .$$

[1] Per noi le due espressioni nucleo e funzione caratteristica sono sinonimi.

[2] Invero dalla convergenza uniforme di $\frac{K_{2n}(st)}{\gamma^n}$ verso il limite $H(st)$, discende quella, pure uniforme, degli integrali

$$\frac{g_{2n}(s)}{\gamma^n} = \int_a^b \frac{K_{2n}(st)}{\gamma^n} g(t) \, dt$$

verso il loro limite, il quale perciò sarà una funzione continua.

E poichè, per ogni $n \geq 1$, si ha (cfr. la prima delle mie Note citate)

$$\frac{g_2(s)}{\gamma} = \frac{g_{2n}(s)}{\gamma^n} ,$$

sarà pure $g_2(s)$ una funzione continua.

E poichè dalla (6), mediante quadratura ed integrazione, s'ottiene

$$V_1 = \gamma \sum_{\nu=1}^{p} d_\nu^2 \quad , \quad \left(\int_a^b [g_1(s)]^2 = V_1 \right),$$

avremo

$$c_0 = \frac{V_1}{V_0} = \gamma \; ; \tag{7}$$

cioè, qualunque sia n,

$$c_0 = c_n \text{ [1]};$$

e quindi [2]

$$\theta(s) = g(s) - \frac{g_2(s)}{\gamma} = 0 \, .$$

Quest'ultima eguaglianza ci dice che le soluzioni limitate $\theta(s)$ saranno tutte nulle.

Riassumendo:

Se le autofunzioni linearmente indipendenti del nucleo simmetrico $K(st)$, *relative agli autovalori* $\pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, *sono funzioni della classe* Φ, *le soluzioni continue della* (1) *saranno tutte identicamente nulle in* $(a \, . \, b)$, *come pure quelle puntualmente discontinue, eccettuato per quest'ultime un numero finito di punti. Se poi* $K(st)$ *è anche limitata, non solo saranno nulle tutte le soluzioni continue e puntualmente discontinue* (*colla suddetta eccezione*), *ma lo saranno anche tutte quelle limitate.*

7. Non sarà infine del tutto inutile notare che, nel caso in cui si sappia *a priori* che le soluzioni dell'equazione (1) che si considera debbano essere *tutte continue*, oppure *tutte limitate* [se tale è anche la $K(st)$], potremo affermare, ricordando il teorema del n. 4, che

se le costanti γ_n *non sono tutte eguali tra loro, e le autofunzioni linearmente indipendenti di* $K(st)$, *relative agli autovalori* $\pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, *appartengono alla classe* Φ, *l'equazione* (1) *sarà a funzione caratteristica chiusa.*

[1] Nella seconda delle mie Note citate ho dimostrato che, se $g(t)$ non è soluzione dell'equazione $\int_a^b H(st)\, h(t)\, dt = 0$, sarà $\lim_{n=\infty} c_n = \gamma$. Qui si vede subito che il caso di eccezione non è verificato. Invero, se fosse $\int_a^b H(st)\, g(t)\, dt = \lim_{n=\infty} \frac{g_{2n}(s)}{\gamma^n} = 0$, in grazia dell'uguaglianza $\frac{g_2(s)}{\gamma} = \frac{g_{2n}(s)}{\gamma^n}$ $(n \geq 1)$, sarebbe $g_2(s) = 0$; ed anche, per l'altra

$$V_1 = \int_a^b g(s)\, g_2(s)\, ds \, ,$$

$V_1 = 0$. Si avrebbe quindi, per la (7), $V_0 = 0$ (la costante γ non potendo essere mai nulla); da cui seguirebbe $g(s) = 0$ identicamente, contro il supposto.

[2] Cfr. la prima delle mie Note citate.

Storia della matematica. — *Sulle scoperte di Pietro Mengoli.* Nota II di Giovanni Vacca, presentata dal Socio V. Volterra.

In una Nota precedente ho posto in rilievo l'attività scientifica del matematico bolognese Pietro Mengoli. Converrà ora osservare che a lui spetta un merito non piccolo, finora non osservato da alcuno, se non forse dal Leibniz, relativo alle notazioni, le quali, come il Leibniz diceva, non sono una piccola parte dell'arte d'inventare.

V. (1) È nella *Geometria Speciosa* pubblicata nel 1659 che il metodo è esposto diffusamente.

Già Bonaventura Cavalieri nella sua *Geometria* del 1637 aveva adoperato in senso tecnico la parola *omnes lineae* di una figura data, per indicare lo stesso ente che noi indichiamo, seguendo Leibniz, col simbolo $\int$.

Mengoli adopera dapprima la lettera O, per le somme finite.

Così, per lui (2),

$$\mathrm{O}.\, 2a = t^2 - t$$

significa

$$\sum_{r=1}^{r=n} 2r = n^2 - n$$

Adopera invece il simbolo FO (3) per le somme di infinite linee. Indica con a la variabile che noi diciamo ora abitualmente x, e chiama infine r (iniziale della parola residuo) ciò che noi chiamiamo ora $1 - x$.

Allora

$$\mathrm{FO}\,.\, ar \;\; ; \;\; \mathrm{FO}\,.\, \sqrt{ar} \;\; ; \;\; \mathrm{FO}\,.\, a^2 r^3$$

rappresentano gli stessi enti che noi indichiamo con

$$\int_0^1 x(1-x)dx \;\; ; \;\; \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\, dx \;\; ; \;\; \int_0^1 x^2(1-x)^3 dx \;,$$

e calcola, con lunghi tentativi dapprima, e poi rigorosamente, tutti gli integrali binomii ad esponenti interi e positivi (4).

(1) Continua la numerazione dei paragrafi della Nota precedente, a pag. 508 di questo volume.

(2) *Geometria speciosa*, Bononiae, 1659, Elementum secundum, pag. 38.

(3) ibid., libr. VI, pag. 367 e segg. FO è il principio della parola *forma*.

(4) È veramente deplorevole che il Mengoli abbia atteso dodici anni prima di pubblicare questi importanti risultati, già contenuti sotto altra forma, nell'*Arithmetica infi-*

Tutti questi sforzi avevano uno scopo ben chiaro.

« His demonstratis, cogitabam si possent aliae quadraturae inveniri ex « inventis compositae, in quas insignis aliqua resolvatur; quemadmodum in « triangula, parabolam Archimedes resolvit. Et quaesivi primum de omnibus « figuris, in quibus ordinatae ad basim, sunt omnes potestates abscissarum, « primae, secundae, tertiae, et deinceps in infinitum; quas ex demonstratis « a Cavallerio . . . deprehendebam esse in serie harmonica naturali ab unitate; « earumque summam demonstravi excrescere in infinitum, in praefatione ad « meum libellum, cuius titulus *Novae quadraturae arithmeticae, seu de « additione fractorum* . . . » [1].

Nelle quali parole, se non m'inganno, io leggerei il notevole risultato:

$$\int_0^1 (1 + x + x^2 + \ldots) dx = \infty,$$

VI. Lo stile del Mengoli è spesso contorto ed oscuro, a causa forse della preoccupazione che egli ebbe di esser rigoroso. Le sue notazioni sono diverse da quelle degli altri matematici, e perciò, sebbene spesso razionali, insolite. Così ad esempio egli osserva (e Leibniz ripeterà poi come sua l'osservazione) che invece delle parentesi una semplice virgola può adempiere allo stesso ufficio, e scrive quindi $a + b\,,c$ ciò che noi scriviamo $(a + b)c$.

Così ancora rileva l'inconveniente tipografico che presenta la linea di divisione orizzontale, ed adopera invece a tale ufficio le parentesi, scrivendo $a(b)$ ciò che noi scriviamo $\frac{a}{b}$.

Infine invece di scrivere gli esponenti più piccoli in alto, li scrive di seguito, così scrive $a2\,b3$, ciò che noi scriviamo $a^2 b^3$.

Ciò può spiegare come sia sfuggita all'attenzione dei più la sua teoria originale, rigorosa e puramente aritmetica dei logaritmi, la quale lo condusse a scoprire ed a pubblicare nel 1659, i primi sviluppi in serie infinita dei logaritmi dei numeri razionali.

---

nitorum del Wallis (1655). Così infatti dice il Mengoli nella lettera dedicatoria a Gian Domenico Cassini (*Geometria speciosa*, Elementum sextum, pag. 348):

« Ante annos duodecim, occasione cuiusdam problematis mihi propositi a D. Antonio « Rocca Regiensi, de figura unilinea describenda, quae secaret ellipsim in duobus punctis « innumerabiles eiusmodi figuras excogitavi, quas tunc per Geometriam indivisibilium « quadrabam... ».

[1] *Geometria speciosa*, Elementum Sextum, pag. 363. Nove anni più tardi, nel 1668, Nicola Mercator pubblicava la sua *Logarithmotechnia*. Se il Mercator avesse conosciuto l'opera del Mengoli (il che sembra oggi difficile poter accertare) si potrebbe spiegare in modo assai semplice la genesi della scoperta della serie di Mercator, e capire altresì come il Mercator non abbia poi scritto più nulla sulle serie infinite, malgrado che continuasse poi a pubblicare molti anni dopo altri scritti di matematica.

Converrà però adoperare un linguaggio più semplice, per esporre rapidamente queste idee del Mengoli.

Dato il numero intero e positivo n, si considerino le due successioni

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\,,\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\,,\quad \frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3n-1}\,,\ldots$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\,,\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\,,\quad \frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{3n}\,,\ldots$$

Il Mengoli chiama la prima successione di *iperlogaritmi* del numero n, e la seconda successione di *ipologaritmi* del numero n.

Chiama allora *logaritmo* di n l'unica quantità maggiore di tutti gli *iperlogaritmi* e minore di tutti gli ipologaritmi ([1]).

Se poi m, n sono interi e positivi ed $m > n$, se $\frac{m}{n}$ è intero, si vede subito che il logaritmo di $\frac{m}{n}$ è compreso tra le due successioni

$$\text{(A)}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{m-1}\,,\quad \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\cdots+\frac{1}{2m-1}\,,\quad \frac{1}{3n}+\cdots+\frac{1}{3m-1}\,,\ldots \\ \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{m}\,,\quad \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\cdots+\frac{1}{2m}\,,\quad \frac{1}{3n+1}+\cdots+\frac{1}{3m}\,,\ldots \end{array}\right.$$

(poichè queste successioni fanno parte di quelle che definiscono $\log\frac{m}{n}$, ecc.). Quindi si conclude facilmente ([2]) che

$$\log m - \log n = \log\frac{m}{n}\,.$$

la quale è la proprietà fondamentale dei logaritmi; e si vede pure che è naturale definire $\log\frac{m}{n}$ per mezzo delle successioni (A) nel caso in cui $\frac{m}{n}$ non è intero.

([1]) *Porro logarithmus est illa quantitas, ad quam tendunt hyperlogarithmi cum semper deinceps minuuntur, et ad quam tendunt hypologaritmi cum semper deinceps augentur; omni minor hyperlogarithmo, et omni maior hypologarithmo.* Geometria speciosa, Introd., pag. 69.

([2]) *Patet... quod compositae rationis logarithmus est aggregatus componentium logarithmorum,* ibid., pag. 71.

Da questa definizione di logaritmo di un numero razionale il Mengoli trae immediatamente uno sviluppo in serie infinita [1], cioè:

$$\text{(B)} \qquad \log\frac{m}{n} = \sum_{r=0}^{r=\infty} \left\{ \sum_{s=1}^{s=m} \frac{1}{rm+s} - \sum_{s=1}^{s=n} \frac{1}{rn+s} \right\};$$

quindi per esempio:

$$\log 2 = \left(1+\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)+\cdots$$

$$\log\frac{3}{2} = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$$

La prima di queste due formole non è altro, sotto forma leggermente diversa, che la formola

$$\log 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

trovata poi dal Mercator per una via più diretta e più feconda, e riscoperta più tardi del Brouncker con un metodo sostanzialmente non diverso da quello del Mengoli.

VII. Rimarebbe ancora da esporre sommariamente quali sforzi il Mengoli abbia fatto nel suo *Anno*, per rendersi conto del cammino percorso dal sole. Ma i suoi sforzi, per quanto sterili, e per quanto oramai inutili, perchè Newton già da qualche anno aveva meditato e risolto problemi ben più vasti, si prestano ad alcune considerazioni che spero di esporre in un'altra occasione.

[1] Il Mengoli chiama *prologaritmi* del n. m e del numero n, rispettivamente le due sommatorie finite che figurano a destra della formola (B), la quale è quindi enunciata da lui così:

Ordinetur summa excessuum primi prologarithmi supra primum, ... et secundi supra secundum, et tertii supera tertium, et sic deinceps in infinitum: omnium summa excessuum, est logarithmus rationis quam habent numeri..., ibid., pag. 74.

Fisica. — *Sulla legge di Lo Surdo* [1]. Nota del dott. CARLO SONAGLIA, presentata dal Corrispondente A. GARBASSO.

Dalle ricerche del prof. Lo Surdo sulla scomposizione elettrica delle righe dello spettro dell'idrogeno appartenenti alla serie di Balmer, risulta che in direzione perpendicolare al campo elettrico si osservano scomposte le varie righe in elementi polarizzati rettilineamente: due elementi esterni, vibranti parallelamente al campo elettrico; altri interni, a vibrazioni perpendicolari. Ma, mentre il numero delle componenti esterne rimane invariato, varia invece quello delle interne, e precisamente in relazione al posto che la riga occupa nella serie.

È noto che le lunghezze d'onda delle righe di questa serie si possono ottenere dalla formula

$$\frac{1}{\lambda} = a - \frac{4a}{n^2},$$

dove a è una costante ed n un parametro che dà valori interpretabili solo quando è posto uguale a 3, 4, 5, 6 . . . In questi casi la formula dà la lunghezza d'onda λ rispettivamente dei termini 1, 2, 3, 4 . . . della serie, cioè delle righe H_α, H_β, H_γ, H_δ, . . .

Ora, esaminando i risultati ottenuti col suo metodo sulle prime quattro righe della serie di Balmer, il prof. Lo Surdo trovò che essi rispondono alla seguente legge [2]:

« *Il numero d'ordine di una riga nella serie di Balmer coincide col* « *numero delle componenti interne di vibrazioni perpendicolari al campo* « *elettrico, ed il numero totale delle componenti coincide col valore del* « *parametro n.*

Mi è parso interessante uno studio diretto a verificare la validità della legge di Lo Surdo per le altre righe della serie.

Ma la ricerca si presentava molto difficile per le ragioni che accennerò in seguito, ed ho dovuto limitarla alla H_ε, la quinta riga della serie, che trovasi nell'ultravioletto.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di fisica del R. Istituto di studî superiori in Firenze, novembre 1915.

(2) A. Lo Surdo, *La scomposizione catodica della quarta riga della serie di Balmer e probabili regolarità* [in questi Rendiconti, vol. XXIII serie 5a, 1° semestre (1914), pag. 328]; id., *L'analogo elettrico del fenomeno di Zeeman e la costituzione dell'atomo*, L'Elettrotecnica, vol. I, 1914, pag. 629.

È noto che le righe della serie di Balmer, dal rosso al violetto, vanno indebolendosi e avvicinandosi e tendono al limite 3645,6 U . Å. Ora, col metodo catodico di Lo Surdo nei tubi molto sottili la luminosità è tale che si può fare l'osservazione diretta delle righe H_α e H_β, decomposte per il campo elettrico, anche con un modesto spettroscopio ad un sol prisma [1]; ma egli stesso aveva già notato che, mentre la H_γ si può fotografare con esposizioni di pochi minuti, per la H_δ (4101,2 U . Å) occorreva circa un'ora.

La H_ε si trova nell'ultravioletto (3970 U . Å), e l'osservazione non si può fare se non col metodo fotografico. Ma è molto più debole della H_δ, e quindi si comprende che è necessario di prolungare molto l'esposizione mantenendo costanti il più possibile le condizioni elettriche del tubo di scarica, e usando molte precauzioni per evitare l'appannamento della parete del tubo di vetro per il deposito metallico che la scarica vi produce dopo tempo più o meno lungo.

Le prove vennero da me prima condotte usando le solite disposizioni spettroscopiche con prismi e lenti di vetro, già adoperate dal prof. Lo Surdo. Ma dovetti convincermi, dopo molti e laboriosi tentativi, che il fascio di radiazioni 3970 U . Å., già debole per sè stesso, risultava ancora molto più indebolito per l'assorbimento nel lungo cammino attraverso le lenti ed i prismi di flint, tanto che non era possibile di ottenere una prova fotografica netta.

Ho adoperato in seguito una disposizione spettroscopica consimile a quelle precedenti, nella quale però le lenti ed i prismi erano tutti di quarzo.

Lo spettrografo, con prisma di Cornu, era del ben noto modello costruito da Hilger di Londra. Sulla fenditura di esso veniva proiettata, mediante due lenti di quarzo, l'immagine dello spazio catodico del tubo di scarica, disposto con asse parallelo alla fenditura allo scopo di ottenere sulle prove le configurazioni a ventaglio delle righe decomposte dal campo elettrico, configurazioni che, come è noto, servono bene a distinguere gli elementi di decomposizione dalle righe non decomposte.

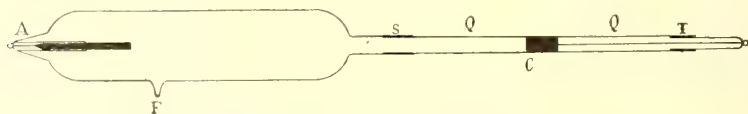



Fig. 1.

Il tubo era della solita forma, ma lievemente modificato. La modificazione consiste nel fare il ramo catodico, che prima era di vetro, di sostanza trasparente alla radiazione H_ε. Un tubo cilindrico di quarzo Q, del diametro interno di mm. 2,5, contenente il catodo C, è saldato in S al solito tubo di

[1] A. Lo Surdo, *Osservazione diretta della scomposizione delle righe spettrali in un tubo molto sottile* (in questi Rendiconti, vol. XXIII, serie 5ª, 1° sem. 1914, pag 252).

scarica, nel quale si trova l'anodo A, mediante un mastice che non dà vapori apprezzabili. Il catodo C è costituito da un cilindretto d'alluminio a faccia piana che riempie completamente la sezione; ad esso è attaccato un filo di platino il quale passa all'esterno attraverso ad un altro tubetto di vetro saldato in **T** al quarzo pure col mastice. Il catodo si scalda per effetto della scarica; ma il filo di platino è fatto lungo e sottile per impedire una notevole propagazione di calore verso l'estremo superiore, e quindi il rammollimento del mastice. La faccia catodica C è notevolmente distante dalla saldatura S, per la stessa ragione.

Il tubo, riempito d'idrogeno alla pressione opportuna, veniva chiuso alla lampada in F e poteva rimanere lungamente senza subire alterazioni.

Il tubo era collegato con i poli della batteria di 5000 piccoli accumulatori esistente in questo Laboratorio. La corrente veniva regolata mediante delle resistenze ad acqua inserite opportunamente nel circuito. La lunghezza dello spazio oscuro catodico era di circa mm. 6 con una corrente di circa 1 milliamp. e una caduta di potenziale agli elettrodi di circa 6000 volta.

Le prove fotografiche iniziali furono parecchie e laboriose. Esse mi servirono a stabilire le condizioni migliori relative alla larghezza della fenditura, al valore del campo opportuno per la netta scomposizione della H_ε che si trova in una regione dove la dispersione dello spettrografo corrisponde a circa 30 Ångstrom per millimetro. E bisognava che la corrente fosse di intensità debole, poichè altrimenti le condizioni del tubo non si potevano mantenere inalterate per il lungo tempo necessario ad ottenere delle prove sufficientemente impressionate.

La durata di esposizione, nelle condizioni da me scelte, era di circa quattro ore.

La maggiore difficoltà è dovuta alla presenza del secondo spettro dell'idrogeno, che nella luminosità catodica si presenta ricco di righe in vicinanza della H_ε, alcune delle quali particolarmente estese.

Un prolungamento di esposizione è perciò da evitarsi.

Ed anche con esposizioni sufficienti, un gruppo di due righe, relativamente molto intense e vicine, si sovrappone, dalla parte delle lunghezze d'onda brevi, alla configurazione a ventaglio, anche se il campo è appena sufficiente alla separazione degli elementi di decomposizione.

Esse sono le 3963,3 e 3962,4 U. Å. [1] che non si vedono separate nelle mie prove a causa della debole dispersione, ma si presentano come una riga larga, molto più intensa della H_ε, molto espansa in prossimità della parte catodica.

[1] Joseph Sweetman Ames, *On some gaseous spectra: hydrogen, nitrogen*. Phil. Mag., vol. XXX, series 5ª, an. 1890, pag. 48.

Perciò le mie prove furono necessariamente condotte a stabilire separatamente le caratteristiche della scomposizione della H_ε nel modo seguente:

1) la simmetricità della scomposizione, dedotta dalla forma del ventaglio, in tutte le prove;

2) la doppia esterna, come è stata osservata per le righe H_α, H_β, H_γ, H_δ, mediante l'aggiunta di un prisma di Glan-Thomson, disposto in modo da lasciar passare solo le vibrazioni parallele al campo elettrico;

3) il numero delle componenti interne, mediante esposizione molto prolungata e senza prisma, dopo aver fissato la posizione della doppia esterna.

Quest'ultima parte fu la più difficile. Le componenti verso le lunghezze d'onda più grandi, e quella centrale, che si presenta in questo caso, si vedono nettamente; mentre quelle verso le lunghezze d'onda brevi si deducono dalla simmetricità della configurazione a ventaglio, e dalle porzioni di esse componenti che divergono dal punto corrispondente al limite dello spazio catodico alla seconda luminosità negativa fino a quando non incontrano le due righe del secondo spettro dell'idrogeno, avanti accennate.

Ma ho potuto stabilire sicuramente che esse componenti interne a vibrazioni perpendicolari al campo, sono cinque.

Riassumendo, il comportamento delle prime cinque righe della serie di Balmer nel campo elettrico, in relazione al numero d'ordine della riga nella serie, e al valore corrispondente del parametro n, risulta indicato dalla seguente tabella:

Righe	H_α	H_β	H_γ	H_δ	H_ε
λ	6562,1	4860,7	4340,1	4101,2	3970,3
n	3	4	5	6	7
N. totale delle componenti .	3	4	5	6	7
N. d'ordine	1	2	3	4	5
Compon. a vibrazioni normali.	1	2	3	4	5
Aspetto delle righe (¹) . . .					

Ho confermato così per il quinto termine della serie di Balmer la legge di Lo Surdo.

(¹) Le componenti spostate verso l'alto sono quelle a vibrazioni parallele al campo,

Chimica. — *Ricerche sulle combinazioni subalogenate di alcuni elementi: sui cosiddetti sottocloruri e sottobromuri di bismuto* [1]. Nota II di L. Marino e R. Becarelli, presentata del Socio R. Nasini.

Dopo aver riferito, in una prima Nota, sul sistema bismuto-iodio [2], riprendiamo lo studio delle combinazioni del bismuto con il bromo e con il cloro, nonostante che sull'argomento si trovi in letteratura un ponderoso lavoro tedesco di B. G. Eggink [3], perchè le conclusioni dell'autore non si accordano, secondo il nostro modo di vedere, con il comportamento chimico complessivo del bismuto [4]. I dati sperimentali riguardanti i due sistemi considerati, non solo dimostrano erronee le conclusioni dell'Eggink, ma conducono, ove si interpretino convenientemente, ad un caso assai interessante dal punto di vista teorico e da quello pratico. Se si approfondisce infatti l'esame obbiettivo e si coordinano le varie osservazioni, senza perdere di vista il carattere chimico dell'elemento considerato, si giunge a dimostrare che i nuovi sistemi rappresentano un bellissimo caso di equilibrio fra due liquidi parzialmente miscibili e una fase solida formata, entro limiti abbastanza estesi di concentrazione, da cristalli misti i quali hanno un punto di fusione più alto di quelli dei componenti: ora, equilibrî di questo tipo non sono, per quanto a noi consti, ancora ben noti. Oltre a ciò, una maggiore conoscenza di queste relazioni, se da un lato ci fornisce il materiale sperimentale per discutere in seguito alcune nostre considerazioni sui concetti di

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Pisa, novembre 1915.

[2] R. Acc. Lincei, 21 [5] II 695 (1912).

[3] Zeitschr. f. physik. Chem., *64*, 449 (1908).

[4] A questa ricerca, che è una seconda documentazione delle idee esposte nella mia Nota *Nuove ricerche sulle combinazioni inferiori di alcuni elementi* {Rend. R. Acc. Lincei, 24 [5] II, 143 (1915)}, farò seguirne altre su argomenti ben diversi. Da esse appare ancora una volta quali interessanti deduzioni si possono trarre da certi lavori, in apparenza assai pregevoli, ove si segua il metodo di indagine senza trascurare i caratteri chimici della sostanza sulla quale si esperimenta. In questo studio sulle combinazioni sub-alogenate del bismuto ebbi un ottimo collaboratore nel dott. Becarelli. Data l'indole del lavoro, ciascuno di noi portò il suo contributo personale nella esecuzione delle esperienze. Il dott. Becarelli eseguì prima l'analisi termica sui varî miscugli, e poi l'analisi chimica dei varî strati, allo scopo di precisare i punti delle divergenze sperimentali; ciascuno di noi eseguì allora per proprio conto, a reciproco controllo, le definitive determinazioni, per cui le conclusioni alle quali siam giunti scaturiscono dall'esame di dati varie volte controllati e ampiamente discussi.

L. Marino.

individuo chimico e di combinazione berthollide, recentemente introdotti da Kurnakow (1) in base a misure quantitative dei diagrammi chimici « composizione-proprietà », dall'altro permette di collegare i nostri risultati con le ricerche chimico-fisische di Cohen (2) e collaboratori sull'antimonio esplosivo e con quelle chimiche di Schenck (3) sulle soluzioni solide di fosforo in tribromuro di fosforo, ricerche le quali tendono a stabilire nuove relazioni fra lo stato allotropico e la formazione di soluzioni solide.

Quanto all'interesse pratico, esso deriva non solo dall'avere noi mostrato che sono per ora da radiarsi dalla letteratura quelle combinazioni del bismuto con il bromo e con il cloro nelle quali esso figurerebbe come elemento monovalente o bivalente, ma anche dall'aver messo meglio in evidenza che, quando si vogliono conoscere tutte le variazioni di stato che si succedono in una massa, con carattere non del tutto metallico, sottoposta a graduale cambiamento di temperatura, non sempre basta il solo metodo termico, per quanto scrupolosamente eseguito, a trarre le opportune conclusioni. Spesso la quantità di calore che nella massa considerata entra in giuoco col passaggio dalla fase liquida alla fase solida, o viceversa, è così piccola che ad un'indagine superficiale potrebbe sfuggire, specie allorquando la massa stessa è poco conduttrice: cosicchè, ove non si ricorresse ad altri criterî e dispositivi analitici, si finirebbe col concludere erroneamente.

Se si osservano infatti le curve di raffreddamento dei varî miscugli di bismuto con tribromuro di bismuto, anche sperimentando con duecento grammi di prodotto, non si riesce a mettere bene in rilievo alcun principio di cristallizzazione; e solo in vicinanza della temperatura di fusione del bismuto notasi un effetto termico. Per quanto si segua accuratamente e lentamente il raffreddamento, il cambio di direzione nella curva manca fino alla temperatura di circa 260°, mentre la sostanza solida, probabilmente cristalli misti, si è già cominciata a formare a 305°.

Ove non venisse svelata per altra via questa presenza della fase solida che fa equilibrio a due fasi liquide ancora esistenti a quella temperatura, l'analisi termica condurrebbe ad erronee conclusioni. E ad errati giudizî porterebbe in tal caso anche l'analisi microscopica, perchè la mancanza di effetto termico al disopra di 270° farebbe pensare che le diverse sostanze, osservate al microscopio a temperatura ordinaria, si fossero originate al disotto di 270°.

E più giustificato appare il nostro rilievo quando facciamo notare che la massa del solido, non svelato dal metodo termico nelle suaccennate con-

(1) Z. f. anorg. Chemie 88 (1914) pag. 109.

(2) Zeitschr. fur phys. Chem., 47 (1904) pag. 1. — Ibid., 50 (1904), pag. 291. — Ibid., 52 (1905), pag. 129.

(3) Berl. Ber. 36, I, 979.

dizioni, può raggiungere il rapporto del 35 % del miscuglio: quantità, come si vede, che non è punto trascurabile e che mostra esser le difficoltà provenienti dal minimo sviluppo di calore che entra in giuoco. Non è dunque fuor di luogo insistere nel richiamare l'attenzione di coloro, i quali si servono del metodo termico per lo studio analitico degli equilibrî in miscele fuse, sulla necessità di bene accertarsi anche per altra via (specie quando fra i componenti del sistema vi sono combinazioni non metalliche) se esistono o no soluzioni solide o cristalli misti i quali si originano con piccolissimo sviluppo di calore.

La loro presenza, anche se elevato è il rapporto, non può essere allora svelata col metodo termico se non da apparecchi molto sensibili o da grandi quantità di sostanza ovvero da una velocità di raffreddamento estremamente lenta. L'ultimo caso però, come sappiamo, non è certo quello più adatto, perchè, pur ammesso che essa sia sufficiente per avvertire il principio di cristallizzazione, potrebbe dar luogo a false interpretazioni quando si segue l'ulteriore sviluppo della curva di equilibrio.

Ma prima di discutere i risultati delle nostre esperienze, è bene d'accennare a qual punto riprendiamo lo studio dell'argomento, riportando quelle conclusioni che a noi più interessano, e rimandando, per la completa bibliografia, al trattato del Gmelin Kraut (¹) nonchè al lavoro di G. B. Eggink (²) *Combinazioni del bismuto col bromo.* Dei composti che il bismuto fa col bromo, quello più conosciuto è il tribromuro. Esso, comunque preparato, secondo alcuni potrebbe dar luogo, per riduzione, alla formazione di $BiBr_2$; ma, secondo Eggink, questo composto non sarebbe $BiBr_2$, bensì $BiBr$. Il bibromuro, $BiBr_2$, fu ottenuto da Weber (³) fondendo una mescolanza di $BiBr_3$ e Bi in un rapporto tale da fare $BiBr_2$. I cristalli aghiformi separati dal liquido rosso-bruno, dopo raffreddamento, separano, per azione dell'acido cloridrico, bismuto metallico. Analogamente si scomporrebbero dando bismuto e tribromuro quando si scaldassero a temperatura più alta.

Questo comportamento deporrebbe, secondo l'autore, per l'esistenza del $BiBr_2$. Però, se si tenta di ottenere lo stesso prodotto da bismuto metallico e tribromuro, allora esso non corrisponde al $BiBr_2$ ma contiene circa il 6,5 % di bismuto in più; scioglierebbe del bismuto dando origine ad una nuova sostanza la quale sarebbe da considerarsi come un sesquibromuro di bismuto, Bi_2Br_3 (l'analisi darebbe una differenza, fra bismuto calcolato e trovato, di 0,5 %).

(¹) Gmelin Kraut, vol. III. 2. pag. 987, 996.
(²) Z. f. physik. Chemie *64,* 449 (1908).
(³) Pogg. Ann. *107,* 600.

Secondo Muir [1], il $BiBr_2$ non si può avere puro, perchè è molto difficile liberarlo dal tribromuro. Difatti i prodotti analizzati conterrebbero sempre più bromo (0,87 $^0/_0$) di quello che corrisponde alla composizione del $BiBr_2$. Per riscaldamento si decomporrebbe anch'esso in $BiBr_3$ e Bi, ma per una temperatura che è inferiore a quella del $BiCl_2$. L'autore deduce anche, che un composto inferiore si forma, dal comportamento del tribromuro riscaldato in una corrente di idrogeno secco. Con l'innalzarsi della temperatura, il tribromuro prima fonde in un liquido rosso; poi, in parte distilla, in parte si riduce a bismuto metallico.

Il prodotto più basso non si potrebbe quindi isolare, perchè la decomposizione in tribromuro e bismuto avviene per temperatura relativamente bassa.

B. G. Eggink, dalle curve di fusione dei varî miscugli di tribromuro e bismuto e dalle misure della solubilità, conclude per l'esistenza di una nuova combinazione BiBr la quale fonde per 287° in due strati liquidi.

Combinazioni del bismuto col cloro. — Per quel che riguarda i prodotti clorurati ammessi finora, è da ricordare che varî sono gli autori che tentarono di ridurre il tricloruro di bismuto che è il composto più facilmente preparabile.

Heintz [2] per primo cercò, ma senza successo, di preparare un composto contenente meno cloro, scaldando in corrente di idrogeno il tricloruro.

Schneider [3], dopo aver confermato l'insuccesso del metodo di Heintz, ricorse alla decomposizione del sale doppio $2\,NH_4Cl \,.\, BiCl_3$, scaldato a 300° in corrente di idrogeno. Eliminato l'acido cloridrico e compiuta la distillazione del cloruro ammonico, egli otteneva un liquido oleoso rosso, il quale per raffreddamento solidificava in una massa cristallina corrispondente ad un nuovo sale doppio. Quanto più prolungato era il riscaldamento, tanto più la composizione si avvicinava a quella data dalla formula $NH_4Cl \,.\, BiCl_2$. Il prodotto, deliquescente, per azione degli acidi diluiti metteva in libertà bismuto metallico e quindi, secondo Schneider, deriverebbe dal bicloruro, mentre, secondo Eggink, starebbe ad indicare soltanto che si forma un cloruro più basso del tricloruro. Vedremo che nessuna delle due interpretazioni corrisponde alla realtà. Schneider prepara anche il bicloruro scaldando in tubo chiuso per 4 ore fra 230°-250° una mescolanza di bismuto finamente polverizzato e calomelano. Secondo lui, dovrebbe compiersi la reazione $2\,HgCl + Bi = BiCl_2 + 2\,Hg$; vedremo invece che la reazione procede secondo l'equazione $3\,HgCl + Bi = BiCl_3 + 3\,Hg$.

Dal liquido nero che galleggia sulla mescolanza di mercurio e di bismuto in eccesso, cristallizza un prodotto di composizione non costante perchè i

[1] Journ. Chem. Soc. *29*, 144.

[2] Pogg. Ann. *63*, 59.

[3] Pogg. Ann. *96*, 130.

dati analitici oscillano molto nelle diverse preparazioni, secondo l'autore, a causa di un po' di mercurio e di bismuto che rimane come impurezza. La sostanza nera ottenuta si scompone, con gli acidi minerali, in tricloruro che passa in soluzione, ed in bismuto che si separa come polvere nera. Per azione della potassa concentrata si origina prima ossidulo nero; poi, per addizione di ossigeno, ossido giallo.

Scaldato all'aria, lascia, già a 300°, sublimare il tricloruro, mentre si libera bismuto metallico. Ad un simile risultato giunse Weber [1] fondendo in un tubo chiuso un miscuglio di tricloruro di bismuto e di bismuto metallico in un rapporto tale da avere un po' di eccesso di bismuto rispetto a quello richiesto per la formola $BiCl_2$. Dopo alcuni giorni di riscaldamento, lasciò raffreddare e trovò che la massa constava di due strati, dei quali il superiore, identico a la sostanza di Schneider, differiva, nel contenuto del bismuto, solo di 0,7 % dal valore teorico calcolato per $BiCl_2$.

Mentre Heintz e Schneider ritengono che, scaldando il tricloruro in corrente d'idrogeno secco, non si formi del $BiCl_2$, Muir [2] sostiene che si origina una sostanza nera la cui composizione corrisponde a quella del bicloruro e che per riscaldamento si scinde in un sublimato bianco cristallino, $BiCl_3$, ed in un residuo nero di bismuto metallico.

Un cloruro nero, che corrisponde per composizione al $BiCl_2$, l'ha preparato anche Déhérain [3], per il quale prodotto ammetterebbe anzi una formula doppia, Bi_2Cl_4, allo scopo di poter giustificare la trivalenza del bismuto. Egli credeva di poter anche ammettere l'esistenza di un altro composto, Bi_3Cl_8; ma dalle ricerche di Eggink risultò che questo non esiste.

Più recentemente Eggink [4] fece sull'argomento uno studio abbastanza completo. Egli espose una completa e pregevole trattazione dei casi graficamente possibili di coesistenza di fasi solide e liquide per un sistema di due componenti, ove si presentano due fasi liquide, basandosi sul metodo grafico da Ry van Alkemade dedotto per stabilire l'equilibrio fra le soluzioni saline e le coesistenti fasi solide, e da Bakhuis Roozeboom [5] applicato per i cristalli di miscela; e, determinando le curve di fusione dei sistemi $BiCl_3$—Bi e $BiBr_3$—Bi, mostrò che, invece delle combinazioni $BiCl_2$ e $BiBr_2$, esistono le combinazioni BiCl e BiBr. Dalla sua ricerca risulterebbe, anzi, che non esiste neppure il composto Bi_3Cl_8, mentre potrebbe formarsi una combinazione endotermica $BiCl_4$. Ora le esperienze finora da noi eseguite non solo hanno confermato i nostri dubbî sull'attendi-

(1) Pogg. Ann. *107*, 597.
(2) Journ. Chem. Soc. *29*, 144.
(3) Bull. Soc. Chim. 1862, pag. 217. — Dammer, II, pag. 262.
(4) Zeitschr. f. phys. Ch. 64, pag. 452 (1908).
(5) Z. f. phys. Chem. 11, 289 — Ibd. 30, 385.

bilità delle conclusioni di Eggink, ma hanno mostrato che esse vanno ben altrimenti interpretate.

Fondendo infatti entro i soliti nostri tubi [1] delle miscele di bismuto con quantità di tricloruro e rispettivamente tribromuro variabili dal 5 all'85 % si ottengono al disopra di 320° due strati liquidi: uno superiore nero, l'altro bianco lucente di aspetto metallico.

Coll'abbassarsi della temperatura si origina:

1°. Da uno dei due strati che formano la massa fusa un prodotto cristallino che non ha punto di fusione costante (per il composto bromurato fonde infatti completamente nell'intervallo 270°-305°, per quello clorurato fra 270° e 320°)

Questo per la temperatura di circa 240° si trasforma in altri due prodotti, di cui l'uno fonde intorno ai 260° e l'altro cristallino fonde per il miscuglio di bromo e bismuto fra 270° e 305° e per quello di cloro e bismuto fra 270° e 320°.

2°. Dall'altro strato invece una massa che per il bromo fonde a 200° circa e per il cloro a circa 180° ed è formata dall'eutettico $Bi—BiBr_3$ e $Bi—BiCl_3$ rispettivamente.

La massa cristallina proveniente dalla trasformazione è poco igroscopica ed il rapporto fra bismuto e bromo e fra bismuto e cloro varia non solo col variare della concentrazione del tribromuro e del tricloruro ma anche col variare degli strati della massa solidificata come possono mostrare i seguenti dati ottenuti su cristalli separati dalle diverse miscele fuse per le temperature su indicate.

La sostanza pesata fu posta in un palloncino tarato e trattata con tanto nitrato d'argento titolato e tanto acido nitrico quanto basta per sciogliere il bismuto che si libera. L'eccesso di nitrato d'argento fu dosato nel modo solito col solfocianuro ammonico.

gr. 0,3918 di sostanza cristallina separata da un miscuglio al 45 % di $BiBr_3$ consumarono cc. 10,0 di $AgNO_3$ $^N/_{10}$ = 26,62 % di Br.

gr. 0,5864 di un secondo strato della stessa sostanza consumarono cc. 18,8 di $AgNO_3$ $^N/_{10}$ = 25,65 % di Br.

Per sostanza cristallina separata da un miscuglio al 25 % di $BiBr_3$ si ebbe:

gr. 0,2981 di sostanza cristallina consumarono cc. 9,2 di $AgNO_3$ $^N/_{10}$ = = 24,69 % Br.

gr. 0,4496 di un altro strato consumarono cc. 13,5 di $AgNO_3$ $^N/_{10}$ = 24,06 % di Br.

[1] R. Acc. Lincei, 21 [5]. II, 647 (1912).

e per sostanza cristallina separata da un miscuglio al 55 % di $BiBr_3$ si trovò che:

gr. 0,3867 consumarono cc. 11,1 di $AgNO_3$ $^{N}/_{10}$ = 23,6 % di Br.

Analoghi risultati si ottengono per la sostanza cristallina clorurata.

Secondo il nostro modo di vedere questa sostanza separata che non fonde per una determinata temperatura e che scaldata nelle identiche condizioni nelle quali si è generata riforma di nuovo i due strati, dai quali prende origine nuova sostanza che fonde sopra i 270°, non può ritenersi come un vero e proprio composto ma deve riguardarsi come una serie di cristalli misti, i quali si formano con piccolissimo sviluppo di calore. I punti di fusione di questa serie di cristalli sono tutti più alti di quello dei componenti, ma ancora non abbiamo potuto stabilire con esattezza i limiti del campo di esistenza e sopra tutto se v'è un massimo nella curva di equilibrio perchè la sublimazione del tribromuro e rispettivamente tricloruro concorre a complicare il risultato sperimentale.

Confermeremo in altre Note quanto qui fu da noi succintamente ricordato.

INDICE DEL VOLUME XXIV, SERIE 5ª. — RENDICONTI

1915 — 2° Semestre.

INDICE PER AUTORI

A

B

L

M

O

P

INDICE PER MATERIE

ERRATA-CORRIGE

Nella Nota « *La frequenzanelle repliche del terremoto italiano — 13 gennaio 1915* » pubblicata in questi Rendiconti, vol. XXIV, 1° sem., fasc. 12, pag. 1223, sostituire alla formola

$$f' = \frac{73,03}{t + 0,6371}, \text{ l'altra } f' = \frac{77,03}{t + 0,6371}.$$

A pag. 1248 di questi Rend., fasc. 12, 1° sem. 1915, devono essere soppresse le righe 8, 9 e 10.

Le figure 4^{bis} e 6 delle pag. 457 e 459 di questo volume devono essere scambiate fra loro di posto.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I-XXIV. (1892-1915). Fasc. 12°. Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XXIV. (1892-1915). Fasc. 7-8.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I-XI. Fasc. 3.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XII. Vol. XV. Fasc. 1-2.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 dicembre 1915.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

Abbonamento postale.